

УДК 519.872

Е.А. Судыко

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ MMR|M|1
С ИСТОЧНИКОМ ПОВТОРНЫХ ВЫЗОВОВ¹**

Для исследования математической модели RQ-системы (Retrial queue) с конфликтами заявок и входящим MMR-поток (Markov-modulated Process) предложен метод асимптотических семиинвариантов в условии растущего времени задержки в источнике повторных вызовов. Приведены графики распределения вероятностей состояний системы.

Ключевые слова: *RQ-система, источник повторных вызовов, конфликты заявок, метод асимптотических семиинвариантов.*

Исследованию информационных технологий в целом и сетевых технологий в частности посвящено большое количество работ. Так, вопросам анализа сетей связи и протоколов случайного множественного доступа посвящены работы А.А. Назарова [1 – 5], И.И. Хомичкова [6], А.Н. Дудина [7], В.К. Щербо [8].

Однако многие задачи все еще остаются нерешенными и интересными для исследования. Так, одной из наиболее важных характеристик сети передачи данных является величина задержки, необходимая для доставки сообщения от источника к месту назначения, которая в сетях случайного доступа является нерегулярной.

В реальных системах часто наблюдаются эффекты повторных обращений заявок к обслуживающему прибору, конфликты заявок требуют рассмотрения моделей, выходящих за рамки классических систем массового обслуживания. Поэтому интерес к рассмотрению таких, более реальных систем возрастает. В связи с этим появилось большое количество работ, посвященных рассмотрению систем с повторными заявками, такие, как [9 – 13], в которых развиваются численные методы исследования.

Альтернативным подходом является применение метода асимптотического анализа для исследования таких систем.

Методом асимптотического анализа в теории массового обслуживания будем называть решение уравнений, определяющих какие-либо характеристики системы при выполнении некоторого предельного условия, вид которого будет конкретизирован для различных моделей и поставленных задач исследования.

В данной статье мы рассмотрим систему с повторными вызовами и конфликтом заявок и входящим MMR-поток.

MMR-поток называется модулированный пуассоновский поток, если управляющий процесс $k(t)$ является цепью Маркова с непрерывным временем

Для исследования рассматриваемой системы предлагается метод асимптотических семиинвариантов до третьего порядка.

¹ Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 гг.)» Федерального агентства по образованию по проекту «Разработка методов исследования немарковских СМО и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

1. Постановка задачи

В данной работе рассмотрим RQ-систему (Retrial queue) с конфликтами заявок и входящим ММР-поток. Заявка, поступившая в систему, отправляется на обслуживание. И если прибор свободен, то начинается осуществление немедленной передачи сообщения, которая заканчивается успешно, если за это время другие сообщения не поступали. Если же во время передачи одного сообщения поступает другое, то в этом случае говорят о ситуации конфликта. Сообщения, попавшие в конфликт, считаются искаженными, переходят в так называемый источник повторных вызовов (ИПВ), откуда вновь подаются на обслуживание после случайной задержки.

2. Математическая модель

В качестве математической модели RQ-системы рассмотрим однолинейную марковскую систему массового обслуживания с источником повторных вызовов, на вход которой поступает ММР-поток заявок, управляемый цепью Маркова, заданной матрицей Q инфинитезимальных характеристик q_{kv} и набором неотрицательных величин $\lambda_k \geq 0$. Требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ . Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки вступают в конфликт и переходят в источник повторных вызовов (ИПВ), где осуществляют случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его на случайное время обслуживания.

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $l(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$l(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Обозначим $P\{l(t)=l, k(t)=k, i(t)=i\} = P(l, k, i, t)$

вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии l , управляющая цепь Маркова приняла состояние k и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Процесс $\{l(t), k(t), i(t)\}$ изменения во времени состояний описанной системы является марковским.

Для распределения вероятностей $P(l, k, i, t)$ состояний $\{l, k, i\}$ рассматриваемой RQ-системы составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{\partial P(0, k, i, t)}{\partial t} = -(\lambda_k + i\sigma)P(0, k, i, t) + \mu P(1, k, i, t) + \lambda_k P(1, k, i-2, t) + \\ \quad + (i-1)\sigma P(1, k, i-1, t) + \sum_v P(0, v, i, t)q_{vk}, \\ \frac{\partial P(1, k, i, t)}{\partial t} = -(\lambda_k + \mu + i\sigma)P(1, k, i, t) + \lambda_k P(0, k, i, t) + \sigma(i+1)P(0, k, i+1, t) + \\ \quad + \sum_v P(1, v, i, t)q_{vk}. \end{cases} \quad (1)$$

В стационарном режиме система (1) примет вид

$$\begin{cases} -(\lambda_k + i\sigma)P(0, k, i) + \mu P(1, k, i) + \lambda_k P(1, k, i-2) + (i-1)\sigma P(1, k, i-1) + \sum_v P(0, v, i)q_{vk} = 0, \\ -(\lambda_k + \mu + i\sigma)P(1, k, i) + \lambda_k P(0, k, i) + \sigma(i+1)P(0, k, i+1) + \sum_v P(1, v, i)q_{vk} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Перепишем систему (2) для функции $H(l, k, u) = \sum_i e^{ju i} P(l, k, i)$ следующим образом:

$$\begin{cases} -\lambda_k H(0, k, u) + \mu H(1, k, u) + e^{2ju} \lambda_k H(1, k, u) + j\sigma \frac{\partial H(0, k, u)}{\partial u} - j e^{ju} \sigma \frac{\partial H(1, k, u)}{\partial u} + \\ + \sum_v H(0, v, u) q_{vk} = 0, \\ -(\lambda_k + \mu) H(1, k, u) + \lambda_k H(0, k, u) + j\sigma \frac{\partial H(1, k, u)}{\partial u} - j e^{-ju} \sigma \frac{\partial H(0, k, u)}{\partial u} + \\ + \sum_v H(1, v, u) q_{vk} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Обозначив вектор-строку $H(l, u) = \{H(l, 1, u), H(l, 2, u), \dots\}$, эту систему перепишем в виде

$$\begin{cases} H(0, u)(Q - \Lambda) + H(1, u)(e^{2ju} \Lambda + \mu I) + j\sigma \frac{\partial H(0, u)}{\partial u} - j e^{ju} \sigma \frac{\partial H(1, u)}{\partial u} = 0, \\ H(0, u) \Lambda + H(1, u)(Q - \Lambda - \mu I) - j e^{-ju} \sigma \frac{\partial H(0, u)}{\partial u} + j\sigma \frac{\partial H(1, u)}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

где I – единичная матрица.

Обозначив вектор-строку $H(u) = \{H(0, u), H(1, u)\}$, эту систему перепишем в матричном виде

$$j\sigma \frac{\partial H(u)}{\partial u} A(ju) = H(u) B(ju), \quad (4)$$

где матрицы $A(ju)$, $B(ju)$ являются блочными матрицами и имеют вид

$$A(ju) = \begin{pmatrix} -I & e^{-ju} I \\ e^{ju} I & -I \end{pmatrix}, \quad B(ju) = \begin{pmatrix} Q - \Lambda & \Lambda \\ \mu I + e^{2ju} \Lambda & Q - \Lambda - \mu I \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Матрицы допускают следующие разложения:

$$A(ju) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(ju)^v}{v!} A_v, \quad B(ju) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(ju)^v}{v!} B_v.$$

Вид матриц A_v , B_v очевидно определяется из (5):

$$A_0 = \begin{pmatrix} -I & I \\ I & -I \end{pmatrix}, \quad A_v = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^v I \\ I & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} Q - \Lambda & \Lambda \\ \mu I + \Lambda & Q - \Lambda - \mu I \end{pmatrix}, \quad B_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2^v \Lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученное равенство (4) будем называть основным для составленной математической модели.

Решение $H(u)$ уравнений (4) найдем при помощи предлагаемого в данной работе метода асимптотических семиинвариантов в условии растущего времени задержки в источнике повторных вызовов.

3. Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка в основном уравнении (4) выполним следующие замены:

$$\sigma = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad H(u) = F_1(w, \varepsilon). \quad (6)$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$j \frac{\partial F_1(w, \varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w) = F_1(w, \varepsilon) B(j\varepsilon w). \quad (7)$$

Теорема 1. *Предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$ значение $F_1(w)$ решения $F_1(w, \varepsilon)$ уравнения (7) имеет вид*

$$F_1(w) = R e^{j\varepsilon \kappa_1}, \quad (8)$$

где вектор R является решением системы

$$R(B_0 + \kappa_1 A_0) = 0, \quad (9)$$

удовлетворяющим условию нормировки

$$R E = 1, \quad (10)$$

а величина κ_1 является решением нелинейного скалярного уравнения

$$R(B_1 + \kappa_1 A_1) E = 0, \quad (11)$$

где вектор $R = R(\kappa_1)$ зависит от κ_1 и является решением системы (9), (10).

Доказательство. При $\varepsilon \rightarrow 0$, обозначив $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(w, \varepsilon) = F_1(w)$, перепишем уравнение (7) следующим образом:

$$j \frac{\partial F_1(w)}{\partial w} A_0 = F_1(w) B_0, \quad (12)$$

решение $F_1(w)$ которого запишем в виде произведения

$$F_1(w) = R \Phi_1(w), \quad (13)$$

где неизвестный вектор R будет определен ниже. Вектор R имеет смысл распределения вероятностей значений процесса $l(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а скалярная функция $\Phi_1(w)$ определяется следующим образом. Для этого сложим все уравнения системы (7), умножив это равенство на единичный вектор E . Затем, раскладывая матрицы $A(j\varepsilon w)$, $B(j\varepsilon w)$ по малому параметру и подставляя в полученное равенство произведение (13), получим нелинейное уравнение

$$j \frac{\partial \Phi(w)}{\partial w} R A_1 E = \Phi_1(w) R B_1 E, \quad (14)$$

решение $\Phi_1(w)$ которого, удовлетворяющее начальному условию $\Phi_1(0) = 1$, имеет вид

$$\Phi_1(w) = \exp\{j w \kappa_1\}, \quad (15)$$

где величина κ_1 будет определена ниже.

Подставляя (15) в (13), а затем в (12), получим однородную систему уравнений.

$$R(B_0 + \kappa_1 A_0) = 0, \quad (16)$$

определяющую вектор $R = R(\kappa_1)$, удовлетворяющий условию нормировки $RE = 1$.

Подставляя равенство (15) в уравнение (14), получим нелинейное скалярное уравнение относительно неизвестной величины κ_1 :

$$R(\kappa_1)(B_1 + \kappa_1 A_1)E = 0, \quad (17)$$

Теорема доказана.

В силу замен (6), равенств $H(l, u) = \sum_i e^{jui} P(l, i)$ и (15), можно записать асимптотическое равенство

$$M e^{jui(t)} = H(u)E = \sum_i e^{jui} \sum_l P(l, i) = F_1(w, \varepsilon)E \approx F_1(w)E = e^{ju \kappa_1 / \sigma}.$$

Функцию $h_1(u) = e^{ju \kappa_1 / \sigma}$ будем называть асимптотикой первого порядка. Величину κ_1 / σ , которая определяет асимптотическое среднее значение числа заявок в источнике повторных вызовов, будем называть асимптотическим семиинвариантом первого порядка.

4. Асимптотика второго порядка

Для нахождения асимптотики второго порядка в уравнении (4) выполним замену

$$H(u) = H_2(u) \exp \left\{ \frac{ju}{\sigma} \kappa_1 \right\}, \quad (18)$$

для неизвестной вектор-функции $H_2(u)$ получим уравнение

$$j\sigma \frac{\partial H_2(u)}{\partial u} A(ju) = H_2(u) \{ B(ju) + \kappa_1 A(ju) \}, \quad (19)$$

в котором выполним замены

$$\sigma = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad H_2(u) = F_2(w, \varepsilon). \quad (20)$$

Уравнение (19) примет вид

$$j\varepsilon \frac{\partial F_2(w, \varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w) = F_2(w, \varepsilon) \{ B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w) \}. \quad (21)$$

Теорема 2. Предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$ значение $F_2(w)$ решения $F_2(w, \varepsilon)$ уравнения (21) имеет вид

$$F_2(w) = R \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\}, \quad (22)$$

где вектор R определен в теореме 1, а величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = - \frac{g_1 (B_1 + \kappa_1 A_1) E + \frac{1}{2} R (B_2 + \kappa_1 A_2) E}{R A_1 E + g (B_1 + \kappa_1 A_1) E}, \quad (23)$$

в котором векторы g_1 и g являются решениями следующих систем уравнений:

$$g_1(B_0 + \kappa_1 A_0) + R(B_1 + \kappa_1 A_1) = 0,$$

$$g(B_0 + \kappa_1 A_0) + R A_0 = 0.$$

Доказательство. *Этап 1:* В этом уравнении сделаем предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, обозначив $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(w, \varepsilon) = F_2(w)$, получим уравнение

$$F_2(w)(B_0 + \kappa_1 A_0) = 0. \quad (24)$$

Тогда его решение $F_2(w)$ запишем в виде произведения

$$F_2(w) = R \Phi_2(w) = R \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\}, \quad (25)$$

где R – вектор, определенный системой (9) и условием нормировки $RE = 1$, а скалярная функция $\Phi_2(w)$ определена равенством (25), где значение κ_2 будет определено ниже.

Этап 2: Раскладывая матрицы $A(j\varepsilon w)$, $B(j\varepsilon w)$ в ряды по параметру ε , систему (21) перепишем с точностью до бесконечно малых слагаемых порядка ε^2 следующим образом:

$$j\varepsilon \frac{\partial F_2(w, \varepsilon)}{\partial w} A_0 = F_2(w, \varepsilon) \{ B_0 + \kappa_1 A_0 + j\varepsilon w (B_1 + \kappa_1 A_1) \} + O(\varepsilon^2). \quad (26)$$

Решение $F_2(w, \varepsilon)$ этой системы будем искать в виде

$$F_2(w, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\} \{ R + j\varepsilon w f_1(w) \} + O(\varepsilon^2). \quad (27)$$

Подставляя разложение (27) в предыдущее равенство, получим неоднородную систему уравнений

$$f_1(w)(B_0 + \kappa_1 A_0) + R(B_1 + \kappa_1 A_1 + \kappa_2 A_0) = 0$$

относительно вектор-функции $f_1(w)$, из которой вектор-функцию $f_1(w)$ можно записать в виде разложения

$$f_1(w) = G_1(w)R + h_1, \quad (28)$$

где $G_1(w)$ – произвольная скалярная функция, а вектор h_1 является решением системы

$$h_1(B_0 + \kappa_1 A_0) + R(B_1 + \kappa_1 A_1 + \kappa_2 A_0) = 0,$$

Представим h_1 в виде разложения

$$h_1 = g_1 + \kappa_2 g,$$

где $g_1(B_0 + \kappa_1 A_0) + R(B_1 + \kappa_1 A_1) = 0$, $g(B_0 + \kappa_1 A_0) + R A_0 = 0$. (29)

Этап 3: Для нахождения скалярной величины κ_2 просуммируем все уравнения системы (21), умножив ее на единичный вектор E , получим

$$j\varepsilon \frac{\partial F_2(w, \varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w)E = F_2(w, \varepsilon) \{ B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w) \} E. \quad (30)$$

Раскладывая матрицы $A(j\epsilon w)$, $B(j\epsilon w)$ в ряды по параметру ϵ и учитывая равенство $R(B_1 + \kappa_1 A_1)E = 0$, перепишем (30) в виде

$$\kappa_2 R A_1 E + \frac{1}{2} R (B_2 + \kappa_1 A_2) E + f_1(w) (B_1 + \kappa_1 A_1) E = 0.$$

Имея в виду (29), получаем

$$\kappa_2 R A_1 E + \frac{1}{2} R (B_2 + \kappa_1 A_2) E + (g_1 + \kappa_2 g) (B_1 + \kappa_1 A_1) E = 0.$$

Следовательно, решение κ_2 будет выглядеть следующим образом:

$$\kappa_2 = - \frac{g_1 (B_1 + \kappa_1 A_1) E + \frac{1}{2} R (B_2 + \kappa_1 A_2) E}{R A_1 E + g (B_1 + \kappa_1 A_1) E}. \quad (31)$$

Несмотря на то, что общие решения g_1 и g систем (29) имеют вид $g_1 = C_1 R + g_{1\text{частное}}$ и $g = C_2 R + g_{\text{частное}}$ соответственно, равенство (31) для κ_2 не будет зависеть от слагаемых $C_1 R$ и $C_2 R$ в силу равенства $R(B_1 + \kappa_1 A_1)E = 0$. Следовательно, искать значение констант C_1 и C_2 не имеет смысла.

Следствие. Выражение для определения скалярной величины κ_2 (31) не зависит от слагаемого $G_1(w)R$ в разложении для $f_1(w)$ (28). Вследствие этого вектор $f_1(w)$ в разложении (27) можно рассматривать не зависящим от переменной w , то есть (27) записать в виде

$$F_2(w, \epsilon) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\} \{ R + j\epsilon w f_1 \} + O(\epsilon^2).$$

В силу замен (18), равенств $H(l, u) = \sum_i e^{ju l} P(l, i)$ и (21), можно записать асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} M e^{ju l(t)} &= H(u) E = e^{ju \kappa / \sigma} H_2(u) E = e^{ju \kappa_1 / \sigma_1} F_2(w, \epsilon) E \approx e^{ju \kappa / \sigma_1} F_2(w) E = \\ &= \exp \left\{ ju \kappa_1 / \sigma + \frac{(ju)^2}{2} \kappa_2 / \sigma \right\}. \end{aligned}$$

Функцию

$$h_2(u) = \exp \left\{ ju \kappa_1 / \sigma + \frac{(ju)^2}{2} \kappa_2 / \sigma \right\}$$

будем называть асимптотикой второго порядка. Тогда величину κ_2 / σ , которая определяет асимптотическую дисперсию, будем называть асимптотическим семиинвариантом второго порядка.

Из вида $h_2(u)$ следует, что число заявок в источнике повторных вызовов распределено асимптотически нормально.

5. Асимптотика третьего порядка

Для нахождения асимптотики третьего порядка в уравнении (19) выполним замену

$$H_2(u) = H_3(u) \exp \left\{ \frac{(ju)^2}{2\sigma} \kappa_2 \right\}, \quad (32)$$

для неизвестной вектор-функции $H_3(u)$ получим уравнение

$$j\sigma \frac{\partial H_3(u)}{\partial u} A(ju) = H_3(u) \{ B(ju) + \kappa_1 A(ju) + \kappa_2 ju A(ju) \}, \quad (33)$$

в котором выполним замены

$$\sigma = \varepsilon^3, \quad u = \varepsilon w, \quad H_3(u) = F_3(w, \varepsilon). \quad (34)$$

Уравнение (33) примет вид

$$j\varepsilon^2 \frac{\partial F_3(w, \varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w) = F_3(w, \varepsilon) \{ B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w) + \kappa_2 j\varepsilon w A(j\varepsilon w) \}. \quad (35)$$

Теорема 3. *Предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$ значение $F_3(w)$ решения $F_3(w, \varepsilon)$ уравнения (35) имеет вид*

$$F_3(w) = R \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \kappa_3 \right\}, \quad (36)$$

где вектор R определен в теореме 1, а величина κ_3 определяется равенством

$$\kappa_3 = - \frac{h_1 \{ B_2 + \kappa_1 A_2 + 2\kappa_2 A_1 \} E + g_2 (B_1 + \kappa_1 A_1) E + \frac{1}{3} R (B_3 + \kappa_1 A_3 + 3\kappa_2 A_2) E}{RA_1 E + g (B_1 + \kappa_1 A_1) E}, \quad (37)$$

в котором векторы h_1 , g и g_2 являются решениями следующих систем уравнений:

$$h_1 \{ B_0 + \kappa_1 A_0 \} + R \{ \kappa_2 A_0 + B_1 + \kappa_1 A_1 \} = 0,$$

$$g_2 (B_0 + \kappa_1 A_0) + R (B_2 + \kappa_1 A_2 + 2\kappa_2 A_1) + 2h_1 (B_1 + \kappa_1 A_1 + \kappa_2 A_0) = 0,$$

$$g (B_0 + \kappa_1 A_0) + RA_0 = 0.$$

Доказательство. *Этап 1:* В уравнении (37) сделаем предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим равенство

$$F_3(w) (B_0 + \kappa_1 A_0) = 0.$$

Тогда его решение будем искать в виде

$$F_3(w) = R\Phi_3(w) = R \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \kappa_3 \right\}. \quad (38)$$

Этап 2: Систему (35) перепишем с точностью до бесконечно малых слагаемых порядка ε^3 следующим образом:

$$j\varepsilon^2 \frac{\partial F_3(w, \varepsilon)}{\partial w} A_0 = F_3(w, \varepsilon) \left\{ B_0 + \kappa_1 A_0 + j\varepsilon w (B_1 + \kappa_1 A_1) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} (B_2 + \kappa_1 A_2) + \right. \\ \left. + j\varepsilon w \kappa_2 A_0 + (j\varepsilon w)^2 \kappa_2 A_1 \right\} + O(\varepsilon^3).$$

Решение $F_3(w, \varepsilon)$ этой системы будем искать в виде

$$F_3(w, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \kappa_3 \right\} \left\{ R + j\varepsilon w f_1(w) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} f_2(w) \right\} + O(\varepsilon^3). \quad (39)$$

Подставляя разложение (39) в предыдущее равенство, получим

$$j^2 \varepsilon^2 \frac{(jw)^2}{2} \kappa_3 R A_0 = R \left\{ j\varepsilon w (B_1 + \kappa_1 A_1 + \kappa_2 A_0) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} (B_2 + \kappa_1 A_2 + 2\kappa_2 A_1) \right\} + \\ + j\varepsilon w f_1(w) \{ B_0 + \kappa_1 A_0 + j\varepsilon w (B_1 + \kappa_1 A_1 + \kappa_2 A_0) \} + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} f_2(w) \{ B_0 + \kappa_1 A_0 \} + O(\varepsilon^3).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующие уравнения:

$$\varepsilon: R \{ \kappa_2 A_0 + B_1 + \kappa_1 A_1 \} + f_1(w) \{ B_0 + \kappa_1 A_0 \} = 0, \\ \varepsilon^2: \frac{1}{2} f_2(w) (B_0 + \kappa_1 A_0) + \frac{1}{2} R \{ B_2 + \kappa_1 A_2 + 2\kappa_2 A_1 \} + f_1(w) \{ \kappa_2 A_0 + B_1 + \kappa_1 A_1 \} + \frac{1}{2} \kappa_3 R A_0 = 0. \quad (40)$$

Решение $f_1(w)$ первой системы (40) запишем в виде

$$f_1(w) = h_1 + G_1(w)R, \quad (41)$$

где $G_1(w)$ – произвольная скалярная функция, а вектор h_1 определяется системой

$$h_1 \{ B_0 + \kappa_1 A_0 \} + R \{ \kappa_2 A_0 + B_1 + \kappa_1 A_1 \} = 0.$$

Решение $f_2(w)$ второй системы (40) запишем в виде

$$f_2(w) = G_2(w)R + h_2 + 2G_1(w)h_1, \quad (42)$$

где $G_2(w)$ – произвольная скалярная функция, а вектор h_2 определяется системой

$$h_2 \{ B_0 + \kappa_1 A_0 \} + R \{ 2\kappa_2 A_1 + B_2 + \kappa_1 A_2 + \kappa_3 A_0 \} + 2h_1 \{ B_1 + \kappa_1 A_1 + \kappa_2 A_0 \} = 0.$$

Представим h_2 в виде разложения

$$h_2 = g_2 + \kappa_3 g,$$

где $g_2(B_0 + \kappa_1 A_0) + R(B_2 + \kappa_1 A_2 + 2\kappa_2 A_1) + 2h_1(B_1 + \kappa_1 A_1 + \kappa_2 A_0) = 0,$

$$g(B_0 + \kappa_1 A_0) + R A_0 = 0.$$

Этап 3: Для нахождения κ_3 просуммируем все уравнения системы (35), умножив ее на единичный вектор E , получим

$$j\varepsilon^2 \frac{\partial F_3(w, \varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w)E = F_3(w, \varepsilon) \{ B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w) + j\varepsilon w \kappa_2 A(j\varepsilon w) \} E. \quad (43)$$

Раскладывая матрицы по малому порядку и учитывая $R(B_0 + \kappa_1 A_0) = 0$, перепишем (43) в виде

$$\kappa_3 R A_1 E + \frac{1}{3} R \{B_3 + \kappa_1 A_3 + 3\kappa_2 A_2\} E + f_1(w) \{B_2 + \kappa_1 A_2 + 2\kappa_2 A_1\} E + f_2(w) (B_1 + \kappa_1 A_1) E = 0.$$

Имея в виду (41) и (42), получаем

$$\begin{aligned} \kappa_3 R A_1 E + \frac{1}{3} R \{B_3 + \kappa_1 A_3 + 3\kappa_2 A_2\} E + (G_1(w)R + h_1) \{B_2 + \kappa_1 A_2 + 2\kappa_2 A_1\} E + \\ + (G_2(w)R + h_2 + G_1(w)h_3) (B_1 + \kappa_1 A_1) E = 0, \end{aligned}$$

где $G_1(w)R \{B_2 + \kappa_1 A_2 + 2\kappa_2 A_1\} E + G_1(w)h_3 (B_1 + \kappa_1 A_1) E = 0$

в силу второй системы (40).

Следовательно, решение для κ_3 будет выглядеть следующим образом:

$$\kappa_3 = - \frac{h_1 \{B_2 + \kappa_1 A_2 + 2\kappa_2 A_1\} E + g_2 (B_1 + \kappa_1 A_1) E + \frac{1}{3} R (B_3 + \kappa_1 A_3 + 3\kappa_2 A_2) E}{R A_1 E + g (B_1 + \kappa_1 A_1) E}. \quad (44)$$

Несмотря на то, что общие решения g_2 , h_1 и g имеют вид $g_2 = C_1 R + g_{2\text{частное}}$, $h_1 = C_2 R + h_{1\text{частное}}$ и $g = C_3 R + g_{\text{частное}}$ соответственно, равенство (44) для κ_3 не будет зависеть от слагаемых $C_1 R$, $C_2 R$ и $C_3 R$ в силу равенства $R(B_1 + \kappa_1 A_1)E = 0$. Следовательно, искать значение констант C_1 , C_2 и C_3 не имеет смысла.

Следствие. Выражения для определения скалярной величины κ_3 (44) не зависят от слагаемых $G_1(w)R$ и $G_2(w)R$ в разложениях для $f_1(w)$ и $f_2(w)$ в (41) и (42). Вследствие этого векторы $f_1(w)$ и $f_2(w)$ в разложении (39) можно рассматривать не зависящими от переменной w , то есть (39) записать в виде

$$F_3(w, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \kappa_3 \right\} \left\{ R + j\varepsilon w f_1 + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} f_2 \right\} + O(\varepsilon^3).$$

В силу замен (32), (34) и равенства $H(l, u) = \sum_i e^{ju i} P(l, i)$, можно записать асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} M e^{ju i} = H(u) E = e^{ju \kappa_1 / \sigma} e^{\frac{(ju)^2}{2!} \kappa_2 / \sigma} H_3(u) E = e^{ju \kappa_1 / \sigma} e^{\frac{(ju)^2}{2!} \kappa_2 / \sigma} F_3(w, \varepsilon) E \approx \\ \approx e^{ju \kappa_1 / \sigma} e^{\frac{(ju)^2}{2!} \kappa_2 / \sigma} F_3(w) E \approx \exp \left\{ ju \kappa_1 / \sigma + \frac{(ju)^2}{2} \kappa_2 / \sigma + \frac{(ju)^3}{6} \kappa_3 / \sigma \right\}. \end{aligned}$$

Функцию

$$h_3(u) = \exp \left\{ ju \kappa_1 / \sigma + \frac{(ju)^2}{2} \kappa_2 / \sigma + \frac{(ju)^3}{6} \kappa_3 / \sigma \right\}$$

будем называть асимптотикой третьего порядка. Величину κ_3 / σ будем называть асимптотическим семиинвариантом третьего порядка.

Аналогично асимптотикам первых трех порядков можно получить вид асимптотики произвольного порядка m :

$$h_m(u) = \exp \left\{ \sum_{v=1}^m \frac{(ju)^v}{v!} \kappa_v / \sigma \right\},$$

где κ_m / σ будем называть асимптотическим семиинвариантом v -го порядка.

6. Распределение вероятностей состояний системы

При помощи обратного преобразования Фурье можно найти асимптотическое распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов.

$$P_v(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ju i} h_v(i) du, \quad v = 2, 3, \quad (45)$$

где

$$h_v(u) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^v \frac{(ju)^i}{i!} \frac{\kappa_i}{\sigma} \right\},$$

величины κ_i определяются из (17), (31) и (44).

Определим значения параметров. Пусть $\sigma = 0,01$, $\mu = 1$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & -0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad i = 0 \dots 100.$$

Построим асимптотическое распределение вероятностей числа заявок в ИПВ для различных v следующим образом:

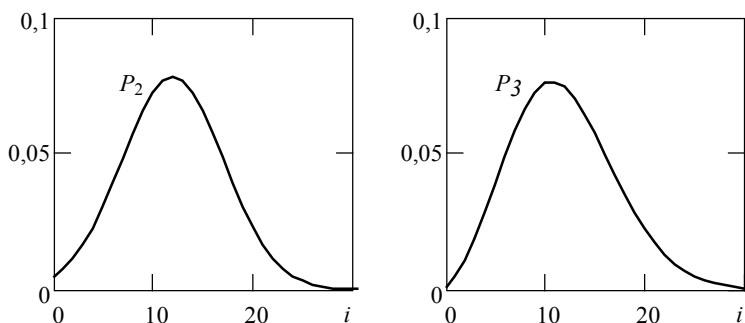


Рис. 1 Асимптотическое распределение вероятностей числа заявок в ИПВ для $v = 2, 3$.

На графиках (рис. 1) показаны распределения вероятностей числа заявок в ИПВ, полученных с помощью асимптотического анализа.

Заключение

В работе предложен метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели RQ-системы с конфликтами заявок и входящим ММР-поток. Применен метод асимптотических семиинвариантов в условии растущего времени задержки в источнике повторных вызовов. Построены графики распределения вероятностей состояний системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А., Пичугин С.Б. Исследование спутниковой сети связи методом математического моделирования // Изв. вузов. Физика. 1992. № 9. С. 120–129.
2. Назаров А.А., Одышев Ю.Д. Исследование сетей связи с протоколами «адаптивная Алоха» для конечного числа станций в условиях перегрузки // Проблемы передачи информации. 2000. № 3. С. 83–93.
3. Назаров А.А., Никитина М.А. Применение условий эргодичности цепей Маркова к исследованию существования стационарных режимов в сетях связи // Автоматика и вычислительная техника. 2003. № 1. С. 59 – 66.
4. Назаров А.А., Одышев Ю.Д. Исследование сети связи с динамическим протоколом «синхронная Алоха» в условиях большой загрузки // Автоматика и вычислительная техника. 2001. № 1. С. 77 – 84.
5. Назаров А.А., Цой С.А. Общий подход к исследованию марковских моделей сетей передачи данных, управляемых статистическими протоколами случайного множественного доступа // Автоматика и вычислительная техника. 2004. № 4. С. 73–85.
6. Хомичков И.И. Исследование моделей локальной сети с протоколом случайного множественного доступа // АиТ. 1993. № 12. С. 89 – 90.
7. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: БГУ, 2000. С. 221.
8. Щербо В.К., Киреичев В.М., Самойленко С.И. Стандарты по локальным вычислительным сетям.: Справочник. М.: Радио и связь, 1990. С. 304.
9. Клейнрок Л., Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979. С. 598.
10. D'Apice C., De Simone T., Manzo R., Rizelian G. Priority service of primery customers in the M/G/1/r retrial queueing system with server searching for customers // J. Information Theory and Information Processing. 2004. V. 4. No. 1. P. 13–23.
11. Bocharov P., D'Apice C., D'Auria B., Salerno S., A queueing system of finite capacity with the server requiring a priority search for customers // Vestnik RUDN, Seria Prikladnaia Matematika I Informatika. 2000. No. 12. P. 50–61.
12. Bocharov P., D'Apice C., Phong N., Rizelian G., Retrial servicing of multivariate Poisson flow with customer-searching server with finite buffer // Ibid. 2002. No. 1. P. 98–106.
13. Artalejo J.R., Joshua V.C., Krishnamoorthy A., An M/G/1 retrial gueue with orbital search by the server // Advances in Stochastic Modeling (J.R. Artalejo, A. Krishnamoophy (Eds)). Notable publications, New Jersey, 2002. P. 41–54.
14. Колоусов Д.В., Назаров А.А., Цой С.А. Исследование вероятностно-временных характеристик бистабильных сетей случайного доступа // АиТ. 2006. № 2. С. 90–105.
15. Коцюруба П.И., Назаров А.А. Исследование асимптотических средних характеристик немарковских моделей неустойчивых сетей случайного доступа // Проблемы передачи информации. 2003. № 3. С. 77–88.

Судыко Елена Александровна
Томский государственный университет
E-mail: ESudyko@yandex.ru

Поступила в редакцию 19 мая 2010 г.