

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.2

В.В. Поддубный, О.В. Романович

РЫНОК КАК САМОУПРАВЛЯЕМАЯ
ИНЕРЦИОННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ
ПРИ СБАЛАНСИРОВАННОЙ СТРАТЕГИИ ПОСТАВКИ ТОВАРА

Исследуется математическая модель инерционного рынка одного товара с запаздыванием поставок товара на рынок в условиях «мягких» и «жестких» ограничений на скорость изменения цены товара. «Мягкие» ограничения инерционности задаются квадратичной штрафной функцией, «жесткие» – интервалом допустимых скоростей изменения цены. Рассматривается сбалансированная стратегия поставки товара на рынок, определяемая соотношением текущего спроса на товар и наличным запасом товара. С использованием квазиньютоновского алгоритма оптимизации находится оптимальное управление ценой товара, максимизирующее прибыль продавца при удовлетворении покупательского спроса.

Ключевые слова: рынок, динамическая модель, запаздывание, инерционность, ограничения, управление, оптимизация.

Классическая («паутинообразная») модель рынка Вальраса – Маршалла [1] описывается в дискретном времени $t = 0, 1, 2, \dots, T$ системой разностных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\begin{aligned} Q(t+1) - Q(t) &= k(P^D(Q(t)) - P^P(Q(t))), \\ P(t+1) - P(t) &= h(Q^D(P(t)) - Q^P(P(t-\tau))), \end{aligned} \quad (1)$$

где $Q(t)$ – количество (объем) товара на рынке, $P(t)$ – его цена в каждый момент дискретного времени t . Правые части уравнений (1) пропорциональны рассогласованиям линий спроса $Q^D(P)$, $P^D(Q)$ и предложения $Q^P(P)$, $P^P(Q)$. Коэффициенты $k > 0$, $h > 0$ в общем случае могут зависеть от $Q(t)$ и $P(t)$ соответственно. Запаздывание $\tau \geq 0$ (тоже дискретное целочисленное) обусловлено задержкой поставки товара на рынок. Рыночное равновесие достигается в точке (Q^*, P^*) пересечения линий спроса и предложения, обращающей правые части системы уравнений (1) в нули.

На практике линии спроса и предложения неизвестны. Однако мы будем исходить из того, что линия спроса может быть идентифицирована по наблюдаемым на некотором интервале времени изменениям объемов продаж и цен товаров. Поэтому будем считать ее известной и в первом приближении линейной:

$$Q^D(P) = Q_m - aP, \quad (2)$$

где $Q_m > 0$ – максимальное значение спроса на товар (при $P = 0$), $a > 0$ – абсолют-

ное значение углового коэффициента линии спроса. Формула (2) отражает тот факт, что спрос на товар уменьшается с ростом цены и при некоторой максимальной цене $P_{\max} = Q_m/a$ становится равным нулю. Линию же предложения будем по-прежнему считать неизвестной и недоступной для идентификации.

В связи с этим возникает задача построения математической модели рынка, не требующей знания линии предложения. В работе [2] мы рассмотрели несколько вариантов построения такой модели. Это модели рынка, представляемые как рестриктивные (стесняемые ограничениями типа неравенств) самоуправляемые динамические системы с запаздыванием. Эти модели соответствовали разным стратегиям поставки товара на рынок, имеющим разную степень адекватности реальным условиям. Простейшие из них были исследованы в [2]. В данной работе мы исследуем наиболее сложную из этих моделей, не исследованную в [2]. Эта модель соответствует, по-видимому, наиболее адекватной из рассмотренных в [2] стратегии поставок товара на рынок – сбалансированной стратегии, допускающей максимально экономное удовлетворение покупательского спроса на текущий момент времени.

1. Математическая модель рынка одного товара как рестриктивная динамическая система с запаздыванием при сбалансированной стратегии поставки товара

Пусть в соответствии с моделью линии спроса (2)

$$Q^D(t) = Q_m - aP(t) \quad (3)$$

– спрос на товар в момент t дискретного времени при цене $P(t)$. Пусть в момент $t - \tau$ продавец закупает товар в объёме, допускающем максимально экономное удовлетворение спроса на этот момент времени:

$$Q^Z(t - \tau) = R(Q^D(t - \tau) - Q(t - \tau)) = \max(Q^D(t - \tau) - Q(t - \tau), 0), \quad (4)$$

где $R(x) = x \cdot 1(x > 0) = \max(x, 0)$ – рестриктивная (ограничительная) функция, равная x при $x > 0$ и 0 при $x \leq 0$; $1(\cdot)$ – индикатор события, указанного в скобках; $Q(t)$ – объём товара на складе в момент времени t . Другими словами, мы предполагаем, что продавец в момент времени $t - \tau$, не имея, скажем, возможности прогнозировать спрос на товар к моменту времени t , действует, исходя из ситуации на момент времени закупки товара. При этом действует наиболее экономно с точки зрения текущего момента времени, закупая минимальный объём товара, обеспечивающий вместе с товарным запасом (товаром, имеющимся в наличии на складе) удовлетворение покупательского спроса на этот момент времени. Это существенное предположение, определяющее стратегию управления запасом товара в рассматриваемом здесь варианте модели рынка. Такую стратегию поставок товара на рынок будем называть сбалансированной.

Объём продаж на t -м интервале дискретного времени определяется тогда величиной

$$Q^S(t) = \min(Q^D(t), Q(t) + Q^Z(t - \tau)), \quad (5)$$

то есть объём продаж либо полностью покрывает спрос $Q^D(t)$ в момент времени t , если предлагаемое покупателю количество товара на рынке в этот момент превышает спрос, $Q(t) + Q^Z(t - \tau) \geq Q^D(t)$, либо продается весь наличный объём товара $Q(t) + Q^Z(t - \tau)$, не покрывая спроса, если $Q(t) + Q^Z(t - \tau) < Q^D(t)$.

К началу $(t + 1)$ -го интервала времени на складе продавца остаётся непроданный товар (запас) в объёме

$$Q(t+1) = R(Q(t) + Q^Z(t - \tau) - Q^S(t)) = \max(Q(t) + Q^Z(t - \tau) - Q^S(t), 0), \quad (6)$$

отличном от нуля, только если предложение товара превышает спрос. С учётом (4) и (5) представим (6) в виде

$$Q(t+1) = R(Q(t) - Q^D(t) + R(Q^D(t - \tau) - Q(t - \tau))). \quad (7)$$

Это нелинейное рекуррентное уравнение с запаздывающим аргументом, связывающее между собой товарный запас в момент времени $t + 1$ с товарными запасами в предшествующие моменты времени t и $t - \tau$.

С учетом соотношения (3) вместе с рекуррентным соотношением

$$P(t+1) = P(t) + u(t), \quad (8)$$

стесняемым ограничениями

$$0 \leq P_{\min} \leq P(t) \leq P_{\max} \quad \forall t, \quad (9)$$

где $P_{\min} \geq 0$ – минимальная цена, по которой продавец еще может согласиться продавать товар, а $u(t)$ – скорости изменения цены, определяемые рынком (управления), уравнение (7) полностью описывает динамику рынка при заданных начальных условиях и фиксированных управлениях $u(t)$. Заметим, что безубыточная торговля возможна, по крайней мере, лишь при $P_{\min} \geq P_1$, где P_1 – цена закупки товара.

2. Критерий оптимальности ценообразования

Сформулируем теперь критерий, в соответствии с которым рынок может управлять изменениями цены товара, т.е. вырабатывать управления $u(t)$. Пусть P_1 – цена закупки товара, P_2 – цена хранения. Тогда прибыль продавца на t -м интервале дискретного времени равна разности между выручкой от продажи товара в объёме $Q^S(t)$ по цене $P(t)$ и затратами на закупку товара в объёме $Q^Z(t - \tau)$ по цене P_1 и его хранение на складе в объёме $Q(t)$ по цене P_2 :

$$J(t) = Q^S(t)P(t) - Q^Z(t - \tau)P_1 - Q(t)P_2. \quad (10)$$

В точке равновесия (покоя)

$$P(t) = P^*, \quad Q(t) = Q^*, \quad Q^{D*} = Q_m - aP^*, \quad Q^{Z*} = R(Q^{D*} - Q^*),$$

$$Q^{S*} = \min(Q^{Z*} + Q^*, Q^{D*}), \quad Q^* = R(Q^* + Q^{Z*} - Q^{S*}),$$

$$J^* = Q^{D*}P^* - Q^{Z*}P_1 - Q^*P_2.$$

Можно показать, что максимальное значение равновесной прибыли $J_{\max}^* = (Q_m - aP_1)^2 / (4a)$ достигается при $Q^* = 0$, $P^* = (Q_m + aP_1) / (2a)$. Иными словами, равновесие рынка, обеспечивающее его максимальную рентабельность (прибыль продавца) при полном удовлетворении покупательского спроса, достигается при равновесной цене $P^* = (Q_m + aP_1) / (2a)$ и отсутствии на рынке излишков товара ($Q^* = 0$). Это и есть точка оптимального рыночного равновесия.

Вернемся к уравнениям состояния рынка (7), (8). Поскольку уравнение (7) – уравнение с запаздывающим аргументом для обеих переменных $Q(t)$ и $P(t)$, необходимо задать «начальные» функции, описывающие поведение этих переменных

на интервале $[-\tau, 0]$. Будем считать, что до момента времени $t = 0$ рынок находился в состоянии оптимального равновесия (Q^*, P^*) , а в момент $t = 0$ произошло скачкообразное возмущение состояния рынка до значения (Q_0, P_0) , так что

$$Q(t) = Q^* = 0, \quad P(t) = P^* = (Q_m + aP_1)/(2a), \quad t = -\tau, -1,$$

$$Q(t) = Q_0, \quad P(t) = P_0, \quad t = 0. \quad (11)$$

Решение системы рекуррентных уравнений (7), (8) с начальными условиями (11) при заданном законе управления $u(t)$, удовлетворяющем ограничениям (9), полностью описывает поведение рынка на интервале времени $[-\tau, T]$.

Максимально рентабельный для продавца рынок, обеспечивающий покупательский спрос на товар, реализуется при оптимальном управлении

$$u(t) = \arg \max_{\{u, Q, P\}} J, \quad (13)$$

максимизирующем суммарную на интервале $[0, T]$ прибыль продавца:

$$J = \sum_{t=0}^T J(t) \Rightarrow \max_{\{u, Q, P\}}. \quad (14)$$

3. Учёт инерционности рынка

3.1. Учёт инерционности с помощью «штрафной» функции для управлений

Рассмотрим вариант поведения рынка при оптимальном управлении (13), максимизирующем суммарную на интервале $[0, T]$ прибыль продавца с учетом инерционности рынка:

$$J = \sum_{t=0}^T J(t) - \frac{w}{2} \sum_{t=0}^{T-1} u^2(t) \Rightarrow \max_{\{u, Q, P\}}, \quad (15)$$

где $w \geq 0$ – вес «штрафной» функции для управлений. Принятая здесь квадратичная штрафная функция не допускает слишком быстрых изменений цены, обеспечивая определённую инерционность рынка. Максимум целевого функционала J ищется по всем переменным $\{u(t), Q(t), P(t)\}$, связанным рекуррентными уравнениями состояния рынка (7), (8) с начальными условиями (11) и ограничениями (9).

Нетрудно видеть, что множество допустимых (то есть удовлетворяющих линейным неравенствам (9)) управлений u и состояний P ограничено, замкнуто и имеет внутренние точки, а целевая функция J и правые части уравнений состояния (7), (8) непрерывны по переменным u , P и Q . Следовательно, согласно теореме Вейерштрасса, максимум (возможно, не единственный) целевой функции (14) существует и конечен.

3.2. Учёт инерционности с помощью жёстких ограничений на управления

Другой вариант поведения рынка при оптимальном управлении (13), максимизирующем суммарную на интервале $[0, T]$ прибыль продавца с учетом инерционности рынка, может иметь место при жёстких ограничениях на интервал возможных значений управлений (скоростей изменений цены товара):

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}. \quad (16)$$

Из определения (8) следует, что $u_{\min} < 0$ и $u_{\max} > 0$ жёстко ограничивают снизу и сверху скорость изменения цены $P(t+1) - P(t)$. Если при этом $|u_{\min}| = |u_{\max}|$, скорости увеличения и уменьшения цены ограничиваются одинаково, как и в случае мягких штрафных ограничений. Если же $|u_{\min}| < |u_{\max}|$, скорость роста цены может превышать по модулю скорость её падения и возникает явление рыночного гистерезиса (рынок «охотно» увеличивает цену товара, но «неохотно» её снижает). В случае жестких ограничений (16) целевая функция (15) теряет штрафное слагаемое ($w = 0$) и принимает вид (14), но максимизация функционала J происходит в условиях ограничений (16).

4. Алгоритм решения задач оптимизации

Представим целевую функцию (14) или (15) как сложную функцию вектора цен $P = \{P(1), P(2), \dots, P(T)\}$ на интервале $[1, T]$ дискретного времени t , определяемую соотношениями (10), (3) – (5), (7), (8). Тогда задача максимизации (14) или (15) по переменным $\{u, Q, P\}$ при ограничениях в виде рекуррентных равенств (7), (8) и линейных неравенств (9) или (9) и (16) переходит в задачу максимизации (14) или (15) только по векторной переменной P при ограничениях в виде линейных неравенств (9) или (9) и (16).

Скалярные целевые функции (14) и (15) почти всюду дважды непрерывно дифференцируемы по вектору P в T -мерном евклидовом пространстве, за исключением множества точек изломов, в которых функции

$$\alpha(t) = Q^D(t - \tau) - Q(t - \tau), \quad \beta(t) = Q^D(t) - Q(t),$$

$$\gamma(t) = (Q^D(t - \tau) - Q(t - \tau)) - (Q^D(t) - Q(t)) = \alpha(t) - \beta(t) \quad (17)$$

меняют знак. Действительно, используя обозначения (17), перепишем соотношения (4) – (6) в виде

$$Q^Z(t - \tau) = \max(\alpha(t), 0) = \begin{cases} \alpha(t), & \alpha(t) > 0, \\ 0, & \alpha(t) \leq 0; \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Q^S(t) &= Q(t) + \min(\beta(t), \max(\alpha(t), 0)) = \\ &= Q(t) + \begin{cases} \alpha(t), & (\alpha(t) > 0) \wedge (\gamma(t) < 0), \\ \beta(t), & ((\alpha(t) > 0) \wedge (\gamma(t) > 0)) \vee ((\alpha(t) \leq 0) \wedge (\beta(t) < 0)), \\ 0, & (\alpha(t) \leq 0) \wedge (\beta(t) > 0); \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Q(t+1) &= \max(\max(\alpha(t), 0) - \min(\beta(t), \max(\alpha(t), 0)), 0) = \\ &= \begin{cases} \gamma(t) = \alpha(t) - \beta(t), & (\alpha(t) > 0) \wedge (\gamma(t) > 0), \\ -\beta(t), & (\alpha(t) \leq 0) \wedge (\beta(t) < 0), \\ 0, & ((\alpha(t) > 0) \wedge (\gamma(t) < 0)) \vee ((\alpha(t) \leq 0) \wedge (\beta(t) > 0)), \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

откуда видно, что точки изломов функций $Q^Z(t - \tau)$, $Q^S(t)$, $Q(t+1)$, а следовательно, функции $J(t)$ и целевой функции J (14) или (15), определяются точками смены знаков функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t) = \alpha(t) - \beta(t)$. С точки зрения сбалансированной стратегии поставки товара на рынок это вполне естественно, так как функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ имеют смысл разницы между товарным спросом и запасом товара в моменты заказа товара. И если спрос превышает запас, происходит заказ товара, направ-

ленный на обеспечение спроса, тогда как в противном случае заказ товара не производится (запаса достаточно для удовлетворения спроса).

Выпишем градиент и гессиан целевой функции (15). Для целевой функции (14) их значения будут частными случаями при $w = 0$. Градиент ∇J целевой функции J есть вектор-столбец первых частных производных J по компонентам вектора P , а её гессиан H – матрица вторых частных производных J по P :

$$\nabla J = \frac{\partial J}{\partial P}, \quad \left\{ \nabla J(k) = \frac{\partial J}{\partial P(k)}, k = 1, 2, \dots, T \right\},$$

$$H = \frac{\partial \nabla J}{\partial P} = \frac{\partial^2 J}{\partial P^2}, \quad \left\{ H(k, l) = \frac{\partial^2 J}{\partial P(k) \partial P(l)}, k, l = 1, 2, \dots, T \right\}.$$

Дифференцируя соотношения (3), (18) – (20) с учётом (17) и соотношение (10) по $P(k)$, $k = 1, 2, \dots, T$, и обозначая элементы матриц-производных

$$q^D(t, k) = \partial Q^D(t) / \partial P(k), \quad q^Z(t, k) = \partial Q^Z(t) / \partial P(k), \quad q^S(t, k) = \partial Q^S(t) / \partial P(k),$$

$$q(t, k) = \partial Q(t) / \partial P(k), \quad j(t, k) = \partial J(t) / \partial P(k),$$

получим

$$q^D(t, k) = -a\delta_{tk}; \quad (21)$$

$$q^Z(t - \tau, k) = \begin{cases} q^D(t - \tau, k) - q(t - \tau, k), & \alpha(t) > 0, \\ 0, & \alpha(t) \leq 0; \end{cases} \quad (22)$$

$$q^S(t, k) = q(t, k) + \begin{cases} q^D(t - \tau, k) - q(t - \tau, k), & (\alpha(t) > 0) \wedge (\gamma(t) < 0), \\ q^D(t, k) - q(t, k), & ((\alpha(t) > 0) \wedge (\gamma(t) > 0)) \vee \\ & \vee ((\alpha(t) \leq 0) \wedge (\beta(t) < 0)), \\ 0, & (\alpha(t) \leq 0) \wedge (\beta(t) > 0); \end{cases} \quad (23)$$

$$q(t+1, k) = \begin{cases} (q^D(t - \tau, k) - q(t - \tau, k)) - (q^D(t, k) - q(t, k)), & (\alpha(t) > 0) \wedge (\gamma(t) > 0), \\ -(q^D(t, k) - q(t, k)), & (\alpha(t) \leq 0) \wedge (\beta(t) < 0), \\ 0, & ((\alpha(t) > 0) \wedge (\gamma(t) < 0)) \vee \\ & \vee ((\alpha(t) \leq 0) \wedge (\beta(t) > 0)); \end{cases} \quad (24)$$

$$j(t, k) = P(t)q^S(t, k) + Q^S(t)\delta_{tk} - q^Z(t - \tau, k)P_1 - q(t, k)P_2. \quad (25)$$

Значения всех функций q^D , q^Z , q^S , q при первом аргументе $(t, t - \tau, t + 1)$, принимающем значения от $-\tau$ до 0, равны 0.

Дифференцируя (14) по P с учётом (21) – (25), получим

$$\nabla J(k) = -\sum_{t=1}^T j(t, k) + w \cdot (2P(k) - P(k-1) - P(k+1)), \quad k = \overline{1, T}. \quad (26)$$

Дифференцируя далее соотношения (21) – (25) по $P(l)$, $l = 1, 2, \dots, T$, и обозначая элементы матриц-производных

$$M^D(t, k, l) = \partial^2 Q^D(t) / \partial P(k) \partial P(l), \quad M^Z(t, k, l) = \partial^2 Q^Z(t) / \partial P(k) \partial P(l),$$

$$M^S(t, k, l) = \partial^2 Q^S(t) / \partial P(k) \partial P(l), \quad M(t, k, l) = \partial^2 Q(t) / \partial P(k) \partial P(l),$$

$$j(t, k, l) = \partial^2 J(t) / \partial P(k) \partial P(l),$$

получим

$$M^D(t, k, l) = 0; \quad (27)$$

$$M^Z(t - \tau, k, l) = \begin{cases} M^D(t - \tau, k, l) - M(t - \tau, k, l), & \alpha(t) > 0, \\ 0, & \alpha(t) \leq 0; \end{cases} \quad (28)$$

$$M^S(t, k, l) = M(t, k, l) + \begin{cases} -M(t - \tau, k, l), & (\alpha(t) > 0) \wedge (\gamma(t) < 0), \\ -M(t, k, l), & ((\alpha(t) > 0) \wedge (\gamma(t) > 0)) \vee \\ & \vee ((\alpha(t) \leq 0) \wedge (\beta(t) < 0)), \\ 0, & (\alpha(t) \leq 0) \wedge (\beta(t) > 0); \end{cases} \quad (29)$$

$$M(t + 1, k, l) = \begin{cases} M(t, k, l) - M(t - \tau, k, l), & (\alpha(t) > 0) \wedge (\gamma(t) > 0), \\ M(t, k, l), & (\alpha(t) \leq 0) \wedge (\beta(t) < 0), \\ 0, & ((\alpha(t) > 0) \wedge (\gamma(t) < 0)) \vee \\ & \vee ((\alpha(t) \leq 0) \wedge (\beta(t) > 0)); \end{cases} \quad (30)$$

$$j(t, k, l) = P(t)M^S(t, k, l) + q^S(t, k)\delta_{tl} + q^S(t, l)\delta_{tk} - \\ - M^Z(t - \tau, k, l)P_1 - M(t, k, l)P_2. \quad (31)$$

Значения всех функций M^D , M^Z , M^S , M при первом аргументе $(t, t - \tau, t + 1)$, принимающем значения от $-\tau$ до 0, равны 0.

Дифференцируя (26) по P с учётом (27) – (31), получим

$$H(k, l) = - \sum_{t=1}^T j(t, k, l) + w(2\delta_{kl} - \delta_{k-1, l} - \delta_{k+1, l}), \quad k, l = \overline{1, T}. \quad (32)$$

Как видим, и градиент, и гессиан целевой функции испытывают скачки первого рода в точках изменений знаков функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$. Это приводит к трудностям использования при решении задач оптимизации градиентных методов. Так, например, метод Ньютона пошаговой параболической аппроксимации целевой функции приводит (в отсутствие ограничений на переменные) к итерационному алгоритму вида

$$x_{v+1} = x_v - \frac{1}{v+1} H_v^{-1} \nabla J_v, \quad v = 0, 1, 2, \dots, \quad (33)$$

где x_v – T -вектор-столбец решения задачи оптимизации J по P (без ограничений типа неравенств) на v -м шаге итерационного процесса при произвольно заданном начальном условии x_0 . Наличие скачков градиента и гессиана вблизи точки минимума делают проблематичной сходимость градиентного алгоритма (33).

Альтернативой градиентным методам ньютоновского типа является квазиньютоновский алгоритм оптимизации с численным определением градиента целевой функции и пересчётом на каждой итерации v её гессиана (точнее, его аппроксимации) по BFGS-формуле Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно [3]:

$$H_{v+1} = H_v + \frac{d_v d_v^T}{d_v^T s_v} - \frac{H_v^T s_v^T s_v H_v}{s_v^T H_v s_v}, \quad H_0 = I, \quad (34)$$

где I – единичная диагональная матрица,

$$s_v = x_{v+1} - x_v, \quad d_v = \nabla J_{v+1} - \nabla J_v, \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

Алгоритм реализован, например, в системе программирования Matlab функцией `fmincon`, учитывающей линейные и нелинейные ограничения типа неравенств и равенств.

Используем эту реализацию квазиньютоновского алгоритма для решения рассматриваемых здесь задач оптимизации. Оказалось, что, несмотря на наличие изломов целевых функций (14) и (15), этот алгоритм даёт лучшее решение рассматриваемых задач оптимизации по сравнению с другими градиентными алгоритмами, в том числе ньютоновским, обладая хорошей сходимостью и малым разбросом решений при случайном выборе начальных условий x_0 .

На рис. 1 – 7 в качестве примера приведена динамика всех переменных, описывающих поведение рынка при оптимальном управлении ценой товара. Расчеты проводились при $w = 50$ («мягкие» ограничения для инерционности рынка, графики слева), $u_{\min} = -0,8$, $u_{\max} = 0,125$ («жесткие» ограничения инерционности, графики справа), $Q_m = 4$, $a = 0,4$, $T = 100$, $P_0 = 7$, $P_1 = 1$, $P_2 = 0,1$, $P_{\min} = P_1 + P_2$, $P_{\max} = Q_m/a$, $P^* = 5,5$, $Q_0 = 0$ и $\tau = 0, 20, 40, 60$. Границы «жестких» ограничений выбраны из условия их примерного соответствия размаху управлений при «мягких» ограничениях (на рис.1 слева и справа).

На рис. 1 изображено оптимальное управление $u(t)$ при различных запаздываниях τ при «мягких» (слева) и «жестких» (справа) ограничениях инерционности. Как видно из сравнения графиков слева и справа, при «жестких» ограничениях инерционности пики скорости изменения цены возрастают. При этом замечен высокочастотный шум ошибок работы алгоритма оптимизации, который сопровождается, как видно из графиков на следующих рисунках, вычисление всех переменных задачи оптимизации.

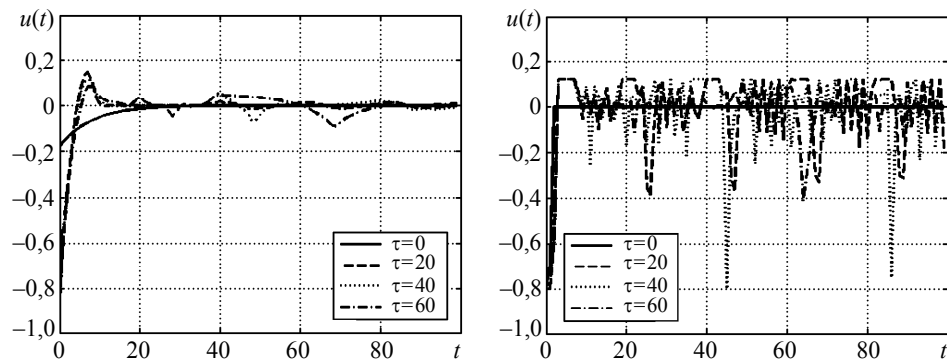


Рис. 1. Оптимальное управление (скорость изменения цены) $u(t)$ при различных τ при «мягких» (слева) и «жестких» (справа) ограничениях инерционности

На рис. 2 изображена оптимальная динамика цены товара при различных запаздываниях и при различных типах ограничений инерционности. Видно, что при «мягких» ограничениях инерционности (рис. 2, слева) колебания цены, возникающие вследствие запаздывания поставок товара на рынок, – плавные, тогда как при «жестких» ограничениях (рис. 2, справа) – резкие, пилообразные. Кроме того, при «мягких» ограничениях инерционности амплитуда колебаний цены заметно меньше (рис. 2, слева), чем при «жестких» ограничениях (рис. 2, справа). Эта более высокая демпфирующая способность «мягких» ограничений объясняется, по-видимому, их интегральным характером.

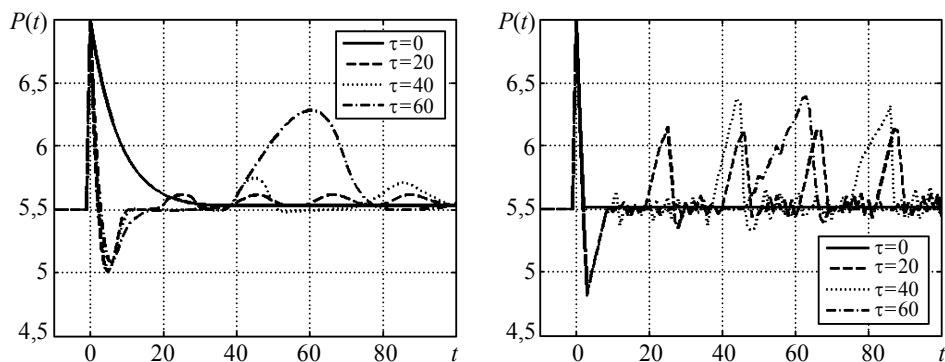


Рис. 2. Оптимальная цена $P(t)$ при различных τ при «мягких» (слева) и «жёстких» (справа) ограничениях инерционности

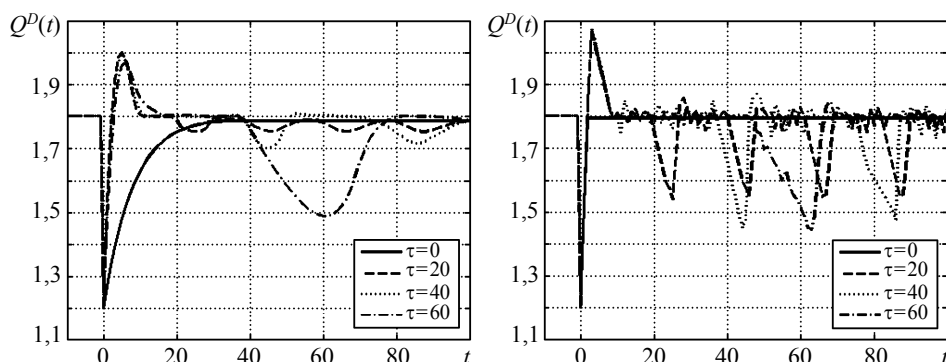


Рис. 3. Спрос $Q^D(t)$ при оптимальном управлении и различных τ при «мягких» (слева) и «жёстких» (справа) ограничениях инерционности

Вообще из-за запаздывания поставок товара на рынок во всех переменных, характеризующих состояние рынка в последовательные дискретные моменты времени, возникают постепенно затухающие колебания, период которых приблизительно равен запаздыванию τ .

Природа этих колебаний легко объяснима. Пусть до некоторого (нулевого) момента времени рынок находился в состоянии равновесия. Пусть в нулевой момент времени цена товара по какой-либо причине резко изменилась (для определённости, подскочила, как в нашем примере). Если в этот момент времени происходит заказ товара для поставки его на рынок, то он происходит, таким образом, в момент высокого уровня цены (выше равновесного), когда спрос на товар в соответствии с линией спроса низок (ниже равновесного). Поэтому (в соответствии со сбалансированной стратегией поставок) в этот момент заказывается относительно небольшой объём товара. В течение некоторого времени в связи с низким спросом цена товара падает. Падение цены приводит к росту спроса. Через время запаздывания τ заказанный в небольшом объёме товар поступает на рынок. К этому времени запас товара уменьшается или исчезает вовсе и возникает товарный дефицит. Сбалансированная стратегия поставок требует значительного увеличения объёма заказа. Товарный дефицит приводит, в соответствии с критерием оптимальности, к росту цены. Это, в свою очередь, приводит к снижению спроса на

товар. Через время τ заказанный в большом объеме товар поступает на рынок, приводя в условиях сниженного спроса к затовариванию рынка. Это опять приводит к низкому заказу поставки товара. Ситуация, таким образом, периодически повторяется. Постепенно амплитуда колебаний цены уменьшается, и рынок приближается к равновесному состоянию.

Как видно из сравнения рис. 3 с рис. 2, спрос ведёт себя противоположно цене в соответствии с линией спроса (3). Обратим внимание, что скорости роста цены и падения спроса при «мягких» ограничениях примерно равны соответственно скоростям падения цены и роста спроса, тогда как при «жестких» ограничениях скорости роста цены и падения спроса ниже, чем скорости падения цены и роста спроса. Это связано с выбором в расчётной модели рынка $|u_{\min}| > |u_{\max}|$. При выборе $|u_{\min}| < |u_{\max}|$ характер роста и падения этих величин будет противоположным. Для реального рынка такая ситуация более реалистична: рынок, как уже отмечалось, более охотно поднимает цену, чем снижает.

На рис. 4, 5, 6 представлены объёмы закупок, продаж и остатков товара на складе в последовательные моменты дискретного времени при оптимальном управлении и различных запаздываниях при «мягких» (слева) и «жестких» (справа) ограничениях инерционности. Видны резкие изменения объёмов закупок, продаж и остатков товара после скачкообразного подъёма цен с последующим

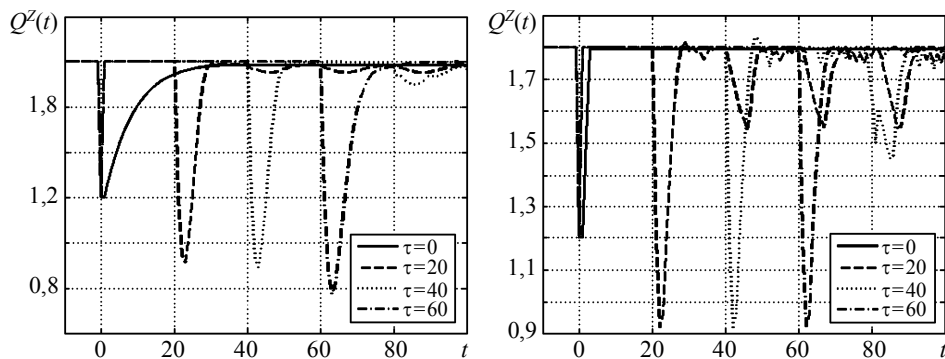


Рис. 4. Объем закупок $Q^Z(t)$ при оптимальном управлении и различных τ при «мягких» (слева) и «жестких» (справа) ограничениях инерционности

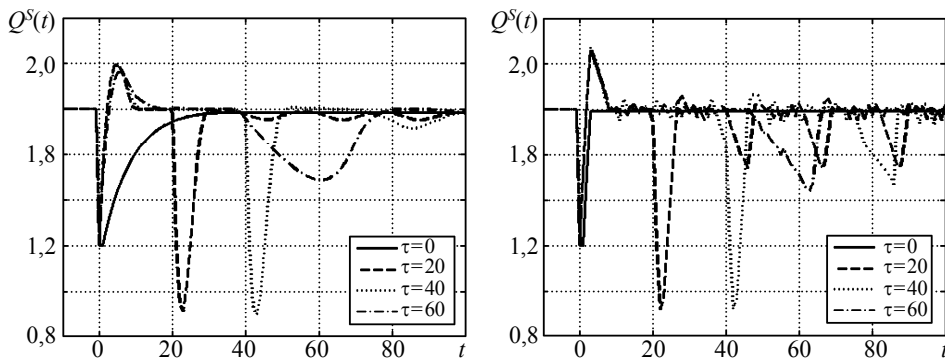


Рис. 5. Объем продаж $Q^S(t)$ при оптимальном управлении и различных τ при «мягких» (слева) и «жестких» (справа) ограничениях инерционности

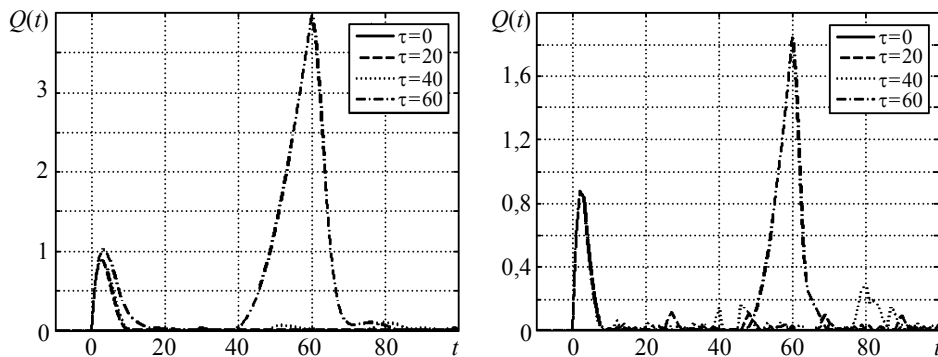


Рис. 6. Остаток товара на складе $Q(t)$ при оптимальном управлении и различных τ при «мягких» (слева) и «жестких» (справа) ограничениях инерционности

апериодическим (в отсутствие запаздывания) и колебательным (при наличии запаздываний) переходом к равновесным уровням.

На рис. 7 представлена динамика прибыли продавца после скачкообразного подъема цены при оптимальном управлении ценой и различных запаздываниях τ при «мягких» (слева) и «жестких» (справа) ограничениях инерционности. Видны быстро затухающие провалы прибыли, обусловленные запаздываниями поставок товара на рынок. Вне этих провалов прибыль максимальна и равна равновесной прибыли J^* .

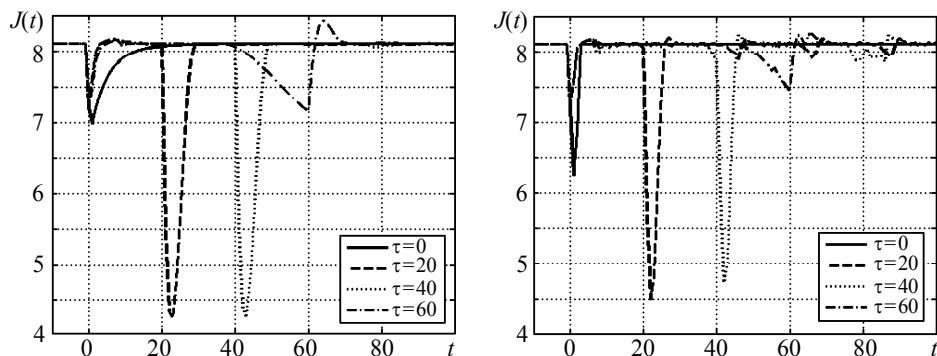


Рис. 7. Прибыль продавца $J(t)$ при оптимальном управлении и различных τ при «мягких» (слева) и «жестких» (справа) ограничениях инерционности

Заключение

В результате исследования предложенной и рассмотренной в данной статье математической модели рынка одного товара как инерционной самоуправляемой динамической системы с запаздыванием при сбалансированной стратегии поставки товара на рынок, направленной на экономное удовлетворение покупательского спроса, можно сделать следующие основные выводы.

1. Сбалансированная стратегия поставки товара на рынок, определяющая объём заказа товара в зависимости от соотношения объёмов покупательского спроса и наличного запаса товара на складе в момент заказа товара, приводит к рестриктивному (стесняемому ограничениями типа неравенств) математическому описа-

нию динамики переменных, определяющих состояние рынка в последовательные моменты дискретного времени.

2. Прибыль продавца при такой стратегии оказывается непрерывной функцией вектора цен в последовательные моменты дискретного времени, почти всюду дифференцируемой в векторном пространстве цен, за исключением точек излома, определяемых соотношением между спросом на товар и наличным запасом товара на складе.

3. Задача оптимального управления ценой товара по критерию максимума суммарной прибыли продавца при сбалансированной стратегии поставки товара на рынок оказывается задачей оптимизации непрерывной негладкой функции со скачками градиента и гессиана, что затрудняет применение для её решения градиентных методов ньютоновского типа.

4. Инерционность рынка, ограничивающая скорость изменения цены товара, моделируется либо с помощью квадратичной штрафной функции для скорости изменений цены («мягкие» ограничения инерционности), либо заданием интервала допустимых значений скорости изменений цены («жёсткие» ограничения инерционности). Последние позволяют моделировать ценовой гистерезис.

5. С помощью квазиньютоновского алгоритма с пересчётом аппроксимации гессиана по формуле Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно (BFGS) в условиях ограничений инерционности, а также ограничений на минимальное и максимальное значения цены товара, исследована оптимальная динамика цены товара и всех переменных, определяющих поведение рынка в последовательные моменты дискретного времени. Показано, что после вывода рынка из состояния равновесия возникает аperiодический (в отсутствие запаздывания поставок заказанного товара на рынок) или затухающий периодический (при наличии запаздывания) переходный процесс, постепенно снова приводящий рынок в состояние равновесия. Численно исследован характер переходного процесса для всех переменных состояния рынка при различных запаздываниях при «мягких» и «жёстких» ограничениях инерционности рынка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Морозов В.И. Микроэлектроника: в 2 т. / под общ. ред. В.М. Гальперина. СПб.: Экономическая школа, 2002. Т.1. 349 с.
2. Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок как оптимально самоуправляемая инерционная система с запаздыванием // Вестник ТГУ. УВТИ. 2008. № 3(4). С. 5 –18.
3. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.

Поддубный Василий Васильевич
Романович Ольга Владимировна
Томский государственный университет
E-mail: pvv@inet.tsu.ru; mail: njkm@ngs.ru

Поступила в редакцию 10 августа 2009 г.