ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2009 Управление, вычислительная техника и информатика № 4(9)

УДК 519.2:53.05

Ф.Ф. Идрисов, А.Ф. Терпугов

ОЦЕНКА МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ИСКАЖЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ. ЧАСТЬ 1. ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА

Рассматривается задача оценки параметров многомерной динамической системы в условиях искаженных наблюдений. Выбирается и обосновывается алгоритм ее решения, исследуется его сходимость.

Ключевые слова: *система*, *процесс*, *ошибки*, *алгоритм*, *сходимость.*

Пусть x_t есть вектор размерности m, то есть

$$x_t = \left[x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, ..., x_t^{(m)} \right]^T, \tag{1}$$

измеряемый в дискретные моменты времени $t = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Будем считать, что процесс изменения x_t со временем представляет собой авторегрессионный процесс первого порядка, то есть

$$x_{t+1} = Bx_t + n_{t+1}, \tag{2}$$

где $B = [b_{ip}]$ – матрица размерности $m \times m$ и $n_t = \left[n_t^{(1)}, n_t^{(2)}, ..., n_t^{(m)} \right]^T$ – случайный вектор размерности m. В дальнейшем будем полагать, что

1. Все собственные числа матрицы B по модулю меньше единицы.
2. Векторы n_t независимы по t и одинаково распределены, причем $M\{n_t\} = 0$, $M\{n_t n_t^T\} = Rn$.

Плотность вероятностей компонента n_t будем считать четной функцией, так что все моменты величин n_t нечетного порядка равны нулю. Моменты четвертого порядка будем считать ограниченными.

При наблюдениях над процессом x_t возможны различные неумышленные или умышленные искажения этого процесса, то есть аномальные ошибки. Наблюдаемый процесс y_t будем определять следующим образом:

$$y_t = x_t + \gamma_t z_t, \tag{3}$$

где γ_t – последовательность независимых случайных величин, принимающих значение 0 с вероятностью $1 - \varepsilon$ и 1 с вероятностью ε, а z_t – независимый по t случайный вектор с $M\{z_t\} = 0$ и $M\{z_t z_t^T\} = Rz$. Второе слагаемое в (3) определяет наличие аномальных наблюдений, которые появляются с вероятностью ε (далее всюду будем считать, что $\varepsilon \ll 1$). Однако элементы ковариационной матрицы Rz будем считать большими (бóльшими, например, чем элементы матрицы Rn или $Rx = M\{x_t x_t^T\}$), так что, несмотря на малость ε, влияние аномальных ошибок в наблюдениях может быть достаточно большим.

1. Кросскорреляционный алгоритм оценки

При наличии аддитивных ошибок для оценки параметров авторегрессионной модели первого порядка $x_{t+1} = \rho x_t + n_{t+1}$, где x_t – одномерная величина, известны так называемые оценки Юла – Уолкера, где оценка $\hat{\rho}$ параметра ρ находится из условия

$$\sum_{t=3}^{N}(y_t-\hat{\rho}y_{t-1})y_{t-2}=0\,. \qquad (4)$$

На случай векторной авторегрессионной модели эти оценки были обобщены в [1, 2], где оценку $\hat{B}$ матрицы B предложено искать из условия

$$\frac{1}{N-3}\sum_{t=3}^{N}(y_t-\hat{B}y_{t-1})y_{t-2}^T=0\,, \qquad (5)$$

позволяющего получить оценку B в явном виде

$$\hat{B}=\left(\sum_{t=3}^{N}y_ty_{t-2}^T\right)\left(\sum_{t=3}^{N}y_{t-1}y_{t-2}^T\right)^{(-1)}. \qquad (6)$$

В работе [1] была доказана сходимость оценки $\hat{B}$ к B почти наверное при $N\to\infty$, но не была вычислена ковариационная матрица элементов $\hat{b}_{ip}$ матрицы $\hat{B}$. Это было проделано в работе [3] и там же была показана неустойчивость алгоритма к искаженным наблюдениям. Но при этом целый ряд вопросов был освещен без достаточной строгости. Восполним этот пробел.

В компонентах уравнение (5) запишем в виде системы уравнений:

$$\frac{1}{N-3}\sum_{t=3}^{N}\left(y_t^{(i)}-\sum_{p=1}^{m}\hat{b}_{ip}y_{t-1}^{(p)}\right)y_{t-2}^{(j)}=0\,, \qquad (7)$$

где $i,j=\overline{1,m}$. Представим $\hat{b}_{ij}$ в виде $\hat{b}_{ij}=b_{ij}+(\hat{b}_{ij}-b_{ij})$ и, обозначая $\hat{b}_{ij}-b_{ij}=\Delta b_{ij}$, получим

$$\frac{1}{N-3}\sum_{t=3}^{N}\left(y_t^{(i)}-\sum_{p=1}^{m}b_{ip}y_{t-1}^{(p)}\right)y_{t-2}^{(j)}-\frac{1}{N-3}\sum_{r=1}^{m}\Delta b_{ir}\sum_{t=3}^{N}y_{t-1}^{(r)}y_{t-2}^{(j)}=0\,. \qquad (8)$$

Используя теорему Биркгофа, можно показать, что при $N\to\infty$ имеет место следующая сходимость почти наверное

$$\frac{1}{N-3}\sum_{t=3}^{N}y_{t-1}^{(r)}y_{t-2}^{(j)}\xrightarrow{\text{пн}}M\{y_{t-1}^{(r)}y_{t-2}^{(j)}\}\,. \qquad (9)$$

Используя представление (3), получим

$$M\{y_{t-1}^{(r)}y_{t-2}^{(j)}\}=M\left\{(x_{t-1}^{(r)}+\gamma_{t-1}z_{t-1}^{(r)})(x_{t-2}^{(j)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(j)})\right\}=M\{x_{t-1}^{(r)}x_{t-2}^{(j)}\}\,, \qquad (10)$$

где учтено, что z_{t-1} и z_{t-2} независимы и имеют нулевое математическое ожидание. Далее, так как

$$x_{t-1}^{(r)}=\sum_{p=1}^{m}b_{rp}x_{t-2}^{(p)}+n_{t-1}^{(r)}\,,$$

то
$$M\left\{x_{t-1}^{(r)}x_{t-2}^{(j)}\right\}=\sum_{p=1}^{m}b_{rp}M\left\{x_{t-2}^{(p)}x_{t-2}^{(j)}\right\}=\sum_{p=1}^{m}b_{rp}(Rx)_{pj}=(B\cdot Rx)_{rj}\,,$$

где $Rx=M\{x_tx_t^T\}$ – ковариационная матрица процесса x_t.

Обозначая через $\vec{b}_i$ вектор $[b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im}]^T$ и через $\vec{\xi}_i$ вектор с компонентами

$$\xi_{ij} = \frac{1}{N-3}\sum_{t=3}^{N}\left(y_t^{(i)} - \sum_{p=1}^{m} b_{ip}\, y_{t-1}^{(p)}\right) y_{t-2}^{(j)}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{11}$$

получим, что при $N\to\infty$ величины Δb_{ij} определяются из системы уравнений

$$\sum_{r=1}^{m} \Delta b_{ir}\,(B\cdot Rx)_{rj} = \xi_{ij}, \quad j = \overline{1,m},$$

которая может быть переписана в виде одного матричного уравнения

$$(B\cdot Rx)^T\,\Delta\vec{b}_i = \vec{\xi}_i\,, \tag{12}$$

откуда

$$\Delta\vec{b}_i = [(B\cdot Rx)^T]^{(-1)}\vec{\xi}_i = (B^{(-1)})^T (Rx^{(-1)})^T\,\vec{\xi}_i\,. \tag{13}$$

Отсюда следует, что

$$M\{\Delta\vec{b}_i \Delta\vec{b}_j^T\} = (B^{(-1)})^T (Rx^{(-1)})^T M\{\vec{\xi}_i \vec{\xi}_j^T\}(Rx^{(-1)})(B^{(-1)})\,, \tag{14}$$

и поэтому для получения окончательного результата необходимо вычислить $M\{\vec{\xi}_i \vec{\xi}_j^T\}$.

Имеем

$$\xi_{ip} = \frac{1}{N-3}\sum_{t=3}^{N}\left(y_t^{(i)} - \sum_{r=1}^{m} b_{ir}\, y_{t-1}^{(r)}\right) y_{t-2}^{(p)} =$$

$$= \frac{1}{N-3}\sum_{t=3}^{N}\left(n_t^{(i)} + \gamma_t z_t^{(i)} - \sum_{r=1}^{m} b_{ir}\, z_{t-1}^{(r)}\right)\left(x_{t-2}^{(p)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(p)}\right). \tag{15}$$

Представляя аналогичным образом ξ_{iq}, получим, что

$$(N-3)\xi_{ip}\xi_{jq} = \frac{1}{N-3}\sum_{t,l=3}^{N}\left(n_t^{(i)} + \gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{r=1}^{m} b_{ir}\, z_{t-1}^{(r)}\right)\left(x_{t-2}^{(p)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(p)}\right)\times$$

$$\times\left(n_l^{(j)} + \gamma_l z_l^{(j)} - \gamma_{l-1}\sum_{s=1}^{m} b_{js}\, z_{l-1}^{(s)}\right)\left(x_{l-2}^{(q)} + \gamma_{l-2} z_{l-2}^{(q)}\right). \tag{16}$$

При вычислении математического ожидания от этой двойной суммы появляются несколько типов слагаемых

а) слагаемые с $t = l$. Они имеют вид

$$\left[n_t^{(i)} n_t^{(j)} + \gamma_t z_t^{(i)} z_t^{(j)} - \gamma_{t-1}(Bz_{t-1})_i (Bz_{t-1})_j\right]\cdot\left[x_{t-2}^{(p)} x_{t-2}^{(q)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(p)} z_{t-2}^{(q)}\right] + \cdots\,,$$

где многоточием обозначены те слагаемые, которые после усреднения дают ноль. Усредняя, получим, что это слагаемое будет иметь вид

$$\left[Rn + \varepsilon(Rz + B\cdot Rz\cdot B^T\right]_{ij}\cdot\left[Rx + \varepsilon Rz\right]_{pq}\,, \tag{17}$$

где $Rn = M\{n_t\, n_t^T\}$, $Rz = M\{z_t\, z_t^T\}$ – ковариационные матрицы процессов n_t и z_t.

б) $l = t + 1$. После раскрытия скобок слагаемое приобретает вид

$$-\gamma_t \sum_{s=1}^{m} b_{js} z_t^{(s)} z_t^{(i)}\left(x_{t-2}^{(p)} x_{t-1}^{(q)}\right) + \dots,$$

где также многоточием обозначены слагаемые, дающие после усреднения ноль.

Так как

$$x_{t-1}^{(q)} = \sum_{n=1}^{m} b_{qn} x_{t-2}^{(n)} + n_{t-1}^{(q)},$$

то, усредняя, получим

$$-\varepsilon(B \cdot Rz)_{ij} \cdot (B \cdot Rx)_{qp}. \tag{18}$$

в) $l = t - 1$. После раскрытия скобок, соответствующее слагаемое приобретает вид

$$-\gamma_{t-1} \sum_{r=1}^{m} b_{ir} z_{t-1}^{(r)} z_{t-1}^{(j)} x_{t-2}^{(p)} x_{t-3}^{(q)} + \ldots,$$

и после усреднения оно равно

$$-\varepsilon(B \cdot Rz)_{ij} \cdot (B \cdot Rx)_{qp}. \tag{19}$$

Легко убедиться, что все остальные слагаемые после усреднения дают ноль.

Сводя все вместе, получим, что

$$M\{(N-3)\xi_{ip}\xi_{jq}\} = [Rn + \varepsilon(Rz + B \cdot Rz \cdot B^T)]_{ij} \cdot [Rx + \varepsilon \cdot Rz]_{pq} - \\ - \varepsilon(B \cdot Rz)_{ij} \cdot [(B \cdot Rx)_{pq} + (B \cdot Rx)_{qp}]. \tag{20}$$

Возвращаясь к $M\{\Delta\vec{b}_i \Delta b_j^T\}$, с использованием (14) получим, что

$$(N-3)M\{\Delta\vec{b}_i \Delta b_j^T\} = [Rn + \varepsilon(Rz + B \cdot Rz \cdot B^T)]_{ij} \times \\ \times [(B^{(-1)})^T (Rx^{(-1)})^T (Rx + \varepsilon \cdot Rz)(Rx^{(-1)})(B^{(-1)}) - \\ -\varepsilon(B \cdot Rz)_{ij} (B^{(-1)})^T (Rx^{(-1)})^T \cdot B \cdot Rx \cdot (Rx^{(-1)})(B^{(-1)}) - \\ -\varepsilon(B \cdot Rz)_{ij} (B^{(-1)})^T (Rx^{(-1)})^T \cdot (B \cdot Rx)^T \cdot (Rx^{(-1)})(B^{(-1)})]. \tag{21}$$

Соберем все матрицы $M\{\Delta\vec{b}_i \Delta b_j^T\}$ в блочную матрицу, где матрице $M\{\Delta\vec{b}_i \Delta b_j^T\}$ соответствует (i, j)-й блок. Тогда, обозначая эту матрицу через Rb, можно записать

$$(N-3)Rb \sim [(Rx - B \cdot Rx \cdot B^T) + \varepsilon(Rz + B \cdot Rz \cdot B^T)] \otimes \\ \otimes [(B^{(-1)})^T (Rx^{(-1)})^T (Rx + \varepsilon Rz)(Rx^{(-1)})(B^{(-1)})] - \\ -\varepsilon(B \cdot Rz) \otimes [(B^{(-1)})^T (Rx^{(-1)})^T] - \varepsilon(Rz^T \cdot B^T) \otimes [Rx^{(-1)} B^{(-1)}], \tag{22}$$

где знак $\otimes$ означает кронекеровское произведение матриц и где учтено, что $Rn = Rx - B \cdot Rx \cdot B^T$. Эта формула и позволяет вычислить все ковариации оценок $\hat{b}_{ip}$ параметров динамической системы b_{ip}.

Основным в этой формуле является то, что величины ε и Rz всегда идут в комбинации εRz. Поэтому, несмотря на малость ε, из-за большой величины элементов матрицы Rz, произведение εRz также может быть велико. Это говорит о неустойчивости данного алгоритма к наличию искажений наблюдаемых данных в системе.

2. Знаковый алгоритм оценки

Итак, изложенный выше алгоритм оказался чувствительным к искажениям данных о динамической системе из-за наличия в ковариационной матрице Rb слагаемых вида εRz и поэтому не может быть рекомендован в подобной ситуации.

Существуют различные подходы к оценке параметров при наличии существенных искажений в наблюдениях за динамической системой. Пожалуй, наиболее часто применяют метод наименьших модулей. В таком случае, оценку параметров системы находят из условия

$$\sum_{t=2}^{N}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \mid y_t^{(i)} - (\hat{B}y_{t-1})_i \mid \to \min_{\hat{B}} .$$

Однако исследование подобных оценок показывает, что искажение наблюдаемых данных приводит к смещению и оно может быть достаточно велико. Поэтому, на наш взгляд, большой интерес представляет попытка строить конструктивные модификации изложенного выше алгоритма.

Естественными являются следующие варианты [4]:

$$\text{а) } \frac{1}{N-3}\sum_{t=3}^{N}\operatorname{sign}\left(y_t^{(i)} - \sum_{p=1}^{m}\hat{b}_{ip}y_{t-1}^{(p)}\right)y_{t-2}^{(j)} = 0 ;$$

$$\text{б) } \frac{1}{N-3}\sum_{t=3}^{N}\left(y_t^{(i)} - \sum_{p=1}^{m}\hat{b}_{ip}y_{t-1}^{(p)}\right)\operatorname{sign}(y_{t-2}^{(j)}) = 0 ; \qquad (23)$$

$$\text{в) } \frac{1}{N-3}\sum_{t=3}^{N}\operatorname{sign}\left[\left(y_t^{(i)} - \sum_{p=1}^{m}\hat{b}_{ip}y_{t-1}^{(p)}\right)y_{t-2}^{(j)}\right] = 0 .$$

Здесь $\operatorname{sign}(x)$ – знаковая функция:

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Как показали исследования, только последний алгоритм в (23) приводит к оценкам, устойчивым к искажениям наблюдений. Поэтому далее остановимся на исследовании лишь этого алгоритма.

Прежде всего, решим вопрос о наличии корня $\hat{B} = B$ в уравнении (23) при $N\to\infty$ и его сходимости к этому корню почти наверное. Для этого рассмотрим функции

$$G_{ij}(\hat{B}, B) = M\left\{\operatorname{sign}\left[\left(y_t^{(i)} - \sum_{p=1}^{m}\hat{b}_{ip}y_{t-1}^{(p)}\right)y_{t-2}^{(j)}\right]\right\} . \qquad (24)$$

В силу того, что пара (x_t, z_t) образует марковский случайный процесс, и в силу ограниченности функций вида $\operatorname{sign}(\cdot)$, из теоремы Биркгофа следует, что при $N\to\infty$ имеет место следующая сходимость почти наверное:

$$\frac{1}{N-3}\sum_{t=3}^{N}\operatorname{sign}\left[\left(y_t^{(i)} - \sum_{p=1}^{m}\hat{b}_{ip}y_{t-1}^{(p)}\right)y_{t-2}^{(j)}\right] \underset{N\to\infty}{\overset{\text{пн}}{\to}} G_{ij}(\hat{B}, B) . \qquad (25)$$

Используя представления для y_t и x_t:

$$y_t = x_t + \gamma_t z_t , \; x_t = B\, x_{t-1} + n_t,$$

получим

$$G_{ij}(\hat{B},B) = M\left\{\operatorname{sign}\left[\left(n_t^{(i)} - \sum_{p=1}^{m}\Delta b_{ip}x_{t-1}^{(p)} + \left(\gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{p=1}^{m}\hat{b}_{ip}z_{t-1}^{(p)}\right)\right)\cdot(x_{t-2}^{(j)} - \gamma_{t-2}z_{t-2}^{(j)})\right]\right\}.$$

Усредняя по величине $n_t^{(i)}$, получим

$$G_{ij}(\hat{B},B) = M_z\left\{\left[1-2F_i\left(\sum_{p=1}^{m}\Delta b_{ip}x_{t-1}^{(p)} + \gamma_t z_t^{(i)} - \sum_{q=1}^{m}\hat{b}_{iq}\gamma_{t-1}z_{t-1}^{(q)}\right)\right]\cdot\operatorname{sign}\left(x_{t-2}^{(j)} + \gamma_{t-2}z_{t-2}^{(j)}\right)\right\}, \quad (26)$$

где $F_i(\cdot)$ – функция распределения величины $n_t^{(i)}$ и усреднение остается лишь по процессам z_t и γ_t.

Если положить $\Delta b_{ip} = \hat{b}_{ip} - b_{ip} = 0$, то получим

$$G_{ij}(\hat{B},B) = M_z\left\{\left[1-2F_i\left(\gamma_t z_t^{(i)} - \sum_{q=1}^{m}b_{iq}\gamma_{t-1}z_{t-1}^{(q)}\right)\right]\cdot\operatorname{sign}\left(x_{t-2}^{(j)} + \gamma_{t-2}z_{t-2}^{(j)}\right)\right\}. \quad (27)$$

Ранее мы предположили, что плотности вероятностей величин $n_t^{(i)}$ и $z_t^{(i)}$, а следовательно, и величин $x_t^{(i)}$ являются четными функциями. Отсюда следует, что

$$G_{ij}(B,B) = 0, \quad (28)$$

то есть система уравнений

$$G_{ij}(\hat{B},B) = 0, \quad i,j = \overline{1,m} \quad (29)$$

имеет корень $\hat{B} = B$.

Рассмотрим теперь вопрос о единственности этого корня. Прежде всего отметим, что система (29), состоящая из m^2 уравнений, распадается на m систем вида

$$G_{ij}(\hat{\vec{b}}_i,\vec{b}_i) = 0, \quad j = \overline{1,m}, \quad (30)$$

где $\vec{b}_i = [b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{im}]^T$, то есть каждая из подсистем определяет оценки вектора $\vec{b}_i$.

Для решения вопроса о единственности корня рассмотрим матрицу D_i с элементами

$$D_{jl}^{(i)} = \left.\frac{\partial G_{ij}(\hat{\vec{b}}_i,\vec{b})}{\partial \hat{b}_{il}}\right|_{\hat{b}_{il}=b_{il}}. \quad (31)$$

Допустим, что в наблюдаемых данных искажений нет, то есть ε = 0. Тогда

$$G_{ij}(\hat{\vec{b}}_i,\vec{b}_i) = M_z\left\{\left[1-2F_i\left(\sum_{p=1}^{m}\Delta b_{ip}x_{t-1}^{(p)}\right)\right]\cdot\operatorname{sign}\left(x_{t-2}^{(j)}\right)\right\}; \quad (32)$$

$$D_{jl}^{(i)} = \left.\frac{\partial G_{ij}(\hat{\vec{b}}_i,\vec{b})}{\partial \hat{b}_{il}}\right|_{\hat{b}_{il}=b_{il}} = -2p_i(0)M\left\{x_{t-1}^{(l)}\cdot\operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)})\right\}, \quad (33)$$

где $p_i(\cdot)$ – плотность вероятностей компонент $n_t^{(i)}$.

Вычислим $M\left\{ x_{t-1}^{(l)} \cdot \operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)}) \right\}$. Так как

$$x_{t-1}^{(l)} = \sum_{r=1}^{m} b_{lr} x_{t-2}^{(r)} + n_{t-1}^{(l)},$$

то
$$M\left\{ x_{t-1}^{(l)} \cdot \operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)}) \right\} = \sum_{r=1}^{m} b_{lr} M\left\{ x_{t-2}^{(r)} \cdot \operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)}) \right\}.$$

Ограничимся случаем, когда n_t и, следовательно, x_t совместно нормальны. Пусть $Rx = M\{x_t, x_t^T\}$. Тогда, по свойствам нормального распределения,

$$M\left\{ x_{t-2}^{(r)} \mid x_{t-2}^{(j)} \right\} = \frac{Rx_{rj}}{Rx_{jj}} x_{t-2}^{(j)}. \tag{34}$$

Далее, легко можно получить, что

$$M\left\{ x_{t-2}^{(j)} \cdot \operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)}) \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{Rx_{jj}}.$$

Поэтому

$$D_{jl}^{(i)} = -2p_i(0)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{Rx_{jj}}} \sum_{r=1}^{m} b_{lr} Rx_{rj} = -2p_i(0)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(B \cdot Rx)_{lj}}{\sqrt{Rx_{jj}}}, \tag{35}$$

то есть матрица $D^{(i)}$ имеет вид

$$D^{(i)} = -2p_i(0)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{(B \cdot Rx)_{11}}{\sqrt{Rx_{11}}} & \frac{(B \cdot Rx)_{12}}{\sqrt{Rx_{22}}} & \cdots & \frac{(B \cdot Rx)_{1m}}{\sqrt{Rx_{mm}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(B \cdot Rx)_{m1}}{\sqrt{Rx_{11}}} & \frac{(B \cdot Rx)_{m2}}{\sqrt{Rx_{22}}} & \cdots & \frac{(B \cdot Rx)_{mm}}{\sqrt{Rx_{mm}}} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Вычисляя детерминант этой матрицы, получим

$$\det D^{(i)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{m/2} \cdot (-2p_i(0))^m \cdot \frac{\det B \cdot \det Rx}{\sqrt{Rx_{11} \cdot Rx_{22} \cdot \ldots \cdot Rx_{mm}}}. \tag{37}$$

Если $\det B \neq 0$, $\det Rx \neq 0$ и $Rx_{ii} \neq 0$ $\forall i = \overline{1, m}$, то матрица $D^{(i)}$ является неособенной. Отсюда следует (из теории неявных функций), что в окрестности точки $\vec{b}_i$ система уравнений (30) имеет единственное решение, то есть корень $\hat{\vec{b}}_i = \vec{b}_i$ единственный.

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$. В силу непрерывной зависимости $D_{jl}^{(i)}$ от ε, по крайней мере при малых ε, также будет $\det D^{(i)} \neq 0$. Поэтому при малых ε единственность корня сохраняется.

В силу непрерывности функций $G_{ij}(\hat{B}, B)$ отсюда следует, что, если брать начальное приближение в достаточно малой окрестности B, то при $N \to \infty$ будет иметь место сходимость $\hat{b}_{ip}$ к b_{ip} почти наверное.

Заключение

Искаженные наблюдения (даже если они маловероятны) могут оказать значительное влияние на результаты оценивания параметров динамической системы. Известные алгоритмы решения подобной задачи в таких случаях либо неустойчивы, либо приводят к смещенным оценкам. Приведенные в работе исследования показали, что знаковый алгоритм оценивания параметров динамической системы является наиболее приемлемым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов В.А.* Оценивание параметров линейных динамических систем с неопределенными наблюдениями // Автоматика и телемеханика. 1984. № 4. С. 84 – 90.
2. *Идрисов Ф.Ф.*, *Рустамов М.Р.* О корректности постановки задачи прогноза в экономике // Вестник ТГПУ. 2006. Вып. 6(57). С. 100 – 103.
3. *Идрисов Ф.Ф.* Оценка параметров многомерной авторегрессионной модели при наличии аномальных ошибок // Изв. вузов. Физика. 1993. № 12. С. 86.
4. *Китаева А.В.* Дис. … канд. физ.-мат. наук. Томск, 1989.

Идрисов Фарит Фатыхович
Томский государственный педагогический университет
E-mail: farit.idrisov@mail.ru
Поступила в редакцию 9 сентября 2009 г.