

УДК 519.2

Ю.В. Малинковский, А.Н. Старовойтов, А.Р. Еремина**ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СЕТЕЙ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ
СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ, РАЗНОТИПНЫМИ ЗАЯВКАМИ
И ДИСЦИПЛИНОЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ LCFS PR**

В работе рассматриваются открытые сети массового обслуживания с много-режимными стратегиями, в которых циркулируют заявки нескольких типов. Входной поток – простейший. Время пребывания в каждом режиме имеет показательное распределение, а количество работы по обслуживанию поступающих в узел заявок – произвольное распределение с конечным математическим ожиданием. Устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сети по отношению к функциональной форме распределений величин работ, требующихся на обслуживание заявок.

Ключевые слова: *сеть массового обслуживания, стационарное распределение, инвариантность.*

Большую важность для практики представляет изучение сетей массового обслуживания, в которых обслуживающие приборы в узлах могут выходить из строя, так как любые технические средства в процессе их эксплуатации могут отказывать, требуя восстановления (ремонта или замены). Здесь возможны несколько различных постановок: обслуживающий прибор может полностью выходить из строя при обслуживании требования либо при обслуживании требования и в свободном состоянии, либо частично выходить из строя, при этом он продолжает работать, но с меньшей производительностью. Так, в работе [1] были введены в рассмотрение сети массового обслуживания с многорежимными стратегиями, в узлах которых приборы могут функционировать в различных режимах. Каждый режим обслуживания характеризуется своими показателями, то есть при переходе прибора в более “худший” режим его производительность уменьшается. Прибор может частично терять свою работоспособность, как при обслуживании требования, так и в незанятом состоянии. В [2] была установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний относительно функционального вида распределения количества работы, необходимого для обслуживания требования, когда дисциплиной обслуживания является «обобщенное разделение процессора со случайным выбором канала в узле». В [3] для открытой сети с многорежимными стратегиями, несколькими типами заявок и дисциплиной обслуживания LCFS PR было найдено стационарное распределение в мультипликативной форме. Однако в [3] считалось, что время обслуживания и время пребывания прибора в каждом режиме имеют экспоненциальное распределение. На практике указанные предположения чаще всего не выполняются. Поэтому в данной работе рассматриваются аналогичные сети, в которых величина работы по обслуживанию заявки имеет произвольный закон распределения.

Устанавливается, что стационарное распределение вероятностей состояний указанных сетей не зависит от вида законов распределения величин работ по обслуживанию заявок в узлах, если фиксированы первые моменты этих законов.

1. Постановка задачи

В сети массового обслуживания, состоящей из N однолинейных узлов, циркулируют заявки M типов. Поступающий поток заявок – простейший с интенсивностью λ , а каждая заявка входного потока независимо от других заявок направляется в l -й узел и становится заявкой u -го типа с вероятностью $p_{0(l,u)}$. После обслуживания в l -м узле заявка u -го типа независимо от других заявок мгновенно направляется в k -й узел и становится заявкой v -го типа с вероятностью $p_{(l,u)(k,v)}$, а с вероятностью $p_{(l,u)0}$ покидает сеть, где

$$\sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M p_{0(l,u)} = 1; \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M p_{(l,u)(k,v)} + p_{(l,u)0} = 1; l, k = \overline{1, N}; u, v = \overline{1, M}.$$

В каждом из N узлов находится единственный прибор, который может работать в $r_l + 1$ режимах, $l = \overline{1, N}$. Дисциплина обслуживания – LCFS PR (заявка, поступающая в l -й узел, вытесняет заявку с прибора и начинает обслуживаться, а вытесненная заявка становится первой в очереди на обслуживание). Таким образом, поступающие в узел заявки имеют абсолютный приоритет. Нумерация заявок в очереди на каждый узел осуществляется от конца очереди к прибору.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$, где состояние l -го узла в момент времени t описывается вектором $x_l(t) = (x_l(t), j_l(t)) = (x_{l1}(t), x_{l2}(t), \dots, x_{l,n(l)}(t), j_l(t))$, $x_{li}(t)$ – тип заявки, стоящей последней в очереди на обслуживание в l -м узле в момент времени t и т.д., $x_{l,n(l)-1}(t)$ – тип заявки, стоящей первой в очереди на обслуживание в l -м узле в момент времени t , $x_{l,n(l)}(t)$ – тип заявки, находящейся на обслуживании в l -м узле в момент времени t , $j_l(t)$ – режим, в котором работает l -й узел в момент времени t , $n(l)$ – общее количество заявок в l -м узле. Тогда процесс $x(t)$ имеет пространство состояний $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$, где $X_l = \{(0, j_l), (x_{l1}, j_l), (x_{l1}, x_{l2}, j_l), (x_{l1}, x_{l2}, x_{l3}, j_l), \dots, x_{lk} = \overline{1, M}, k = 1, 2, \dots, j_l = \overline{0, r_l}\}$.

В качестве основного режима работы обслуживающего прибора полагается режим работы 0. Переход возможен только на соседние режимы.

Время пребывания в основном режиме работы имеет показательное распределение с параметром $v_l(\overline{x_l}, 0)$, после чего прибор переходит в режим 1. Для состояний x_l , у которых $1 \leq j_l \leq r_l - 1$, время пребывания в режиме j_l также имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\phi_l(x_l)$ прибор l -го узла переходит в $j_l - 1$ режим, а с интенсивностью $v_l(x_l)$ – в $j_l + 1$ режим. Время пребывания в последнем r_l -м режиме имеет показательное распределение с параметром $\phi_l(\overline{x_l}, r_l)$, после чего прибор переходит в режим $r_l - 1$. Во время переключения прибора с одного режима на другой число заявок в узле не меняется.

Для упрощения записи введём в рассмотрение операторы:

$$T_u^+(\overline{x_l}) = T_u^+(x_{l1}, \dots, x_{l,n(l)}) = (x_{l1}, \dots, x_{l,n(l)}, u),$$

$$T_l^-(\overline{x_l}) = T_l^-(x_{l1}, \dots, x_{l,n(l)}) = (x_{l1}, \dots, x_{l,n(l)-1}),$$

$$T_{(l,u)}^+(x) = T_{(l,u)}^+(x_1, \dots, x_N) = (z_1, \dots, z_N), \text{ где } z_k = x_k \text{ при } k \neq l, z_l = (T_u^+(\overline{x_l}), j_l),$$

$$T_l^-(x) = T_l^-(x_1, \dots, x_N) = (z_1, \dots, z_N), \text{ где } z_k = x_k \text{ при } k \neq l, z_l = (T_l^-(\overline{x_l}), j_l),$$

$$R_l^{j_l+1}(x) = R_l^{j_l+1}(x_1, \dots, x_N) = (z_1, \dots, z_N), \text{ где } z_k = x_k \text{ при } k \neq l, z_l = (\overline{x_l}, j_l + 1),$$

$$R_l^{j_l-1}(x) = R_l^{j_l-1}(x_1, \dots, x_N) = (z_1, \dots, z_N), \text{ где } z_k = x_k \text{ при } k \neq l, z_l = (\overline{x_l}, j_l - 1).$$

Если в момент времени t состояние l -го узла представляет собой вектор $(\overline{x_l}, j_l)$ и сразу после указанного момента в этот узел поступает заявка u -го типа, которая начинает немедленно обслуживаться, то количество работы по её обслуживанию является случайной величиной $\eta_l(T_u^+(\overline{x_l}))$ с функцией распределения $B_l(T_u^+(\overline{x_l}), z)$ и математическим ожиданием $\tau_l(T_u^+(\overline{x_l})) < \infty$, $B_l(T_u^+(\overline{x_l}), 0) = 0$.

Если в момент времени t состояние l -го узла есть вектор $(\overline{x_l}, j_l)$, то обслуживание ведётся со скоростью $\alpha_l(\overline{x_l}, j_l)$, то есть зависит от состояния узла.

Переход прибора из режима обслуживания 0 в режим обслуживания 1 можно трактовать как частичную потерю работоспособности прибора, влекущую уменьшение скорости обслуживания с $\alpha_l(\overline{x_l}, 0)$ на $\alpha_l(\overline{x_l}, 1)$.

Полагаем, что матрица $(p_{(l,u)(k,v)})$, $u, v = \overline{1, M}$, $l, k = \overline{0, N}$, $p_{(0,u)(0,v)} = 0$, неприводима. Тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_{lu} = p_{0(l,u)} + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M \varepsilon_{kv} p_{(k,v)(l,u)}, \quad l = \overline{1, N}; \quad u = \overline{1, M}, \quad (1)$$

имеет единственное положительное решение ε_{lu} , $l = \overline{1, N}$; $u = \overline{1, M}$.

Через $\psi_{lk}(t)$ обозначим количество работы, которое осталось выполнить с момента t до завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k -й позиции в l -м узле, $\psi(t) = (\psi_{11}(t), \psi_{12}(t), \dots, \psi_{lN}(t))$, $(l = \overline{1, N})$. Из вышесказанного следует, что

$$\frac{d\psi_{l,k}(t)}{dt} = -\alpha_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lk}, j_l).$$

В общем случае процесс $x(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (x(t), \psi(t))$, добавляя к $x(t)$ непрерывную компоненту $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t))$.

Под $\{P(x), x \in X\}$ будем понимать стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Функции

$$F(x, y) = F(x, y_{11}, y_{12}, y_{1,n(1)}; y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2,n(2)}; \dots; y_{N1}, y_{N2}, \dots, y_{N,n(N)}) = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{x(t) = x; \psi_{11}(t) < y_{11}, \psi_{12}(t) < y_{12}; \dots; \psi_{l,n(l)}(t) < y_{l,n(l)}, l = \overline{1, N}\}.$$

будем называть стационарными функциями распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$.

2. Марковский случай

В [3] рассмотрен случай, когда $B_l(x_l, z) = 1 - \exp\{-\mu_l(x_l)z\}$ ($z > 0$) с единичной скоростью обслуживания $\alpha_l(x_l) = 1$, то есть $B_l(x_l, z)$ является функцией экспоненциально распределенного времени обслуживания. Тогда $x(t)$ – марковский про-

цесс с непрерывным временем. В указанной работе показано, что при выполнении условий

$$v_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \mu_l(\bar{x}_l, j_l) \varphi_l(T^-(\bar{x}_l), j_l) = v_l(T^-(\bar{x}_l), j_l - 1) \mu_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \varphi_l(\bar{x}_l, j_l), \quad (2)$$

$$l = \overline{1, N}, \quad j_l = \overline{1, r_l}, \quad \text{для } x_{l, n(l)}, \quad n(l) \geq 1,$$

$$\sum_{x \in X} q(x) \prod_{l=1}^N \left[\lambda^{n(l)} \prod_{s=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{ls}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ls}, j_l)} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} \right] < \infty, \quad (3)$$

где

$$q(x) = \lambda + \sum_{l=1}^N \left(\mu_l^{-1}(\bar{x}_l, j_l) + v_l(\bar{x}_l, j_l) + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l) \right),$$

процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет мультипликативную форму

$$P(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \times \dots \times p_N(x_N),$$

где

$$p_l(\bar{x}_l, j_l) = \lambda^{n(l)} \prod_{s=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{ls}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ls}, j_l)} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} p_l(0, 0),$$

$\varepsilon_{l, x_{ls}}$ находятся из (1), а

$$p_l(0, 0) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{r_l} \lambda^i \prod_{s=1}^i \frac{\varepsilon_{l, x_{ls}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ls}, j)} \prod_{k=1}^j \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} \right)^{-1}.$$

2. Основной результат

Лемма. Если $(\varepsilon_{lu}, l = \overline{1, N}; u = \overline{1, M})$ является решением уравнения трафика (1), то справедливо следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M \varepsilon_{kv} p_{(k,v)0} = 1. \quad (4)$$

Доказательство. Просуммируем уравнение трафика (1) по u , затем по l и поменяем в правой части порядок суммирования:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \varepsilon_{lu} &= \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M p_{0(l,u)} + \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M \varepsilon_{kv} p_{(k,v)(l,u)}, \\ \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \varepsilon_{lu} &= 1 + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M \varepsilon_{kv} \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M p_{(k,v)(l,u)}, \\ \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \varepsilon_{lu} &= 1 + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M \varepsilon_{kv} (1 - p_{(k,v)0}). \end{aligned}$$

Вычитая из обеих частей $\sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \varepsilon_{lu}$, получим равенство (4), которое является

обобщением следствия уравнения трафика для классической сети Джексона на случай многих типов заявок. Лемма доказана.

Для описанных выше открытых сетей, в случае, когда количество работы по обслуживанию поступившей в узел заявки имеет произвольную функцию распределения $B_l(\bar{x}_l, z)$, имеет место

Теорема. Процесс $\zeta(t)$ эргодичен, если выполняются соотношения

$$v_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) \phi_l(T^-(\bar{x}_l), j_l) = v_l(T^-(\bar{x}_l), j_l - 1) \alpha_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \phi_l(\bar{x}_l, j_l), \quad (5)$$

$$l = \overline{1, N}, \quad j_l = \overline{1, r_l}, \quad \text{для } x_{l, n(l)}, \quad n(l) \geq 1;$$

$$\sum_{x \in X} q(x) \prod_{l=1}^N \left[\lambda^{n(l)} \prod_{s=1}^{n(l)} \varepsilon_{l, x_{ls}} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\phi_l(0, k)} \prod_{s=1}^{n(l)} \frac{\tau_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ls})}{\alpha_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ls}, j_l)} \right] < \infty, \quad (6)$$

где
$$q(x) = \lambda + \sum_{l=1}^N \left(\tau_l^{-1}(\bar{x}_l) \cdot \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) + v_l(\bar{x}_l, j_l) + \phi_l(\bar{x}_l, j_l) \right).$$

При этом стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(x, y)$ определяются по формулам

$$F(x, y) = \prod_{l=1}^N p_l(x_l) \prod_{s=1}^{n(l)} \tau_l^{-1}(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ls}) \int_0^{y_{l,s}} (1 - B_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ls}, u)) du, \quad (7)$$

где

$$p_l(\bar{x}_l, j_l) = \lambda^{n(l)} \prod_{s=1}^{n(l)} \varepsilon_{l, x_{ls}} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\phi_l(0, k)} \prod_{s=1}^{n(l)} \frac{\tau_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ls})}{\alpha_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ls}, j_l)} p_l(0, 0); \quad (8)$$

$\varepsilon_{l, x_{ls}}$ находятся из (1), а

$$p_l(0, 0) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{r_l} \lambda^i \prod_{s=1}^i \varepsilon_{l, x_{ls}} \prod_{k=1}^j \frac{v_l(0, k-1)}{\phi_l(0, k)} \prod_{s=1}^{n(l)} \frac{\tau_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ls})}{\alpha_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ls}, j)} \right)^{-1}. \quad (9)$$

Доказательство. Пусть выполнены условия (2), (3), то есть в случае, когда $x(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение $x(t)$. Тогда и в общем случае при выполнении условий (5), (6) существует стационарное эргодическое распределение процесса $\zeta(t)$, так как $\zeta(t)$ получается из $x(t)$ добавлением непрерывных компонент, а $\mu_l^{-1}(\bar{x}_l, j_l) = \tau_l(\bar{x}_l) \alpha_l^{-1}(\bar{x}_l, j_l)$. Строгое доказательство этого факта может быть проведено, если учесть, что процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Действительно, функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в состоянии «0» (в каждом узле сети нет заявок и прибор работает в нулевом режиме), и периодов занятости сети (в противном случае). Далее доказательство сводится к применению предельной теоремы Смита для регенерирующих процессов [4, с.41].

Для $F(x, y)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left(\lambda + \sum_{l=1}^N \left(v_l(\bar{x}_l, j_l) + \phi_l(\bar{x}_l, j_l) \right) \right) F(x, y) = \\ & = \sum_{l=1}^N \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y_{l, n(l)}} - \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y_{l, n(l)}} \right)_{y_{l, n(l)}=0} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_l(T_u^+(\bar{x}_l), j_l) p_{(l,u)0} \left(\frac{\partial F(T_{(l,u)}^+(x), y)}{\partial y_{l,n(l)+1}} \right)_{y_{l,n(l)+1}=0} + \\
& + \lambda \sum_{l=1}^N p_{0(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) F(T_l^-(x), y) + \\
& + \sum_{l=1}^N \sum_{s=1, s \neq l}^N \sum_{u=1}^M \alpha_s(T_u^+(\bar{x}_s, j_s) p_{(s,u)(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) \left(\frac{\partial F(T_{(s,u)}^+(T_l^-(x)), y)}{\partial y_{s,n(s)+1}} \right)_{y_{s,n(s)+1}=0} + \\
& + \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_l(T_u^+(T^-(\bar{x}_l)), j_l) p_{(l,u)(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) \left(\frac{\partial F(T_{(l,u)}^+(T_l^-(x)), y)}{\partial y_{l,n(l)}} \right)_{y_{l,n(l)}=0} + \\
& + \sum_{l=1}^N v_l(\bar{x}_l, j_l - 1) F(R_l^{j_l-1}(x), y) + \sum_{l=1}^N \phi_l(\bar{x}_l, j_l + 1) F(R_l^{j_l+1}(x), y), \quad x \in X. \quad (10)
\end{aligned}$$

В полученных уравнениях предполагается, что если аргумент функции $F(x, y)$ не принадлежит фазовому пространству, то есть $x \notin X$, то $F(x, y) = 0$.

Разобьем данную систему на уравнения локального баланса следующим образом:

$$\begin{aligned}
\lambda F(x, y) &= \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_l(T_u^+(\bar{x}_l), j_l) p_{(l,u)0} \left(\frac{\partial F(T_{(l,u)}^+(x), y)}{\partial y_{l,n(l)+1}} \right)_{y_{l,n(l)+1}=0}, \\
& \sum_{l=1}^N \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) \left(\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y_{l,n(l)}} \right)_{y_{l,n(l)}=0} - \frac{\partial F(x, y)}{\partial y_{l,n(l)}} \right) = \\
& = \lambda p_{0(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) F(T_l^-(x), y) + \\
& + \sum_{s=1, s \neq l}^N \sum_{u=1}^M \alpha_s(T_u^+(\bar{x}_s, j_s) p_{(s,u)(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) \left(\frac{\partial F(T_{(s,u)}^+(T_l^-(x)), y)}{\partial y_{s,n(s)+1}} \right)_{y_{s,n(s)+1}=0} + \\
& + \sum_{u=1}^M \alpha_l(T_u^+(T^-(\bar{x}_l)), j_l) p_{(l,u)(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) \left(\frac{\partial F(T_{(l,u)}^+(T_l^-(x)), y)}{\partial y_{l,n(l)}} \right)_{y_{l,n(l)}=0}; \quad (12) \\
& (v_l(\bar{x}_l, j_l) + \phi_l(\bar{x}_l, j_l)) F(x, y) = \\
& = v_l(\bar{x}_l, j_l - 1) F(R_l^{j_l-1}(x), y) + \phi_l(\bar{x}_l, j_l + 1) F(R_l^{j_l+1}(x), y). \quad (13)
\end{aligned}$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(x, y)$, определенные формулами (7) – (9), являются решением уравнений (11) – (13), а следовательно, удовлетворяют системе уравнений (10). Действительно, подставляя (7) в (11), деля обе части полученного соотношения на $\lambda F(x, y)$, получим следствие уравнения трафика (4). Подставляя (7) в (12), приводя подобные слагаемые, получим урав-

нение трафика (1). И, наконец, подставляя (7) в (13) и учитывая (5), получим тождество. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы с учётом равенства $P(x)=F(x,+\infty)$ вытекает следующее утверждение.

Следствие. Если выполняются соотношения (5), (6), то процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение $\{P(x), x \in X\}$ не зависит от функционального вида распределения $B_l(\bar{x}_l, z)$ и имеет вид

$$P(x) = p_1(x_1)p_2(x_2) \times \dots \times p_N(x_N),$$

где $p_l(x_l)$ находятся по формулам (8), (9).

Заключение

В настоящей работе установлена независимость стационарного распределения вероятностей состояний открытых сетей с многорежимными стратегиями обслуживания и заявками разных типов от вида законов распределения величин работ, требующихся на обслуживание заявок в узлах, когда дисциплиной обслуживания является LCFS PR (абсолютный приоритет поступающего требования с дообслуживанием). При этом показано, что стационарное распределение сети имеет форму произведения, где каждый множитель – стационарное распределение изолированного узла, помещенного в фиктивную окружающую среду с пуассоновским потоком. Этот результат является обобщением работы [3], а именно, снимается ограничение на экспоненциально распределенное время обслуживания заявки в узле. Следует отметить, что для описанной сети естественным образом возникает задача установления инвариантности стационарного распределения относительно функции распределения времени пребывания прибора в различных режимах, а также – задача исследования стационарного распределения сети, когда и время обслуживания, и время пребывания прибора в режимах имеют произвольные распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский Ю.В., Нуеман А.Ю.* Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания // Весці НАН Беларусі. 2001. № 3. С. 129 – 134.
2. *Старовойтов А.Н.* Кусочно-линейные сети с многорежимными стратегиями обслуживания // Автоматика и телемеханика. 2008. № 6. С. 107 – 116.
3. *Летунович Ю.Е.* Стационарное распределение состояний открытой неоднородной сети с многорежимными стратегиями и немедленным обслуживанием // Современные информационные технологии: Сб. науч. статей: в 2 ч. Ч. 2. Гродно: Гродненский государственный университет им. Я.Купалы, 2008. С. 97 – 99.
4. *Ивницкий В.А.* Теория сетей массового обслуживания. М.: Физматлит, 2004. 772 с.

Малинковский Юрий Владимирович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины.

E-mail: Malinkovsky@gsu.by

Старовойтов Александр Николаевич

Белорусский государственный университет транспорта.

E-mail: Astarovoytov@tut.by

Еремينا Александра Рафаэловна.

Гродненский государственный университет им. Я.Купалы.

E-mail: AleksandraE@mail.ru

Поступила в редакцию 10 апреля 2009 г.