

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.872

В.А. Вавилов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ СЕТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА В ДИФфуЗИОННОЙ СРЕДЕ ПРИ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОМ ВХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ

Предлагаются математические модели неустойчивых сетей множественного доступа с учётом влияния диффузионной среды на источник повторных вызовов (ИПВ), параметры обслуживания и входящего потока. Исследуются асимптотические средние характеристики рассматриваемых сетей, величины отклонения нормированного числа заявок в ИПВ от их асимптотического среднего. Проводится глобальная аппроксимация и исследуется плотность распределения вероятностей значений процесса изменения числа заявок в системе.

Ключевые слова: компьютерные сети, протоколы случайного множественного доступа, случайная среда, источник повторных вызовов.

Вопросы повышения эффективности функционирования сетей связи не могут быть решены без учёта влияния неконтролируемых внешних воздействий или случайной среды. Одним из инструментов изучения процессов передачи данных в сетях является математическое моделирование. Исследования такого рода позволяют оценить параметры функционирования действующих сетей связи и выработать рекомендации по разработке новых, более производительных сетей передачи данных.

Предметом исследования данной работы являются математические модели компьютерных сетей в виде систем массового обслуживания (СМО), в которых изменение параметров происходит под воздействием внешнего фактора – случайной среды.

Влияние случайных внешних воздействий может непосредственно отражаться на интенсивности обслуживания заявок на приборе, на интенсивности обращения заявок из источника повторных вызовов (ИПВ), на интенсивности входящего потока. Первая ситуация рассмотрена в ряде работ, в том числе в трудах [1 – 4], ситуация второго рода – в работах [5 – 11]. В этих трудах в качестве математических моделей случайной среды предлагаются: однородная цепь Маркова с непрерывным временем, диффузионный процесс, полумарковский процесс.

В работе [12] представлены исследования математических моделей сетей множественного доступа с учётом влияния случайной среды на ИПВ, интенсивность обслуживания и входящего потока, при этом случайная среда представлена однородной цепью Маркова с непрерывным временем.

Научная новизна данной работы заключается в изучении влияния диффузионной среды на ИПВ, интенсивность обслуживания и входящего потока на функционирование неустойчивых сетей случайного множественного доступа.

1. Математическая модель

В данной работе в качестве математической модели случайной среды представим диффузионный процесс [13, 14], определяемый уравнением

$$ds(t) = \alpha(s)dt + \beta(s)dw(t),$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, и будем полагать, что воздействие случайной среды сказывается на продолжительности передачи сообщений по каналу, на интенсивности обращения заявок из источника повторных вызовов (ИПВ), на характеристиках входящего потока сообщений.

Итак, рассмотрим математическую модель сети случайного множественного доступа с оповещением о конфликте в виде однолинейной системы массового обслуживания (СМО), на вход которой поступает дважды стохастический пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda = \lambda(s)$. Данный поток управляется случайной средой, математической моделью которой и является диффузионный процесс, описанный выше. Вероятность поступления нового требования на прибор за бесконечно малый промежуток времени Δt равна $\lambda(s)\Delta t + o(\Delta t)$.

Прибор этой СМО может находиться в одном из трех состояний: $k = 0$, если он свободен; $k = 1$, если он занят обслуживанием заявки; $k = 2$, если на приборе реализуется этап оповещения о конфликте. Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает немедленно обслуживаться. Продолжительность обслуживания заявки на приборе при условии, что случайная среда находится в состоянии s , имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu(s)$. Вероятность окончания успешного обслуживания заявки на приборе за бесконечно малый промежуток времени Δt равна $\mu(s)\Delta t + o(\Delta t)$. Если в течение обслуживания этой заявки другие требования на прибор не поступают, то исходная заявка по завершении обслуживания покидает систему. Если во время обслуживания одной заявки поступает другая, то возникает конфликт. От этого момента начинается этап оповещения о конфликте.

Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на этапе оповещения о конфликте, переходят в ИПВ. Влияние случайной среды на ИПВ определяется зависимостью интенсивности γ обращения заявок из ИПВ от состояний s случайной среды, то есть $\gamma = \gamma(s)$. Вероятность обращения заявок на прибор из ИПВ за бесконечно малый промежуток времени Δt равна $\gamma(s)\Delta t + o(\Delta t)$. Число заявок в ИПВ обозначим i .

Длины интервалов оповещения о конфликте также имеют экспоненциальное распределение с параметром $1/a$, где a – средняя продолжительность этих интервалов.

В силу свойств приведенной математической модели, трехмерный случайный процесс $\{k(t), i(t), s(t)\}$ изменения во времени состояний $\{k(t), i(t)\}$ математической модели сети связи и состояний $\{s(t)\}$ математической модели случайной среды является марковским процессом [13, 14].

Обозначим $P(k(t) = k, i(t) = i, s \leq s(t) < s + ds) / ds = P_k(i, s, t)$.

В любой момент времени должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_k(i, s, t) ds = 1.$$

Теорема 1. Распределение вероятностей $P_k(i, s, t)$ удовлетворяет прямой системе дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(i, s, t)}{\partial t} + (\lambda(s) + i\gamma(s))P_0(i, s, t) &= \mu(s)P_1(i, s, t) + \frac{1}{a}P_2(i, s, t) - \\ &- \frac{\partial}{\partial s} \{ \alpha(s)P_0(i, s, t) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ \beta^2(s)P_0(i, s, t) \}, \\ \frac{\partial P_1(i, s, t)}{\partial t} + (\lambda(s) + i\gamma(s) + \mu(s))P_1(i, s, t) &= \lambda(s)P_0(i, s, t) + (i+1)\gamma(s)P_0(i+1, s, t) - \\ &- \frac{\partial}{\partial s} \{ \alpha(s)P_1(i, s, t) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ \beta^2(s)P_1(i, s, t) \}, \\ \frac{\partial P_2(i, s, t)}{\partial t} + \left(\lambda(s) + \frac{1}{a} \right) P_2(i, s, t) &= \lambda(s)P_2(i-1, s, t) + \lambda(s)P_1(i-2, s, t) + \\ &+ (i-1)\gamma(s)P_1(i-1, s, t) - \frac{\partial}{\partial s} \{ \alpha(s)P_2(i, s, t) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ \beta^2(s)P_2(i, s, t) \}. \end{aligned} \quad (1)$$

Доказательство. Известно, что прямая система дифференциальных уравнений Колмогорова является сопряженной к обратной, поэтому вначале составим обратную систему для функционала

$$u_k(i, s, t) = M \{ \varphi(k(T), i(T), s(T)) \mid k(t) = k, i(t) = i, s(t) = s \},$$

где $\varphi(k, i, s)$ – заданная функция трех аргументов, два из которых k и i дискретные, а s непрерывная переменная. Затем запишем сопряженную к ней систему, получим (1).

Для составления обратной системы рассмотрим бесконечно малый интервал времени $(t, t + \Delta t)$.

Будем полагать, что в момент времени t среда находится в состоянии s , то есть $s(t) = s$, а в момент времени $t + \Delta t$ она достигает состояния $s + \Delta s$, то есть $s(t + \Delta t) = s + \Delta s$.

Касательно состояний СМО положим, что в момент времени t канал находится в состоянии k , то есть $k(t) = k$, а число заявок в ИПВ равно i , то есть $i(t) = i$. В момент времени $t + \Delta t$ состояние канала равно k_1 , то есть $k(t + \Delta t) = k_1$, а число заявок в ИПВ равно i_1 , то есть $i(t + \Delta t) = i_1$. В общем случае можно записать

$$\begin{aligned} u_k(i, s, t) &= M \{ M \{ \varphi(k(T), i(T), s(T)) \mid k(t + \Delta t) = k_1, i(t + \Delta t) = i_1, \\ &s(t + \Delta t) = s + \Delta s \} \mid k(t) = k, i(t) = i, s(t) = s \} = \\ &= M \{ u_{k_1}(i_1, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid k(t) = k, i(t) = i, s(t) = s \}. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим частные случаи.

Допустим, что в момент времени t обслуживающий прибор свободен, в ИПВ i требований, то есть система в состоянии $\{0, i\}$. За время Δt в системе могут произойти следующие изменения.

На прибор поступит новая заявка, тогда система перейдет в состояние $\{1, i\}$ – обслуживающий прибор занят, в ИПВ находится i требований. Вероятность этого события равна $\lambda(s)\Delta t + o(\Delta t)$.

Обратится заявка из ИПВ, тогда система перейдет в состояние $\{1, i-1\}$ – обслуживающий прибор занят, в ИПВ содержится $i-1$ требований. Вероятность этого события равна $i\gamma(s)\Delta t + o(\Delta t)$.

Новое требование на прибор не поступит, заявка не обратится из ИПВ, то есть система останется в том же состоянии. Вероятность этого события равна $1 - (\lambda(s) + i\gamma(s))\Delta t + o(\Delta t)$.

Итак, для описанного случая равенство (2) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
 u_0(i, s, t) &= M \{ u_{k_1}(i_1, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid k(t) = 0, i(t) = i, s(t) = s \} = \\
 &= \lambda(s)\Delta t M \{ u_1(i, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid s(t) = s \} + i\gamma(s)\Delta t M \{ u_1(i-1, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid s(t) = s \} + \\
 &\quad + (1 - (\lambda(s) + i\gamma(s))\Delta t) M \{ u_0(i, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid s(t) = s \} + o(\Delta t) = \\
 &= \lambda(s)\Delta t u_1(i, s, t) + i\gamma(s)\Delta t u_1(i-1, s, t) + (1 - (\lambda(s) + i\gamma(s))\Delta t) \times \\
 &\quad \times \left(u_0(i, s, t) + \Delta t \frac{\partial u_0(i, s, t)}{\partial t} + \frac{\partial u_0(i, s, t)}{\partial s} M \{ \Delta s \mid s(t) = s \} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_0(i, s, t)}{\partial s^2} M \{ (\Delta s)^2 \mid s(t) = s \} \right) + o(\Delta t) = \\
 &= \lambda(s)\Delta t u_1(i, s, t) + i\gamma(s)\Delta t u_1(i-1, s, t) + u_0(i, s, t) + \Delta t \frac{\partial u_0(i, s, t)}{\partial t} + \frac{\partial u_0(i, s, t)}{\partial s} \alpha(s)\Delta t + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_0(i, s, t)}{\partial s^2} \beta^2(s)\Delta t - (\lambda(s) + i\gamma(s))\Delta t u_0(i, s, t) + o(\Delta t).
 \end{aligned}$$

Выполнив несложные преобразования, получим

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial u_0(i, s, t)}{\partial t} &= -(\lambda(s) + i\gamma(s))u_0(i, s, t) + \lambda(s)u_1(i, s, t) + i\gamma(s)u_1(i-1, s, t) + \\
 &\quad + \alpha(s)\frac{\partial u_0(i, s, t)}{\partial s} + \frac{\beta^2(s)}{2} \frac{\partial^2 u_0(i, s, t)}{\partial s^2}.
 \end{aligned}$$

Допустим, что в момент времени t прибор занят обслуживанием заявки, в ИПВ находится i требований, то есть система в состоянии $\{1, i\}$. За время Δt в системе могут произойти следующие изменения.

На прибор поступит новая заявка, тогда система перейдет в состояние $\{2, i+2\}$, то есть начнется этап оповещения о конфликте, а две заявки, попавшие в конфликт, перейдут в ИПВ. Вероятность этого события $\lambda(s)\Delta t + o(\Delta t)$.

Обратится заявка из ИПВ, тогда система перейдет в состояние $\{2, i+1\}$, то есть начнется этап оповещения о конфликте и в ИПВ станет $i+1$ заявка. Вероятность этого события равна $i\gamma(s)\Delta t + o(\Delta t)$.

Завершится обслуживание заявки и прибор освободится, тогда система перейдет в состояние $\{0, i\}$. Вероятность этого события равна $\mu(s)\Delta t + o(\Delta t)$.

Новая заявка на прибор не обратится, требование не поступит из ИПВ и обслуживание заявки не завершится, то есть система останется в состоянии $\{1, i\}$. Вероятность события равна $1 - (\lambda(s) + i\gamma(s) + \mu(s))\Delta t + o(\Delta t)$.

Итак, для описанного случая (2) переписывается в виде

$$\begin{aligned} u_1(i, s, t) &= M \left\{ u_{k_1}(i_1, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid k(t) = 1, i(t) = i, s(t) = s \right\} = \\ &= \lambda(s)\Delta t M \left\{ u_2(i + 2, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid s(t) = s \right\} + \\ &+ i\gamma(s)\Delta t M \left\{ u_2(i + 1, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid s(t) = s \right\} + \mu(s)\Delta t M \left\{ u_0(i, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid s(t) = s \right\} + \\ &+ (1 - (\lambda(s) + i\gamma(s) + \mu(s))\Delta t) M \left\{ u_1(i, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid s(t) = s \right\} + o(\Delta t) = \\ &= \lambda(s)\Delta t u_2(i + 2, s, t) + i\gamma(s)\Delta t u_2(i + 1, s, t) + \mu(s)\Delta t u_0(i, s, t) + \\ &+ (1 - (\lambda(s) + i\gamma(s) + \mu(s))\Delta t) \left(u_1(i, s, t) + \Delta t \frac{\partial u_1(i, s, t)}{\partial t} + \frac{\partial u_1(i, s, t)}{\partial s} M \{ \Delta s \mid s(t) = s \} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1(i, s, t)}{\partial s^2} M \{ (\Delta s)^2 \mid s(t) = s \} \right) + o(\Delta t) = \\ &= \lambda(s)\Delta t u_2(i + 2, s, t) + i\gamma(s)\Delta t u_2(i + 1, s, t) + \mu(s)\Delta t u_0(i, s, t) + u_1(i, s, t) + \\ &+ \Delta t \frac{\partial u_1(i, s, t)}{\partial t} + \frac{\partial u_1(i, s, t)}{\partial s} \alpha(s)\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1(i, s, t)}{\partial s^2} \beta^2(s)\Delta t - \\ &- (\lambda(s) + i\gamma(s) + \mu(s))\Delta t u_1(i, s, t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Выполнив несложные преобразования, получим равенство

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_1(i, s, t)}{\partial t} &= -(\lambda(s) + i\gamma(s) + \mu(s))u_1(i, s, t) + \lambda(s)u_2(i + 2, s, t) + i\gamma(s)u_2(i + 1, s, t) + \\ &+ \mu(s)u_0(i, s, t) + \alpha(s)\frac{\partial u_1(i, s, t)}{\partial s} + \frac{\beta^2(s)}{2} \frac{\partial^2 u_1(i, s, t)}{\partial s^2}. \end{aligned}$$

Допустим, что в момент времени t в системе реализуется этап оповещения о конфликте, в ИПВ находится i требований, то есть система в состоянии $\{2, i\}$. За время Δt в системе могут произойти следующие изменения.

На прибор поступит новая заявка, тогда система перейдет в состояние $\{2, i + 1\}$, то есть заявка перейдет в ИПВ, поскольку прибор занят оповещением о конфликте. Вероятность этого события $\lambda(s)\Delta t + o(\Delta t)$.

Завершится этап оповещения о конфликте, тогда система перейдет в состояние $\{0, i\}$, то есть прибор станет свободен, в ИПВ i заявок. Вероятность этого события равна $(1/a)\Delta t + o(\Delta t)$.

Новая заявка на прибор не поступит, этап оповещения о конфликте не закончится, то есть система останется в состоянии $\{2, i\}$. Вероятность этого события равна $1 - (\lambda(s) + (1/a))\Delta t + o(\Delta t)$.

Итак, для описанного случая (2) переписывается в виде

$$u_2(i, s, t) = M \left\{ u_{k_1}(i_1, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid k(t) = 2, i(t) = i, s(t) = s \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda(s) \Delta t M \{ u_2(i+1, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid s(t) = s \} + \frac{1}{a} \Delta t M \{ u_0(i, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid s(t) = s \} + \\
&\quad + \left(1 - \left(\lambda(s) + \frac{1}{a} \right) \right) \Delta t M \{ u_2(i, s + \Delta s, t + \Delta t) \mid s(t) = s \} + o(\Delta t) = \\
&= \lambda(s) \Delta t u_2(i+1, s, t) + \frac{1}{a} \Delta t u_0(i, s, t) + \left(1 - \left(\lambda(s) + \frac{1}{a} \right) \right) \left(u_2(i, s, t) + \Delta t \frac{\partial u_2(i, s, t)}{\partial t} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial u_2(i, s, t)}{\partial s} M \{ \Delta s \mid s(t) = s \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2(i, s, t)}{\partial s^2} M \{ (\Delta s)^2 \mid s(t) = s \} \right) + o(\Delta t) = \\
&= \lambda(s) \Delta t u_2(i+1, s, t) + \frac{1}{a} \Delta t u_0(i, s, t) + u_2(i, s, t) + \Delta t \frac{\partial u_2(i, s, t)}{\partial t} + \\
&\quad + \frac{\partial u_2(i, s, t)}{\partial s} \alpha(s) \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2(i, s, t)}{\partial s^2} \beta^2(s) \Delta t - \left(\lambda(s) + \frac{1}{a} \right) \Delta t u_2(i, s, t) + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

Выполнив несложные преобразования, получим равенство

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial u_2(i, s, t)}{\partial t} &= -\left(\lambda(s) + \frac{1}{a} \right) u_2(i, s, t) + \lambda(s) u_2(i+, s, t) + \frac{1}{a} u_0(i, s, t) + \\
&\quad + \alpha(s) \frac{\partial u_2(i, s, t)}{\partial s} + \frac{\beta^2(s)}{2} \frac{\partial^2 u_2(i, s, t)}{\partial s^2}.
\end{aligned}$$

Итак, запишем получившуюся обратную систему дифференциальных уравнений Колмогорова для функционала $u_k(i, s, t)$ от трехмерного марковского процесса $\{k(t), i(t), s(t)\}$:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial u_0(i, s, t)}{\partial t} &= -(\lambda(s) + i\gamma(s)) u_0(i, s, t) + \lambda(s) u_1(i, s, t) + i\gamma(s) u_1(i-1, s, t) + \\
&\quad + \alpha(s) \frac{\partial u_0(i, s, t)}{\partial s} + \frac{\beta^2(s)}{2} \frac{\partial^2 u_0(i, s, t)}{\partial s^2}, \\
-\frac{\partial u_1(i, s, t)}{\partial t} &= -(\lambda(s) + i\gamma(s) + \mu(s)) u_1(i, s, t) + \lambda(s) u_2(i+2, s, t) + i\gamma(s) u_2(i+1, s, t) + \\
&\quad + \mu(s) u_0(i, s, t) + \alpha(s) \frac{\partial u_1(i, s, t)}{\partial s} + \frac{\beta^2(s)}{2} \frac{\partial^2 u_1(i, s, t)}{\partial s^2}, \\
-\frac{\partial u_2(i, s, t)}{\partial t} &= -\left(\lambda(s) + \frac{1}{a} \right) u_2(i, s, t) + \lambda(s) u_2(i+, s, t) + \frac{1}{a} u_0(i, s, t) + \\
&\quad + \alpha(s) \frac{\partial u_2(i, s, t)}{\partial s} + \frac{\beta^2(s)}{2} \frac{\partial^2 u_2(i, s, t)}{\partial s^2}.
\end{aligned}$$

Сопряженная система для распределения вероятностей этого процесса имеет вид (1) и является прямой системой дифференциальных уравнений Колмогорова, определяющей распределение вероятностей $P_k(i, s, t)$. Теорема доказана.

Представим интенсивность обращения заявок на прибор из ИПВ в виде $\gamma(s) = \gamma\sigma(s)$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(i, s, t)}{\partial t} + (\lambda(s) + i\gamma\sigma(s))P_0(i, s, t) &= \mu(s)P_1(i, s, t) + \frac{1}{a}P_2(i, s, t) - \\ &- \frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)P_0(i, s, t)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)P_0(i, s, t)\}, \\ \frac{\partial P_1(i, s, t)}{\partial t} + (\lambda(s) + i\gamma\sigma(s) + \mu(s))P_1(i, s, t) &= \lambda(s)P_0(i, s, t) + (i+1)\gamma\sigma(s)P_0(i+1, s, t) - \\ &- \frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)P_1(i, s, t)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)P_1(i, s, t)\}, \\ \frac{\partial P_2(i, s, t)}{\partial t} + \left(\lambda(s) + \frac{1}{a}\right)P_2(i, s, t) &= \lambda(s)P_2(i-1, s, t) + \lambda(s)P_1(i-2, s, t) + \\ &+ (i-1)\gamma\sigma(s)P_1(i-1, s, t) - \frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)P_2(i, s, t)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)P_2(i, s, t)\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение $P_k(i, s, t)$ системы (3) достаточно полно определяет функционирование математической модели сети связи и ее вероятностно-временные характеристики, но для нее не существует точных аналитических методов решения, поэтому данную систему будем исследовать модифицированным для нестационарных распределений методом асимптотического анализа [15] в условиях большой задержки $\gamma \rightarrow 0$.

Обозначим

$$\gamma = \varepsilon^2, \quad \varepsilon^2 t = \tau \quad (4)$$

и рассмотрим предельный процесс $x(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2))$, имеющий смысл асимптотического среднего нормированного числа заявок в ИПВ. Покажем, что он является детерминированной функцией.

Рассмотрим также процесс $y(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2) - x(\tau))/\varepsilon)$, который характеризует изменение величин отклонения нормированного числа заявок в ИПВ от их асимптотического среднего и покажем, что он является диффузионным процессом авторегрессии. Процесс изменения состояний канала $k(\tau/\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ является дискретным марковским процессом, независимым от процесса $y(\tau)$.

Используя предельные процессы $x(\tau)$ и $y(\tau)$ для достаточно малых значений параметра ε , рассмотрим процесс $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, который аппроксимирует процесс изменения числа заявок в ИПВ $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$ и покажем, что он является одно-родным диффузионным процессом.

Учитывая обозначения (4), выполним следующие замены в системе (3):

$$\varepsilon^2 i = x + \varepsilon y, \quad \frac{1}{\varepsilon} P_k(i, s, t) = H_k(y, s, \tau, \varepsilon), \quad (5)$$

тогда получим систему вида

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + (\lambda(s) + \sigma(s)(x + \varepsilon y)) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) = \\
& = \mu(s) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{a} H_2(y, s, \tau, \varepsilon) - \\
& - \frac{\partial}{\partial s} \{ \alpha(s) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ \beta^2(s) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) \}, \\
& \varepsilon^2 \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + (\lambda(s) + \sigma(s)(x + \varepsilon y) + \mu(s)) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) = \\
& = \lambda(s) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + \sigma(s)(x + \varepsilon(y + \varepsilon)) H_0(y + \varepsilon, s, \tau, \varepsilon) - \\
& - \frac{\partial}{\partial s} \{ \alpha(s) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ \beta^2(s) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) \}, \\
& \varepsilon^2 \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \left(\lambda(s) + \frac{1}{a} \right) H_2(y, s, \tau, \varepsilon) = \\
& = \lambda(s) H_2(y - \varepsilon, s, \tau, \varepsilon) + \lambda(s) H_1(y - 2\varepsilon, s, \tau, \varepsilon) + \sigma(s)(x + \varepsilon(y - \varepsilon)) H_1(y - \varepsilon, s, \tau, \varepsilon) - \\
& - \frac{\partial}{\partial s} \{ \alpha(s) H_2(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ \beta^2(s) H_2(y, s, \tau, \varepsilon) \}. \quad (6)
\end{aligned}$$

Дальнейшие исследования будем проводить, основываясь на этой системе.

2. Исследование асимптотических средних характеристик

Под асимптотическими средними характеристиками неустойчивых сетей множественного доступа, функционирующих в случайной среде, будем понимать распределение вероятностей $R_k(x)$ состояний k канала и функцию $x = x(\tau)$.

Теорема 2. Асимптотически при $\gamma \rightarrow 0$ распределение вероятностей $R_k(x)$ состояний k канала имеет вид

$$R_0(x) = \frac{\Lambda_1 + \psi_1 x + \varphi}{G(x)}, \quad R_1(x) = \frac{\Lambda_0 + \psi_0 x}{G(x)}, \quad R_2(x) = \frac{a(\Lambda_0 + \psi_0 x)(\Lambda_1 + \psi_1 x)}{G(x)}, \quad (7)$$

где $G(x)$ определяется равенством

$$G(x) = a(\Lambda_0 + \psi_0 x)(\Lambda_1 + \psi_1 x) + (\psi_0 + \psi_1)x + \Lambda_0 + \Lambda_1 + \varphi,$$

в котором a задано, $x = x(\tau)$ – детерминированная функция, определяемая обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$x'(\tau) = -\psi_0 x R_0(x) + \Lambda_2 R_2(x) + (2\Lambda_1 + \psi_1 x) R_1(x), \quad (8)$$

величины φ , ψ_k , Λ_k определяются равенствами (21), а функции $Q_k(x, s)$ определяются решением системы (12) и условием нормировки (13).

Доказательство. В системе (6) перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и, полагая, что существуют конечные пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_k(y, s, \tau, \varepsilon) = H_k(y, s, \tau), \quad (9)$$

получим систему

$$\begin{aligned}
 (\lambda(s) + \sigma(s)x)H_0(y, s, \tau) &= \mu(s)H_1(y, s, \tau) + \frac{1}{a}H_2(y, s, \tau) - \\
 &- \frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)H_0(y, s, \tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)H_0(y, s, \tau)\}, \\
 (\lambda(s) + \sigma(s)x + \mu(s))H_1(y, s, \tau) &= (\lambda(s) + \sigma(s)x)H_0(y, s, \tau) - \\
 &- \frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)H_1(y, s, \tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)H_1(y, s, \tau)\}, \\
 \frac{1}{a}H_2(y, s, \tau) &= (\lambda(s) + \sigma(s)x)H_1(y, s, \tau) - \\
 &- \frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)H_2(y, s, \tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)H_2(y, s, \tau)\}. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Решение $H_k(y, s, \tau)$ системы (10) будем искать в следующем виде:

$$H_k(y, s, \tau) = Q_k(x, s)H(y, \tau), \tag{11}$$

где $H(y, \tau)$ является мультипликативной составляющей решения однородной системы, имеет смысл плотности распределения процесса $y(\tau)$, а $Q_k(x, s)$, имеющая смысл условного совместного распределения вероятностей состояний k канала и s среды при условии $x(\tau) = x$, как следует из (10), определяется системой вида

$$\begin{aligned}
 (\lambda(s) + \sigma(s)x)Q_0(x, s) &= \mu(s)Q_1(x, s) + \frac{1}{a}Q_2(x, s) - \\
 &- \frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)Q_0(x, s)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)Q_0(x, s)\}, \\
 (\lambda(s) + \sigma(s)x + \mu(s))Q_1(x, s) &= (\lambda(s) + \sigma(s)x)Q_0(x, s) - \\
 &- \frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)Q_1(x, s)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)Q_1(x, s)\}, \\
 \frac{1}{a}Q_2(x, s) &= (\lambda(s) + \sigma(s)x)Q_1(x, s) - \frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)Q_2(x, s)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)Q_2(x, s)\} \tag{12}
 \end{aligned}$$

и условием нормировки

$$\sum_{k=0}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} Q_k(x, s) ds = 1. \tag{13}$$

Обозначим

$$\sum_{k=0}^2 Q_k(x, s) = r(s); \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_k(x, s) ds = R_k(x). \tag{15}$$

Здесь $R_k(x)$ – маргинальное распределение вероятностей состояний k канала связи, а $r(s)$ – маргинальное распределение вероятностей состояний s случайной среды. Для этих распределений также должны выполняться условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(s)ds = 1; \quad (16)$$

$$\sum_{k=0}^2 R_k(x) = 1. \quad (17)$$

Сложим по k уравнения системы (12) и с учетом (14) получим уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)r(s)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)r(s)\} = 0, \quad (18)$$

которое совместно с условием нормировки (16) определяет стационарное распределение вероятностей $r(s)$ состояний диффузионной среды.

Уравнение (18) является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Обозначим $\beta^2(s)r(s) = G(s)$.

Понизим порядок уравнения (18) и, положив константу, возникшую в результате интегрирования, равной нулю, будем иметь однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial G(s)}{\partial s} = 2 \frac{\alpha(s)}{\beta^2(s)} G(s).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$G(s) = C \cdot e^{2 \int_{-\infty}^s \frac{\alpha(u)}{\beta^2(u)} du}.$$

С учетом замены получим

$$r(s) = \frac{C}{\beta^2(s)} e^{2 \int_{-\infty}^s \frac{\alpha(u)}{\beta^2(u)} du}. \quad (19)$$

Константу C найдем из условия нормировки (16), тогда стационарное распределение вероятностей $r(s)$ состояний s диффузионной среды примет вид

$$r(s) = \frac{1}{\beta^2(s)} e^{2 \int_{-\infty}^s \frac{\alpha(u)}{\beta^2(u)} du} \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\beta^2(s)} e^{2 \int_{-\infty}^s \frac{\alpha(u)}{\beta^2(u)} du}. \quad (20)$$

Проинтегрируем уравнения системы (12) по s , учтем (15), обозначим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(s) Q_1(x, s) ds &= \varphi R_1(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(s) Q_k(x, s) ds = \psi_k R_k(x), \quad k = 0, 1, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(s) Q_k(x, s) ds &= \Lambda_k R_k(x), \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (21)$$

Положим, что

$$\left(-\alpha(s) Q_k(x, s) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \{ \beta^2(s) Q_k(x, s) \} \right) \bigg|_{s=-\infty}^{+\infty} = 0,$$

тогда система (12) примет вид

$$\begin{aligned}(\Lambda_0 + \psi_0 x)R_0(x) &= \varphi R_1(x) + \frac{1}{a}R_2(x), \\(\Lambda_1 + \psi_1 x + \varphi)R_1(x) &= (\Lambda_0 + \psi_0 x)R_0(x), \\ \frac{1}{a}R_2(x) &= (\Lambda_1 + \psi_1 x)R_1(x).\end{aligned}\quad (22)$$

Система (22) совместно с условием нормировки (17) дает решение вида (7).

Далее покажем, что $x = x(\tau)$ является детерминированной функцией.

В системе (6) функции $H_k(y \pm \varepsilon, s, \tau, \varepsilon)$ разложим в ряд по приращениям аргумента y с точностью до $o(\varepsilon)$, получим

$$\begin{aligned}-\varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + (\lambda(s) + \sigma(s)(x + \varepsilon y))H_0(y, s, \tau, \varepsilon) &= \mu(s)H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \\ + \frac{1}{a}H_2(y, s, \tau, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial s} \{ \alpha(s)H_0(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ \beta^2(s)H_0(y, s, \tau, \varepsilon) \}, \\ -\varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + (\lambda(s) + \sigma(s)(x + \varepsilon y) + \mu(s))H_1(y, s, \tau, \varepsilon) &= \\ = (\lambda(s) + \sigma(s)(x + \varepsilon y))H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + \varepsilon \sigma(s)x \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} - \\ - \frac{\partial}{\partial s} \{ \alpha(s)H_1(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ \beta^2(s)H_1(y, s, \tau, \varepsilon) \} + o(\varepsilon), \\ -\varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \frac{1}{a}H_2(y, s, \tau, \varepsilon) &= (\lambda(s) + \sigma(s)(x + \varepsilon y))H_1(y, s, \tau, \varepsilon) - \\ - \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{ \lambda(s)H_2(y, s, \tau, \varepsilon) + (2\lambda(s) + \sigma(s)x)H_1(y, s, \tau, \varepsilon) \} - \\ - \frac{\partial}{\partial s} \{ \alpha(s)H_2(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ \beta^2(s)H_2(y, s, \tau, \varepsilon) \} + o(\varepsilon).\end{aligned}\quad (23)$$

Все уравнения системы (23) просуммируем по k , проинтегрируем по s и, полагая, что

$$\left(-\alpha(s) \sum_{k=0}^2 H_k(y, s, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \beta^2(s) \sum_{k=0}^2 H_k(y, s, \tau, \varepsilon) \right\} \right) \Big|_{s=-\infty}^{+\infty} = 0, \quad (24)$$

запишем

$$\begin{aligned}-\varepsilon x'(\tau) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sum_{k=0}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(y, s, \tau, \varepsilon) ds \right\} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left\{ x \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(s)H_0(y, s, \tau, \varepsilon) ds - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(s)H_2(y, s, \tau, \varepsilon) ds - \int_{-\infty}^{+\infty} (2\lambda(s) + \sigma(s)x)H_1(y, s, \tau, \varepsilon) ds \right\} + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

Поделим на ε обе части полученного уравнения, выполним предельный переход (9), учтем (11), получим

$$-x'(\tau) \sum_{k=0}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} Q_k(x, s) ds \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} = \left\{ x \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(s) Q_0(x, s) ds - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(s) Q_2(x, s) ds - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} (2\lambda(s) + \sigma(s)x) Q_1(x, s) ds \right\} \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y}.$$

Согласно условию нормировки (13) и обозначению (15), можно записать

$$\{x'(\tau) + \psi_0 x R_0(x) - \Lambda_2 R_2(x) - (2\Lambda_1 + \psi_1 x) R_1(x)\} \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} = 0.$$

Поскольку производная плотности распределения $H(y, \tau)$ не может тождественно равняться нулю, следовательно, функция $x = x(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения вида (8). Теорема доказана.

3. Исследование величин отклонения нормированного числа заявок в источнике повторных вызовов от их асимптотического среднего

Для упрощения дальнейших выкладок обозначим правую часть дифференциального уравнения (8) как $A(x)$, то есть $x'(\tau) = A(x)$, тогда

$$A(x) = -\psi_0 x R_0(x) + \Lambda_2 R_2(x) + (2\Lambda_1 + \psi_1 x) R_1(x). \quad (25)$$

Теорема 3. Асимптотически при $\gamma \rightarrow 0$ случайный процесс $y(\tau)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$dy(\tau) = A'_x(x)y(\tau)d\tau + B(x)dw(\tau), \quad (26)$$

где $w(\tau)$ есть стандартный винеровский процесс, функция $A(x)$ определяется обозначением (25), функция $B(x)$ определяется равенством

$$B^2(x) = x\psi_0(x)R_0(x) + \Lambda_2(x)R_2(x) + (4\Lambda_1(x) + x\psi_1(x))R_1(x) + \\ + 2 \left(x\eta_0(x)h_0^{(1)}(x) - \theta_2(x)h_2^{(1)}(x) - (2\theta_1(x) + x\eta_1(x))h_1^{(1)}(x) + \right. \\ \left. + (-x\psi_0(x)R_0(x) + \Lambda_2(x)R_2(x) + (2\Lambda_1(x) + x\psi_1(x))R_1(x)) \cdot \sum_{k=0}^2 h_k^{(1)}(x) \right), \quad (27)$$

если выражение в правой части больше нуля, здесь параметр a задан, $R_k(x)$ есть распределения (7), величины φ , ψ_k , Λ_k определяются равенствами (21),

$h_k^{(1)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_k^{(1)}(x, s) ds$, $k = 0, 1, 2$, в свою очередь $h_k^{(1)}(x, s)$ — есть решение системы (31), величины $\eta_k(x)$ и $\theta_k(x)$, $k = 1, 2$, определяются обозначениями (38).

Доказательство. Будем искать решение $H_k(y, s, \tau, \varepsilon)$ системы (23) в виде следующего разложения:

$$H_k(y, s, \tau, \varepsilon) = Q_k(x, s)H(y, \tau) + \varepsilon h_k(y, s, \tau) + o(\varepsilon). \quad (28)$$

Прежде всего, отыщем вид функций $h_k(y, s, \tau)$. Перепишем систему (23) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & -(\lambda(s) + \sigma(s)x)H_0(y, s, \tau, \varepsilon) - \varepsilon\sigma(s)yH_0(y, s, \tau, \varepsilon) + \mu(s)H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{a}H_2(y, s, \tau, \varepsilon) - \\
 & -\frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)H_0(y, s, \tau, \varepsilon)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)H_0(y, s, \tau, \varepsilon)\} = -\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y}, \\
 & -(\lambda(s) + \sigma(s)x + \mu(s))H_1(y, s, \tau, \varepsilon) - \varepsilon\sigma(s)yH_1(y, s, \tau, \varepsilon) + (\lambda(s) + \sigma(s)x)H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + \\
 & + \varepsilon\sigma(s)yH_0(y, s, \tau, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)H_1(y, s, \tau, \varepsilon)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)H_1(y, s, \tau, \varepsilon)\} = \\
 & = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\{x'(\tau)H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \sigma(s)xH_0(y, s, \tau, \varepsilon)\} + o(\varepsilon), \\
 & -\frac{1}{a}H_2(y, s, \tau, \varepsilon) + (\lambda(s) + \sigma(s)x)H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \varepsilon\sigma(s)yH_1(y, s, \tau, \varepsilon) - \\
 & -\frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)H_2(y, s, \tau, \varepsilon)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)H_2(y, s, \tau, \varepsilon)\} = \\
 & = \varepsilon(\lambda(s) - x'(\tau))\frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \varepsilon(2\lambda(s) + \sigma(s)x)\frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + o(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Подставим в эту систему разложение (28), учтем (12) и запишем полученную систему, сократив на ε все уравнения, в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & -(\lambda(s) + \sigma(s)x)h_0(y, s, \tau) + \mu(s)h_1(y, s, \tau) + \frac{1}{a}h_2(y, s, \tau) - \frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)h_0(y, s, \tau)\} + \\
 & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)h_0(y, s, \tau)\} = Q_0(x, s)\sigma(s)yH(y, \tau) - x'(\tau)Q_0(x, s)\frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y}, \\
 & -(\lambda(s) + \sigma(s)x + \mu(s))h_1(y, s, \tau) + (\lambda(s) + \sigma(s)x)h_0(y, s, \tau) - \frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)h_1(y, s, \tau)\} + \\
 & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)h_1(y, s, \tau)\} = \sigma(s)(Q_1(x, s) - Q_0(x, s))yH(y, \tau) - \\
 & - (x'(\tau)Q_1(x, s) + \sigma(s)xQ_0(x, s))\frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y}, \\
 & -\frac{1}{a}h_2(y, s, \tau) + (\lambda(s) + \sigma(s)x)h_1(y, s, \tau) - \frac{\partial}{\partial s}\{\alpha(s)h_2(y, s, \tau)\} + \\
 & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\{\beta^2(s)h_2(y, s, \tau)\} = -Q_1(x, s)\sigma(s)yH(y, \tau) + \\
 & + [(\lambda(s) - x'(\tau))Q_2(x, s) + (2\lambda(s) + \sigma(s)x)Q_1(x, s)]\frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y}. \tag{29}
 \end{aligned}$$

Будем искать решение системы (29) в следующем виде:

$$h_k(y, s, \tau) = h_k^{(1)}(x, s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + h_k^{(2)}(x, s) y H(y, \tau). \quad (30)$$

Подставим (30) в (29) и представим систему в виде двух систем

$$\begin{aligned} & -(\lambda(s) + \sigma(s)x)h_0^{(1)}(x, s) + \mu(s)h_1^{(1)}(x, s) + \frac{1}{a}h_2^{(1)}(x, s) - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \alpha(s)h_0^{(1)}(x, s) \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \beta^2(s)h_0^{(1)}(x, s) \right\} = -x'(\tau)Q_0(x, s), \\ & -(\lambda(s) + \sigma(s)x + \mu(s))h_1^{(1)}(x, s) + (\lambda(s) + \sigma(s)x)h_0^{(1)}(x, s) - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \alpha(s)h_1^{(1)}(x, s) \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \beta^2(s)h_1^{(1)}(x, s) \right\} = -x'(\tau)Q_1(x, s) - \sigma(s)xQ_0(x, s), \\ & -\frac{1}{a}h_2^{(1)}(x, s) + (\lambda(s) + \sigma(s)x)h_1^{(1)}(x, s) - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \alpha(s)h_2^{(1)}(x, s) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \beta^2(s)h_2^{(1)}(x, s) \right\} = \\ & = (\lambda(s) - x'(\tau))Q_2(x, s) + (2\lambda(s) + \sigma(s)x)Q_1(x, s) \end{aligned} \quad (31)$$

и

$$\begin{aligned} & -(\lambda(s) + \sigma(s)x)h_0^{(2)}(x, s) + \mu(s)h_1^{(2)}(x, s) + \frac{1}{a}h_2^{(2)}(x, s) - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \alpha(s)h_0^{(2)}(x, s) \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \beta^2(s)h_0^{(2)}(x, s) \right\} = \sigma(s)Q_0(x, s), \\ & -(\lambda(s) + \sigma(s)x + \mu(s))h_1^{(2)}(x, s) + (\lambda(s) + \sigma(s)x)h_0^{(2)}(x, s) - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \alpha(s)h_1^{(2)}(x, s) \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \beta^2(s)h_1^{(2)}(x, s) \right\} = \sigma(s)(Q_1(x, s) - Q_0(x, s)), \\ & -\frac{1}{a}h_2^{(2)}(x, s) + (\lambda(s) + \sigma(s)x)h_1^{(2)}(x, s) - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \alpha(s)h_2^{(2)}(x, s) \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \beta^2(s)h_2^{(2)}(x, s) \right\} = -\sigma(s)Q_1(x, s). \end{aligned} \quad (32)$$

Продифференцируем систему (12) по x , получим

$$\begin{aligned} & -(\lambda(s) + \sigma(s)x) \frac{\partial Q_0(x, s)}{\partial x} + \mu(s) \frac{\partial Q_1(x, s)}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_2(x, s)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \alpha(s) \frac{\partial Q_0(x, s)}{\partial x} \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \beta^2(s) \frac{\partial Q_0(x, s)}{\partial x} \right\} = \sigma(s)Q_0(x, s), \\ & -(\lambda(s) + \sigma(s)x + \mu(s)) \frac{\partial Q_1(x, s)}{\partial x} + (\lambda(s) + \sigma(s)x) \frac{\partial Q_0(x, s)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \alpha(s) \frac{\partial Q_1(x, s)}{\partial x} \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \beta^2(s) \frac{\partial Q_1(x, s)}{\partial x} \right\} = \sigma(s)(Q_1(x, s) - Q_0(x, s)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{a} \frac{\partial Q_2(x, s)}{\partial x} + (\lambda(s) + \sigma(s)x) \frac{\partial Q_1(x, s)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \alpha(s) \frac{\partial Q_2(x, s)}{\partial x} \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \beta^2(s) \frac{\partial Q_2(x, s)}{\partial x} \right\} = -\sigma(s) Q_1(x, s).
\end{aligned} \quad (33)$$

Из (32) и (33) следует, что решение $h_k^{(2)}(x, s)$ системы (32) имеет вид

$$h_k^{(2)}(x, s) = \frac{\partial Q_k(x, s)}{\partial x}. \quad (34)$$

С учетом (34) и (30) разложение (28) примет вид

$$H_k(y, s, \tau, \varepsilon) = Q_k(x, s) H(y, \tau) + \varepsilon h_k^{(1)}(x, s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + \varepsilon y H(y, \tau) \frac{\partial Q_k(x, s)}{\partial x} + o(\varepsilon). \quad (35)$$

Теперь найдем вид функции $H(y, \tau)$. Для этого функции в правой части системы (6) разложим в ряд по приращениям аргумента y с точностью до $o(\varepsilon^2)$, получим

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_0(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + (\lambda(s) + \sigma(s)(x + \varepsilon y)) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) = \\
& = \mu(s) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{a} H_2(y, s, \tau, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial s} \{ \alpha(s) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ \beta^2(s) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) \}, \\
& \varepsilon^2 \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_1(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + (\lambda(s) + \sigma(s)(x + \varepsilon y) + \mu(s)) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) = \\
& = (\lambda(s) + \sigma(s)(x + \varepsilon y)) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{ \sigma(s)(x + \varepsilon y) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ \sigma(s)(x + \varepsilon y) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) \} - \frac{\partial}{\partial s} \{ \alpha(s) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ \beta^2(s) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) \} + o(\varepsilon^2), \\
& \varepsilon^2 \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_2(y, s, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \frac{1}{a} H_2(y, s, \tau, \varepsilon) = \\
& = (\lambda(s) + \sigma(s)(x + \varepsilon y)) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{ (2\lambda(s) + \sigma(s)(x + \varepsilon y)) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda(s) H_2(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ (4\lambda(s) + \sigma(s)x) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \lambda(s) H_2(y, s, \tau, \varepsilon) \} - \\
& - \frac{\partial}{\partial s} \{ \alpha(s) H_2(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \{ \beta^2(s) H_2(y, s, \tau, \varepsilon) \} + o(\varepsilon^2).
\end{aligned} \quad (36)$$

Сложим все уравнения системы (36) по k , получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \sum_{k=0}^2 H_k(y, s, \tau, \varepsilon) \right\} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sum_{k=0}^2 H_k(y, s, \tau, \varepsilon) \right\} = \\ & = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{ -\sigma(s)(x + \varepsilon y) H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + (2\lambda(s) + \sigma(s)(x + \varepsilon y)) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) + \lambda(s) H_2(y, s, \tau, \varepsilon) \} + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ \sigma(s) x H_0(y, s, \tau, \varepsilon) + \lambda(s) H_2(y, s, \tau, \varepsilon) + (4\lambda(s) + \sigma(s)x) H_1(y, s, \tau, \varepsilon) \} - \\ & - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \alpha(s) \sum_{k=0}^2 H_k(y, s, \tau, \varepsilon) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \beta^2(s) \sum_{k=0}^2 H_k(y, s, \tau, \varepsilon) \right\} + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Подставим в полученное равенство разложение функций $H_k(y, s, \tau, \varepsilon)$ в виде (35), учтем обозначение (14), получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 r(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) r(s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \varepsilon^2 x'(\tau) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{k=0}^2 Q_k(x, s) \right\} \frac{\partial \{ y H(y, \tau) \}}{\partial y} - \\ & - \varepsilon^2 x'(\tau) \sum_{k=0}^2 h_k^{(1)}(x, s) \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2} = -\varepsilon (-\sigma(s)x Q_0(x, s) + \lambda(s) Q_2(x, s) + \\ & + (2\lambda(s) + \sigma(s)x) Q_1(x, s)) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \varepsilon^2 \left(\sigma(s)(Q_1(x, s) - Q_0(x, s)) - \sigma(s)x \frac{\partial Q_0(x, s)}{\partial x} + \right. \\ & + \lambda(s) \frac{\partial Q_2(x, s)}{\partial x} + (2\lambda(s) + \sigma(s)x) \frac{\partial Q_1(x, s)}{\partial x} \left. \right) \frac{\partial \{ y H(y, \tau) \}}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2}{2} [\sigma(s)x Q_0(x, s) + \lambda(s) Q_2(x, s) + \\ & + (4\lambda(s) + \sigma(s)x) Q_1(x, s) + 2(\sigma(s)x h_0^{(1)}(x, s) - \lambda(s) h_2^{(1)}(x, s) - (2\lambda(s) + \sigma(s)x) h_1^{(1)}(x, s))] \times \\ & \times \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \alpha(s) \sum_{k=0}^2 H_k(y, s, \tau, \varepsilon) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left\{ \beta^2(s) \sum_{k=0}^2 H_k(y, s, \tau, \varepsilon) \right\} + o(\varepsilon^2). \quad (37) \end{aligned}$$

Проинтегрируем уравнение (37) по s , воспользуемся условием нормировки (16), обозначением (15), также обозначим

$$\begin{aligned} h_k^{(1)}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_k^{(1)}(x, s) ds, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(s) h_k^{(1)}(x, s) ds = \eta_k h_k^{(1)}(x), \quad k = 0, 1, \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(s) h_k^{(1)}(x, s) ds = \theta_k h_k^{(1)}(x), \quad k = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (38)$$

учтем (24) и получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \varepsilon^2 x'(\tau) \left(\sum_{k=0}^2 h_k^{(1)}(x) \right) \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2} = \\ & = -\varepsilon (-\psi_0 x R_0(x) + \Lambda_2 R_2(x) + (2\Lambda_1 + \psi_0 x) R_1(x)) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon^2 \left(\psi_1 R_1(x) - \psi_0 R_0(x) - x \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sigma(s) \frac{\partial Q_0(x, s)}{\partial x} \right) ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lambda(s) \frac{\partial Q_2(x, s)}{\partial x} \right) ds + \right. \\
 & \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \left((2\lambda(s) + \sigma(s)x) \frac{\partial Q_1(x, s)}{\partial x} \right) ds \right) \frac{\partial \{yH(y, \tau)\}}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2}{2} [\psi_0 x R_0(x) + \Lambda_2 R_2(x) + \\
 & + (4\Lambda_1 + \psi_1 x) R_1(x) + 2(\eta_0 x h_0^{(1)}(x) - \theta_2 h_2^{(1)}(x) - (2\theta_1 + \eta_1 x) h_1^{(1)}(x))] \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2} + o(\varepsilon^2). \quad (39)
 \end{aligned}$$

В силу дифференциального уравнения (8) уничтожим слагаемые порядка $o(\varepsilon)$, поделим обе части полученного уравнения на ε^2 , выполним несложные преобразования и будем иметь

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial \tau} = & - \left(\psi_1 R_1(x) - \psi_0 R_0(x) - \psi_0 x \frac{\partial R_0(x)}{\partial x} + \Lambda_2 \frac{\partial R_2(x)}{\partial x} + \right. \\
 & + (2\Lambda_1 + \psi_1 x) \frac{\partial R_1(x)}{\partial x} \left. \right) \frac{\partial y H(y, \tau)}{\partial y} + \frac{1}{2} [\psi_0 x R_0(x) + \Lambda_2 R_2(x) + (4\Lambda_1 + \psi_1 x) R_1(x) + \\
 & + 2(\eta_0 x h_0^{(1)}(x) - \theta_2 h_2^{(1)}(x) - (2\theta_1 + \eta_1 x) h_1^{(1)}(x) + \\
 & + (-\psi_0 x R_0(x) + \Lambda_2 R_2(x) + (2\Lambda_1 + \psi_1 x) R_1(x)) \cdot \sum_{k=0}^2 h_k^{(1)}(x) \left. \right) \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2}. \quad (40)
 \end{aligned}$$

Получили уравнение Фоккера – Планка для плотности распределения вероятностей $H(y, \tau)$ значений диффузионного процесса авторегрессии $y(\tau)$. Заметим, что коэффициент переноса уравнения (40) есть производная по x от правой части дифференциального уравнения (8). В силу обозначения (25) можно записать

$$\begin{aligned}
 A'_x(x) = & \psi_1 R_1(x) - \psi_0 R_0(x) - \psi_0 x \frac{\partial R_0(x)}{\partial x} + \Lambda_2 \frac{\partial R_2(x)}{\partial x} + (2\Lambda_1 + \psi_1 x) \frac{\partial R_1(x)}{\partial x} = \\
 = & \frac{\partial}{\partial x} \{ -\psi_0 x R_0(x) + \Lambda_2 R_2(x) + (2\Lambda_1 + \psi_1 x) R_1(x) \}. \quad (41)
 \end{aligned}$$

Коэффициент диффузии обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B^2(x) = & \psi_0 x R_0(x) + \Lambda_2 R_2(x) + (4\Lambda_1 + \psi_1 x) R_1(x) + \\
 & + 2 \left(\eta_0 x h_0^{(1)}(x) - \theta_2 h_2^{(1)}(x) - (2\theta_1 + \eta_1 x) h_1^{(1)}(x) + \right. \\
 & \left. + (-\psi_0 x R_0(x) + \Lambda_2 R_2(x) + (2\Lambda_1 + \psi_1 x) R_1(x)) \cdot \sum_{k=0}^2 h_k^{(1)}(x) \right), \quad (42)
 \end{aligned}$$

если выражение в правой части больше нуля.

Получили, что (42) совпадает с (27). Из (40) следует, что $H(y, \tau)$ является плотностью распределения вероятностей некоторого диффузионного процесса $y(\tau)$, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dy(\tau) = A'_x(x)y(\tau)d\tau + B(x)dw(\tau), \quad (43)$$

где $w(\tau)$ является стандартным винеровским процессом, $A(x)$ определяется равенством (41), $B(x)$ – равенством (42), следовательно, уравнение (43) совпадает с уравнением (26), а процесс $y(\tau)$ является процессом авторегрессии. Теорема доказана.

4. Глобальная аппроксимация процесса изменения состояний в математической модели неустойчивых сетей множественного доступа

Покажем, что для достаточно малых значений параметра ε случайный процесс $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, аппроксимирующий процесс изменения числа заявок в ИПВ $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$ является однородным диффузионным процессом. Докажем следующую теорему.

Теорема 4. С точностью до $o(\varepsilon)$ случайный процесс $z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dz(\tau) = A(z)d\tau + \varepsilon B(z)dw(\tau), \quad (44)$$

где $w(\tau)$ – есть стандартный винеровский процесс, функция $A(z)$ определяется равенством (25), а функция $B(z)$ – равенством (27), то есть $z(\tau)$ является однородным диффузионным процессом с коэффициентом переноса $A(z)$ и коэффициентом диффузии $\varepsilon^2 B^2(z)$.

Доказательство. Поскольку $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, то, дифференцируя $z(\tau)$ по τ , получаем

$$dz(\tau) = x'(\tau)d\tau + \varepsilon dy. \quad (45)$$

В силу (8) и (26) имеем

$$\begin{aligned} dz(\tau) = & [-\psi_0 x R_0(x) + \Lambda_2 R_2(x) + (2\Lambda_1 + \psi_1 x) R_1(x)] d\tau + \\ & + \varepsilon y \frac{\partial}{\partial x} \{-\psi_0 x R_0(x) + \Lambda_2 R_2(x) + (2\Lambda_1 + \psi_1 x) R_1(x)\} d\tau + \varepsilon B(x) dw(\tau). \end{aligned}$$

Так как правая часть содержит разложение в ряд по приращениям εy аргумента x , то можно записать

$$\begin{aligned} dz(\tau) = & [-\psi_0(x + \varepsilon y) R_0(x + \varepsilon y) + \Lambda_2 R_2(x + \varepsilon y) + (2\Lambda_1 + \psi_1(x + \varepsilon y)) R_1(x + \varepsilon y)] d\tau + \\ & + \varepsilon B(x + \varepsilon y) dw(\tau). \end{aligned}$$

Заметим, что $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, тогда с точностью до $o(\varepsilon)$ имеем

$$dz(\tau) = [-\psi_0 z R_0(z) + \Lambda_2 R_2(z) + (2\Lambda_1 + \psi_1 z) R_1(z)] d\tau + \varepsilon B(z) dw(\tau) + o(\varepsilon).$$

С учётом (25) уравнение (45) окончательно примет вид

$$dz(\tau) = A(z)d\tau + \varepsilon B(z)dw(\tau) + o(\varepsilon).$$

Таким образом, $z(\tau)$ является однородным диффузионным процессом с коэффициентом переноса $A(z)$ и коэффициентом диффузии $\varepsilon^2 B^2(z)$ и определяется с точностью до $o(\varepsilon)$ стохастическим дифференциальным уравнением вида (49). Теорема доказана.

Следствие 4.1. Плотность распределения вероятностей значений процесса $z(\tau)$ имеет вид

$$F(z) = \frac{1}{B^2(z)} e^{\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du} \left/ \int_0^\infty \frac{1}{B^2(z)} e^{\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du} dz \right., \quad (46)$$

где $A(z)$ определяется равенством (25), $B(z)$ – равенством (27).

Доказательство. Обозначим через $F(z, \tau)$ плотность распределения вероятностей значений процесса $z(\tau)$, тогда можно записать уравнение Фоккера–Планка для плотности этого процесса

$$\frac{\partial F(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z} \{A(z)F(z, \tau)\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{B^2(z)F(z, \tau)\},$$

где $A(z)$ определяется равенством (25), $B(z)$ – равенством (27). Рассмотрим функционирование процесса $z(\tau)$ в стационарном режиме, то есть $F(z, \tau) \equiv F(z)$, тогда стабильное распределение можно найти из уравнения Фоккера – Планка

$$0 = -\frac{\partial}{\partial z} \{A(z)F(z)\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{B^2(z)F(z)\}. \quad (47)$$

Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Обозначим

$$B^2(z)F(z) = G(z). \quad (48)$$

Понизим порядок уравнения (47) и, положив константу, возникшую в результате интегрирования, равной нулю, запишем

$$\frac{\partial G(z)}{\partial z} = \frac{2}{\varepsilon^2} \frac{A(z)}{B^2(z)} G(z).$$

Проинтегрируем последнее уравнение

$$\int_0^z \frac{dG(u)}{G(u)} du = \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du + C_1,$$

выполним преобразования

$$\ln |G(z)| = \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du + \ln |C|,$$

$$G(z) = C \cdot e^{\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du}.$$

Учтем замену (48) и перепишем последнее уравнение в виде

$$F(z) = \frac{C}{B^2(z)} e^{\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du}. \quad (49)$$

Константу C найдем из условия нормировки

$$\int_0^\infty F(z) dz = 1,$$

тогда

$$C = 1 / \int_0^{\infty} \frac{1}{B^2(z)} e^{\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du} dz. \quad (50)$$

Подставив (50) в (49), получим плотность распределения вероятностей для процесса $z(\tau)$ в виде (46).

Заключение

Таким образом, в данной работе найдено распределение вероятностей $R_k(x)$ состояний k канала в виде (7). Получено дифференциальное уравнение (8), определяющее асимптотическое среднее $x(\tau)$ нормированного числа заявок в ИПВ. Исследованы величины отклонения от этого среднего, показано, что процесс их изменения $y(\tau)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением вида (26). Доказано, что для достаточно малых значений параметра ε случайный процесс $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, аппроксимирующий процесс изменения числа заявок в ИПВ $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$ является однородным диффузионным процессом. Найдена важнейшая из вероятностно-временных характеристик этого процесса – плотность распределения вероятностей $F(z)$ в виде (46).

Полученные результаты могут быть использованы при проведении анализа существующих сетей, управляемых протоколами случайного множественного доступа, а также при проектировании новых сетей связи, реализующих более производительные протоколы передачи данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вавилов В.А., Назаров А.А. Исследование средних характеристик неустойчивых сетей множественного доступа в случайной среде // Обработка данных и управление в сложных системах: Сб. статей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 14 – 24.
2. Вавилов В.А., Назаров А.А. Исследование математических моделей многостабильных сетей множественного доступа в случайной среде // Обработка данных и управление в сложных системах: Сб. статей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 17 – 30.
3. Вавилов В.А., Назаров А.А. Исследование асимптотических средних характеристик устойчивых сетей множественного доступа, функционирующих в диффузионной среде // Вестник ТГУ. Приложение. 2005. № 16. С. 73 – 81.
4. Вавилов В.А., Назаров А.А. Исследование математических моделей неустойчивых сетей множественного доступа, функционирующих в полумарковской среде // Там же. С. 61 – 72.
5. Вавилов В.А., Назаров А.А. Асимптотический анализ математических моделей устойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в диффузионной среде // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 19. С. 124 – 131.
6. Вавилов В.А. Исследование математических моделей устойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в случайной среде // Там же. С. 131 – 137.
7. Вавилов В.А., Назаров А.А. Математическое моделирование устойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в диффузионной среде // Математическое моделирование научно-технологических и экологических проблем в нефтегазодобывающей промышленности: Материалы VI Казахстанско-российской Международной научно-практической конференции (г. Астана, 11 – 12 ок-

- тября 2007 г.) Астана: Изд-во Евразийского национального ун-та им. Л.Н. Гумилева, 2007. С. 97 – 102.
8. *Вавилов В.А.* Математическое моделирование устойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в полумарковской среде // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2007): Материалы VI Международной научно-практической конференции (г. Анжоро-Судженск, 9 – 10 ноября 2007 г.). Ч. 2. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. С. 7 – 11.
 9. *Вавилов В.А.* Применение характеристических функций для исследования асимптотических средних характеристик неустойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в случайной среде // Вестник ТГУ. УВТиИ. 2007. № 1. С. 51 – 57.
 10. *Вавилов В.А., Назаров А.А.* Исследование устойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в случайной среде // Журнал «Вычислительные технологии». Том 13. Специальный выпуск 5: Избранные доклады VI Международной научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование» (9 – 10 ноября 2007 года, Анжоро-Судженск, Россия). Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2008. С. 14 – 18.
 11. *Вавилов В.А., Назаров А.А.* Математическое моделирование неустойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в полумарковской среде // Вестник ТГУ. УВТиИ. 2008. № 4 (5). С. 15 – 31.
 12. *Вавилов В.А., Назаров А.А.* Математическая модель влияния случайной среды на функционирование локальных вычислительных сетей // Сб. научных статей Международной научной конференции «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения» (Минск, 15 – 19 сентября 2008 г.) Минск: Изд-во БГУ, 2008. С. 17 – 22.
 13. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971.
 14. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
 15. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Вавилов Вячеслав Анатольевич

Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжоро-Судженске. E-mail: vavilov@asf.ru

Поступила в редакцию 31 января 2009 г.