

УДК 519.872

Е.А. Судыко, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЕТИ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СЕМИИНВАРИАНТОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Для исследования математической модели сети случайного доступа с конечным числом станций, повторными заявками и этапом оповещения о конфликте предложен метод асимптотических семиинвариантов в условии растущего числа станций. Приведены результаты численной реализации допредельного распределения числа заявок в источнике повторных вызовов. Выполнено сравнение допредельных и асимптотических семиинвариантов.

Ключевые слова: сеть случайного доступа, оповещение о конфликте, повторные заявки, метод асимптотических семиинвариантов.

Исследованию сетей связи посвящено большое количество работ. Так, вопросам анализа сетей связи и протоколов случайного множественного доступа посвящены работы А.А. Назарова [1 – 5], И.И. Хомичкова [6], А.Н. Дудина [7], В.К. Щербо [8].

Но несмотря на большое количество работ, посвященных исследованию математических моделей компьютерных сетей связи, многие задачи остаются нерешенными и интересными для исследования. Так, одной из наиболее важных характеристик сети передачи данных является величина задержки, необходимая для доставки сообщения от источника к месту назначения, которая в сетях случайного доступа является нерегулярной.

В реальных системах часто наблюдаются эффекты повторных обращений заявок к обслуживающему прибору, конфликты заявок требуют рассмотрения моделей, выходящих за рамки классических систем массового обслуживания. Поэтому интерес к рассмотрению таких более реальных систем возрастает. В связи с этим появилось большое количество работ, посвященных рассмотрению систем с повторными заявками, таких как [9 – 13], в которых развиваются численные методы исследования.

Альтернативным подходом является применение метода асимптотического анализа для исследования таких систем.

Методом асимптотического анализа в теории массового обслуживания будем называть решение уравнений, определяющих какие-либо характеристики системы при выполнении некоторого предельного условия, вид которого будет конкретизирован для различных моделей и поставленных задач исследования.

Так, [14] посвящена исследованию бистабильных сетей случайного доступа, в [15] исследуются асимптотические средние немарковских моделей неустойчивых сетей случайного доступа, а в [16] – процесс изменения состояний в окрестности асимптотического среднего неустойчивой сети случайного доступа.

Также большое число работ посвящено исследованию сетей случайного доступа с очередями и поиска подходящего клиента из очереди. Описание данного направления можно найти в [17 – 20].

В данной статье мы рассмотрим систему с повторными вызовами, конечным числом станций и оповещением о конфликте, для исследования которой предлагается метод асимптотических семиинвариантов до третьего порядка.

1. Постановка задачи

В данной работе рассмотрим сеть связи случайного доступа с конечным числом станций. Здесь общий ресурс (моноканал) объединяет конечное N число абонентских станций. Доступ к общему ресурсу реализуется протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте. Любая из N абонентских станций, сформировав свое сообщение, отправляет его на общий ресурс (моноканал). И если ресурс свободен, то начинается осуществление немедленной передачи сообщения, которая заканчивается успешно, если за это время другие сообщения не поступали. Если же во время передачи одного сообщения поступает другое, то происходит наложение сигналов, в результате чего сообщения искажаются. В этом случае говорят о ситуации конфликта. Сообщения, попавшие в конфликт, а также поступившие на этапе оповещения о конфликте, считаются искаженными, переходят в так называемый источник повторных вызовов (ИПВ), откуда вновь подаются на обслуживание после случайной задержки.

2. Математическая модель

В качестве математической модели сети случайного доступа с конечным числом абонентских станций рассмотрим (рис. 1) однолинейную СМО, на вход которой поступает примитивный [21] поток заявок, формируемый следующим образом. Каждая абонентская станция в течение случайного времени, имеющего экспоненциальное с параметром λ/N распределение, генерирует заявку, для обслуживания которой пытается захватить прибор. Требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания, продолжительность которого имеет экспоненциальное с параметром μ_1 распределение. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки попадают в ситуацию конфликта и переходят в источник повторных вызовов (ИПВ), а на приборе начинается этап оповещения о конфликте, продолжительность которого имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_2 . В ИПВ заявки осуществляют задержку, ее продолжительность

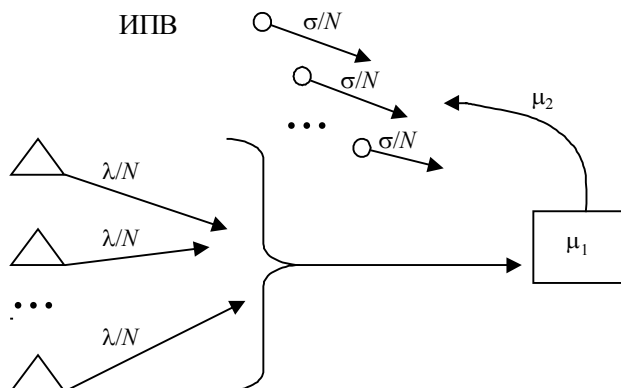


Рис. 1. Схема сети случайного доступа

имеет экспоненциальное распределение с параметром σ/N . Из ИПВ после случайной задержки каждая заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. На интервале от первой попытки захвата прибора до момента окончания успешного обслуживания этой заявки, другие заявки рассматриваемая абонентская станция не генерирует. И начинает генерировать новую заявку от момента окончания успешного обслуживания предыдущей.

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$\begin{aligned} k(t) &= 0, & \text{если прибор свободен;} \\ k(t) &= 1, & \text{если прибор находится в состоянии обслуживания заявки;} \\ k(t) &= 2, & \text{если прибор находится в состоянии оповещения о конфликте.} \end{aligned}$$

Если система находится в состоянии $\{k, i\}$, то суммарный входящий поток первичных заявок является примитивным с интенсивностью $\lambda(N-i)/N$, если прибор находится в одном из двух состояний $k(t) = 0$ или $k(t) = 2$, либо $\lambda(N-i-1)/N$, если прибор находится в состоянии $k(t) = 1$. Процесс $\{k(t), i(t)\}$ изменения во времени состояний описанной системы является марковским.

Обозначим $P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P(k, i, t)$, $k(t) = \overline{0, 2}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k и в ИПВ находится i заявок.

Нетрудно показать, что распределение вероятностей $P(k, i, t)$ является решением следующей системы дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(0, i, t)}{\partial t} &= -\left(\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i}{N}\right) P(0, i, t) + \mu_1 P(1, i, t) + \mu_2 P(2, i, t), \\ \frac{\partial P(1, i, t)}{\partial t} &= -\left(\lambda \frac{N-i-1}{N} + \sigma \frac{i}{N} + \mu_1\right) P(1, i, t) + \lambda \frac{N-i}{N} P(0, i, t) + \sigma \frac{i+1}{N} P(0, i+1, t), \\ \frac{\partial P(2, i, t)}{\partial t} &= -\left(\lambda \frac{N-i}{N} + \mu_2\right) P(2, i, t) + \lambda \frac{N-(i-1)}{N} P(2, i-1, t) + \sigma \frac{i-1}{N} P(1, i-1, t) + \\ &\quad + \lambda \frac{N-(i-1)}{N} P(1, i-2, t), \end{aligned}$$

которую запишем для стационарного режима:

$$\begin{aligned} -\left(\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i}{N}\right) P(0, i) + \mu_1 P(1, i) + \mu_2 P(2, i) &= 0, \\ -\left(\lambda \frac{N-i-1}{N} + \sigma \frac{i}{N} + \mu_1\right) P(1, i) + \lambda \frac{N-i}{N} P(0, i) + \sigma \frac{i+1}{N} P(0, i+1) &= 0, \\ -\left(\lambda \frac{N-i}{N} + \mu_2\right) P(2, i) + \lambda \frac{N-(i-1)}{N} P(2, i-1) + \sigma \frac{i-1}{N} P(1, i-1) + \\ + \lambda \frac{N-(i-1)}{N} P(1, i-2) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Из нее получим систему уравнений для функций

$$H(k, u) = \sum_i e^{jui} P(k, i). \tag{2}$$

Такая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{j}{N}(\lambda - \sigma) \frac{\partial H(0, u, t)}{\partial u} &= -\lambda H(0, u, t) + \mu_1 H(1, u, t) + \mu_2 H(2, u, t), \\ \frac{j}{N}(\sigma e^{-ju} - \lambda) \frac{\partial H(0, u, t)}{\partial u} - \frac{j}{N}(\sigma - \lambda) \frac{\partial H(1, u, t)}{\partial u} &= \lambda H(0, u, t) - (\lambda + \mu_1) H(1, u, t) + \lambda \frac{1}{N} H(1, u, t), \\ \frac{j}{N}(\sigma e^{ju} - \lambda e^{2ju}) \frac{\partial H(1, u, t)}{\partial u} - \frac{j}{N} \lambda (e^{ju} - 1) \frac{\partial H(2, u, t)}{\partial u} &= \lambda e^{2ju} H(1, u, t) - \\ &- [\lambda(1 - e^{ju}) + \mu_2] H(2, u, t) - \lambda \frac{1}{N} e^{2ju} H(1, u, t). \end{aligned}$$

Обозначив вектор-строку $H(k, u) = \{H(0, u), H(1, u), H(2, u)\}$, эту систему перепишем в матричном виде:

$$\frac{j}{N} \frac{\partial H(u)}{\partial u} A(ju) = H(u) B(ju) + \frac{1}{N} H(u) D(ju), \quad (3)$$

где матрицы $A(ju)$, $B(ju)$ и $D(ju)$ имеют вид

$$\begin{aligned} A(ju) &= \begin{bmatrix} -(\sigma - \lambda) & (\sigma e^{-ju} - \lambda) & 0 \\ 0 & -(\sigma - \lambda) & e^{ju}(\sigma - \lambda e^{ju}) \\ 0 & 0 & -\lambda(e^{ju} - 1) \end{bmatrix}, \\ B(ju) &= \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda + \mu_1) & \lambda e^{2ju} \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda(1 - e^{ju}) + \mu_2) \end{bmatrix}, \quad D(ju) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda e^{2ju} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Матрицы $A(ju)$, $B(ju)$ и $D(ju)$ допускают следующие разложения:

$$A(ju) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(ju)^v}{v!} A_v, \quad B(ju) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(ju)^v}{v!} B_v, \quad D(ju) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(ju)^v}{v!} D_v,$$

где вид матриц A_v , B_v и D_v очевидно определяется из (4).

Полученное равенство (3) будем называть основным уравнением для составленной математической модели. Решение $H(u)$ уравнений (3) найдем при помощи предлагаемого в данной работе метода асимптотических семиинвариантов в условии растущего числа станций.

3. Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка в основном уравнении (3) выполним следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad H(u) = F_1(w, \varepsilon). \quad (5)$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$j \frac{\partial F_1(w, \varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w) = F_1(w, \varepsilon) B(j\varepsilon w) + \varepsilon F_1(w, \varepsilon) D(j\varepsilon w). \quad (6)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$, обозначив $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(w, \varepsilon) = F_1(w)$, перепишем уравнение (6) следующим образом:

$$j \frac{\partial F_1(w)}{\partial w} A_0 = F_1(w) B_0, \quad (7)$$

решение $F_1(w)$ которого запишем в виде произведения

$$F_1(w) = R e^{jw\kappa_1}, \quad (8)$$

где неизвестные вектор R и скалярная величина κ_1 будут определены ниже. Вектор R имеет смысл распределения вероятностей значений процесса $k(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Найдем вектор R , подставив (8) в (7), получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$R(B_0 + \kappa_1 A_0) = 0, \quad (9)$$

определяющую вектор R , удовлетворяющий условию нормировки $RE = 1$, где E – единичный вектор-столбец.

Найдем величину κ_1 . Для этого сложим все уравнения системы (6), умножив это равенство на единичный вектор E . Затем, раскладывая матрицы $A(j\varepsilon w)$, $B(j\varepsilon w)$ и $D(j\varepsilon w)$ по малому параметру и подставляя в полученное равенство произведение (8), получим нелинейное уравнение

$$R(B_1 + \kappa_1 A_1)E = 0, \quad (10)$$

которое совместно с (9) определяет величину κ_1 .

В силу замен (5), равенств (2) и (8), можно записать асимптотическое равенство

$$M e^{ju i(t)} = H(u)E = \sum_i e^{ju i} \sum_k P(k, i) = F_1(w, \varepsilon)E \approx F_1(w)E = e^{ju N \kappa_1}.$$

Функцию $h_1(u) = e^{ju N \kappa_1}$ будем называть асимптотикой первого порядка. Величину $N \cdot \kappa_1$, которая определяет асимптотическое среднее значение числа заявок в ИПВ будем называть асимптотическим семиинвариантом первого порядка.

4. Асимптотика второго порядка

Для нахождения асимптотики второго порядка в уравнении (3) выполним замену

$$H(u) = H_2(u) \exp\{ju N \kappa_1\}, \quad (11)$$

для неизвестной вектор-функции $H_2(u)$ получим уравнение

$$\frac{j}{N} \frac{\partial H_2(u)}{\partial u} A(ju) = H_2(u) \{B(ju) + \kappa_1 A(ju)\} + \frac{1}{N} H_2(u) D(ju), \quad (12)$$

в котором выполним замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad H_2(u) = F_2(w, \varepsilon). \quad (13)$$

Уравнение (12) примет вид

$$j\varepsilon \frac{\partial F_2(w, \varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w) = F_2(w, \varepsilon) \{B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w)\} + \varepsilon^2 F_2(w, \varepsilon) D(j\varepsilon w). \quad (14)$$

В этом уравнении сделаем предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, обозначив $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(w, \varepsilon) = F_2(w)$, и получим уравнение

$$F_2(w)(B_0 + \kappa_1 A_0) = 0. \quad (15)$$

Тогда его решение $F_2(w)$ имеет вид

$$F_2(w) = R\Phi_2(w),$$

где R – вектор, определенный системой (9) и условием нормировки $RE = 1$, а скалярная функция $\Phi_2(w)$ будет определена ниже.

Раскладывая матрицы $A(ju)$, $B(ju)$ и $D(ju)$ в ряды по параметру ε , систему (14) перепишем с точностью до бесконечно малых слагаемых порядка ε^2 следующим образом:

$$j\varepsilon \frac{\partial F_2(w, \varepsilon)}{\partial w} A_0 = F_2(w, \varepsilon) \{B_0 + \kappa_1 A_0 + j\varepsilon w(B_1 + \kappa_1 A_1)\} + O(\varepsilon^2). \quad (16)$$

Решение $F_2(w, \varepsilon)$ этой системы будем искать в виде

$$F_2(w, \varepsilon) = \Phi_2(w)R + j\varepsilon F_{21}(w) + O(\varepsilon^2). \quad (17)$$

Подставляя разложение (17) в предыдущее равенство, получим неоднородное уравнение

$$F_{21}(w)(B_0 + \kappa_1 A_0) + \Phi_2(w)Rw(B_1 + \kappa_1 A_1) - \frac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w} RA_0 = 0,$$

из которого вектор-функцию $F_{21}(w)$ можно записать в виде разложения

$$F_{21}(w) = \Phi_2(w)wh_1 - \frac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w} h_2, \quad (18)$$

где векторы h_1 и h_2 являются такими решениями систем

$$h_1(B_0 + \kappa_1 A_0) + R(B_1 + \kappa_1 A_1) = 0,$$

$$h_2(B_0 + \kappa_1 A_0) + RA_0 = 0,$$

которые удовлетворяют условиям $h_1 E = 0$ и $h_2 E = 0$.

Для нахождения скалярной функции $\Phi_2(w)$ просуммируем все уравнения системы (14), умножив ее на единичный вектор E , получим

$$j\varepsilon \frac{\partial F_2(w, \varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w)E = F_2(w, \varepsilon) \{B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w)\}E + \varepsilon^2 F_2(w, \varepsilon)D(j\varepsilon w)E. \quad (19)$$

Раскладывая матрицы $A(ju)$, $B(ju)$ и $D(ju)$ в ряды по параметру ε и учитывая равенство (10), перепишем (19) в виде

$$j\varepsilon \frac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w} Rj\varepsilon w A_1 E = \Phi_2(w)R \left\{ j\varepsilon (B_1 + \kappa_1 A_1)E + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} (B_2 + \kappa_1 A_2)E \right\} + \\ + j\varepsilon F_{21}(w)j\varepsilon w (B_1 + \kappa_1 A_1)E + O(\varepsilon^3).$$

Имея в виду (18), получаем

$$\frac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w} RA_1 E = \Phi_2(w) \frac{w}{2} R(B_2 + \kappa_1 A_2)E + \left\{ w\Phi_2(w)h_1 - \frac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w} h_2 \right\} (B_1 + \kappa_1 A_1)E.$$

Приводя подобные, получим уравнение относительно функции $\Phi_2(w)$:

$$\frac{\partial \Phi_2(w)}{\partial w} \{RA_1E + h_2(B_1 + \kappa_1 A_1)E\} = w\Phi_2(w) \left\{ h_1(B_1 + \kappa_1 A_1)E + \frac{1}{2}R(B_2 + \kappa_1 A_2)E \right\}.$$

Следовательно, решение $\Phi_2(w)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\Phi_2(w) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\},$$

$$\text{где} \quad \kappa_2 = - \frac{h_1(B_1 + \kappa_1 A_1)E + \frac{1}{2}R(B_2 + \kappa_1 A_2)E}{RA_1E + h_2(B_1 + \kappa_1 A_1)E}. \quad (20)$$

В силу замен (13) и равенств (2) и (11), можно записать асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} Me^{juit} &= H(u)E = e^{juN\kappa_1} H_2(u)E = e^{juN\kappa_1} F_2(w, \varepsilon)E \approx e^{juN\kappa_1} F_2(w)E = \\ &= \exp \left\{ juN\kappa_1 + \frac{(ju)^2}{2} N\kappa_2 \right\}. \end{aligned}$$

Функцию

$$h_2(u) = \exp \left\{ juN\kappa_1 + \frac{(ju)^2}{2} N\kappa_2 \right\}$$

будем называть асимптотикой второго порядка. Тогда величину $N \cdot \kappa_2$, которая определяет асимптотическую дисперсию, будем называть асимптотическим семиинвариантом второго порядка.

Из вида $h_2(u)$ следует, что число заявок в ИПВ распределено асимптотически нормально.

5. Асимптотика третьего порядка

Для нахождения асимптотики третьего порядка в уравнении (12) выполним замену

$$H_2(u) = H_3(u) \exp \left\{ \frac{(ju)^2}{2} N\kappa_2 \right\} \quad (21)$$

и для неизвестной вектор-функции $H_3(u)$ получим уравнение

$$\frac{j}{N} \frac{\partial H_3(u)}{\partial u} A(ju) = H_3(u) \{ B(ju) + \kappa_1 A(ju) + ju\kappa_2 A(ju) \} + \frac{1}{N} H_3(u) D(ju), \quad (22)$$

в котором выполним замены

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^3, \quad u = \varepsilon w, \quad H_3(u) = F_3(w, \varepsilon). \quad (23)$$

Уравнение (22) примет вид

$$\begin{aligned} j\varepsilon^2 \frac{\partial F_3(w, \varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w) &= F_3(w, \varepsilon) \{ B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w) + j\varepsilon w \kappa_2 A(j\varepsilon w) \} + \\ &+ \varepsilon^3 F_3(w, \varepsilon) D(j\varepsilon w). \end{aligned} \quad (24)$$

В этом уравнении сделаем предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ и, обозначив $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_3(w, \varepsilon) = F_3(w)$, получим уравнение

$$F_3(w)(B_0 + \kappa_1 A_0) = 0. \quad (25)$$

Тогда его решение $F_3(w)$ будет иметь вид

$$F_3(w) = R\Phi_3(w),$$

где R – вектор, определенный системой (9) и условием нормировки $RE = 1$, а скалярная функция $\Phi_3(w)$ определена ниже.

Раскладывая матрицы $A(ju)$, $B(ju)$ и $D(ju)$ в ряды по параметру ε , систему (24) перепишем с точностью до бесконечно малых слагаемых порядка ε^3 следующим образом:

$$j\varepsilon^2 \frac{\partial F_3(w, \varepsilon)}{\partial w} A_0 = F_3(w, \varepsilon) \left\{ B_0 + \kappa_1 A_0 + j\varepsilon w(B_1 + \kappa_1 A_1) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}(B_2 + \kappa_1 A_2) + j\varepsilon w \kappa_2 A_0 + (j\varepsilon w)^2 \kappa_2 A_1 \right\} + O(\varepsilon^3). \quad (26)$$

Решение $F_3(w, \varepsilon)$ этой системы будем искать в виде разложения

$$F_3(w, \varepsilon) = \Phi_3(w)R + j\varepsilon F_{31}(w) + \frac{(j\varepsilon)^2}{2} F_{32}(w) + O(\varepsilon^3). \quad (27)$$

Подставляя разложение (27) в предыдущее равенство, получим

$$j\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_3(w)}{\partial w} R A_0 = \Phi_3(w) R \left\{ j\varepsilon w \kappa_2 A_0 + j\varepsilon w(B_1 + \kappa_1 A_1) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}(B_2 + \kappa_1 A_2) \right\} + j\varepsilon F_{31}(w) \{ B_0 + \kappa_1 A_0 + j\varepsilon w \kappa_2 A_0 + j\varepsilon w(B_1 + \kappa_1 A_1) \} + \frac{(j\varepsilon)^2}{2} F_{32}(w) \{ B_0 + \kappa_1 A_0 \} + O(\varepsilon^3).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \Phi_3(w) R \{ jw \kappa_2 A_0 + jw(B_1 + \kappa_1 A_1) \} + jF_{31}(w) \{ B_0 + \kappa_1 A_0 \} &= 0, \\ F_{32}(w) (B_0 + \kappa_1 A_0) + 2\Phi_3(w) R w^2 \left\{ \kappa_2 A_1 + \frac{1}{2}(B_2 + \kappa_1 A_2) \right\} + \\ + 2w^2 \Phi_3(w) h_3 \{ \kappa_2 A_0 + B_1 + \kappa_1 A_1 \} + 2j \frac{\partial \Phi_3(w)}{\partial w} R A_0 &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Из первого уравнения системы (28) получим функцию $F_{31}(w)$ в виде

$$F_{31} = \Phi_3(w) jw h_3, \quad (29)$$

где вектор h_3 является таким решением системы

$$h_3 \{ B_0 + \kappa_1 A_0 \} + R \{ \kappa_2 A_0 + B_1 + \kappa_1 A_1 \} = 0,$$

которое удовлетворяет условию $h_3 E = 0$.

Функцию $F_{32}(w)$ найдем из второго уравнения (28) в виде

$$F_{32}(w) = \Phi_3(w) w^2 h_4 + j \frac{\partial \Phi_3(w)}{\partial w} h_5, \quad (30)$$

где векторы h_4 и h_5 являются такими решениями систем

$$h_4 (B_0 + \kappa_1 A_0) + 2R \left\{ \kappa_2 A_1 + \frac{1}{2} (B_2 + \kappa_1 A_2) \right\} + 2h_3 \{ \kappa_2 A_0 + B_1 + \kappa_1 A_1 \} = 0,$$

$$h_5 (w) (B_0 + \kappa_1 A_0) + 2RA_0 = 0,$$

которые удовлетворяют условиям $h_4 E = 0$ и $h_5 E = 0$.

Для нахождения скалярной функции $\Phi_3(w)$ просуммируем все уравнения системы (24), умножив ее на единичный вектор E , получим

$$j\varepsilon^2 \frac{\partial F_3(w, \varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w) E = F_3(w, \varepsilon) \{ B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w) + j\varepsilon w \kappa_2 A(j\varepsilon w) \} E + \\ + \varepsilon^3 F_3(w, \varepsilon) D(j\varepsilon w) E. \quad (31)$$

Раскладывая матрицы $A(jw)$, $B(jw)$ и $D(jw)$ в ряды по параметру ε и учитывая равенство (10), перепишем (31) в виде

$$\frac{\partial \Phi_3(w)}{\partial w} RA_1 E = \Phi_3(w) R w^2 j \left\{ \frac{1}{6} (B_3 + \kappa_1 A_3) + \frac{1}{2} \kappa_2 A_2 \right\} E + \\ + jF_{31}(w) w \left\{ \frac{1}{2} (B_2 + \kappa_1 A_2) + \kappa_2 A_1 \right\} E + \frac{1}{2} F_{32}(w) j (B_1 + \kappa_1 A_1) E.$$

Имея в виду (29) и (30), получаем равенство

$$\frac{\partial \Phi_3(w)}{\partial w} RA_1 E = j\Phi_3(w) w^2 \left\{ R \left\{ \frac{1}{6} (B_3 + \kappa_1 A_3) + \frac{1}{2} \kappa_2 A_2 \right\} + h_3 \left\{ \frac{1}{2} (B_2 + \kappa_1 A_2) + \kappa_2 A_1 \right\} \right\} E + \\ + \left\{ \frac{1}{2} j\Phi_3(w) w^2 h_4 - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_3(w)}{\partial w} h_5 \right\} (B_1 + \kappa_1 A_1) E.$$

Приводя здесь подобные, запишем

$$\frac{\partial \Phi_3(w)}{\partial w} \left\{ RA_1 + \frac{1}{2} h_5 (B_1 + \kappa_1 A_1) \right\} E = \frac{1}{2} \Phi_3(w) j w^2 \left\{ R \left\{ \frac{1}{3} (B_3 + \kappa_1 A_3) + \kappa_2 A_2 \right\} + \right. \\ \left. + h_3 \{ B_2 + \kappa_1 A_2 + 2\kappa_2 A_1 \} + h_4 (B_1 + \kappa_1 A_1) \right\} E.$$

Следовательно, решение $\Phi_3(w)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\Phi_3(w) = \exp \left\{ \frac{(jw)^3}{6} \kappa_3 \right\},$$

где

$$\kappa_3 = \frac{h_3 \{ (B_2 + \kappa_1 A_2) + 2\kappa_2 A_1 \} E + h_4 (B_1 + \kappa_1 A_1) E + R \left(\frac{1}{3} (B_3 + \kappa_1 A_3) + \kappa_2 A_2 \right) E}{RA_1 E + \frac{1}{2} h_5 (B_1 + \kappa_1 A_1) E}. \quad (32)$$

В силу замен (23) и равенств (2) и (21), можно записать асимптотическое равенство

$$Me^{jui} = H(u)E = e^{juN\kappa_1} e^{\frac{(ju)^2}{2!} N\kappa_2} H_3(u)E = e^{juN\kappa_1} e^{\frac{(ju)^2}{2!} N\kappa_2} F_3(w, \varepsilon)E \approx \\ \approx e^{juN\kappa_1} e^{\frac{(ju)^2}{2!} N\kappa_2} F_3(w)E \approx \exp \left\{ juN\kappa_1 + \frac{(ju)^2}{2} N\kappa_2 + \frac{(ju)^3}{6} N\kappa_3 \right\}.$$

Функцию

$$h_3(u) = \exp \left\{ juN\kappa_1 + \frac{(ju)^2}{2} N\kappa_2 + \frac{(ju)^3}{6} N\kappa_3 \right\}$$

будем называть асимптотикой третьего порядка, а величину $N \cdot \kappa_3$ – асимптотическим семиинвариантом третьего порядка.

Аналогично асимптотикам первых трех порядков можно получить вид асимптотики произвольного порядка m

$$h_m(u) = \exp \left\{ \sum_{v=1}^m \frac{(ju)^v}{v!} N\kappa_v \right\},$$

где $N \cdot \kappa_v$ будем называть асимптотическим семиинвариантом v -го порядка.

6. Численные расчеты

Выше были получены формулы (10), (20), (32), позволяющие найти асимптотические семиинварианты первых трех порядков. Также эти величины для рассматриваемой модели можно получить в допредельной ситуации при заданных значениях параметров N , μ_1 , μ_2 , λ , σ . Остается выяснить, насколько асимптотические результаты близки к результатам, полученным в допредельной ситуации при различных значениях N . Для этого воспользуемся сравнительной таблицей, где результаты численных расчетов получены при помощи следующего численного итерационного метода.

Рассмотрим систему (1) уравнений Колмогорова для стационарного случая. Данная система имеет конечное число уравнений. Численно найдем распределение вероятностей $P(k, i)$ для этой системы, используя следующий рекуррентный алгоритм.

1. $i := 0$, найдем решения $P(k, i)$ системы (1), удовлетворяющие дополнительному условию $P(0, 0) := 1$. $P(k, i) = 0$ для всех $i < 0$;

2. Краевые условия находятся из системы (1) для случаев $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$.

$$\begin{aligned} P(1, 0) &= \frac{\lambda P(0, 0)}{\mu_1}; \\ P(0, 1) &= \frac{P(1, 0) \left(\lambda \frac{N-1}{N} + \mu_1 \right) - \lambda P(0, 0)}{\sigma} N; \\ P(1, 1) &= \frac{P(0, 1) \left(\lambda \frac{N-1}{N} + \frac{\sigma}{N} \right)}{\mu_1}; \\ P(0, 2) &= \frac{P(1, 1) \left(\lambda \frac{N-2}{N} + \frac{\sigma}{N} + \mu_1 \right) - \lambda \frac{N-1}{N} P(0, 1)}{2\sigma} N; \\ P(2, 2) &= \frac{\frac{\sigma}{N} P(1, 1) + \lambda \frac{N-1}{N} P(1, 0)}{\lambda \frac{N-2}{N} + \mu_2}; \end{aligned}$$

$$P(1,2) = \frac{P(0,2)\left(\lambda \frac{N-2}{N} + \frac{2\sigma}{N}\right) - \mu_2 P(2,2)}{\mu_1};$$

$$P(0,3) = \frac{P(1,2)\left(\lambda \frac{N-3}{N} + \frac{2\sigma}{N} + \mu_1\right) - \lambda \frac{N-2}{N} P(0,2)}{3\sigma} N;$$

3. Для реализации основного алгоритма из третьего уравнения системы (1) находим $P(2,i)$:

$$P(2,i) = \frac{\frac{\sigma(i-1)}{N} P(1,i-1) + \lambda \frac{N-i+1}{N} P(1,i-2) + \lambda \frac{N-i+1}{N} P(2,i-1)}{\lambda \frac{N-i}{N} + \mu_2}.$$

Затем, из первого уравнения системы (1)

$$P(1,i) = \frac{P(0,i)\left(\lambda \frac{N-i}{N} + \frac{i\sigma}{N}\right) - \mu_2 P(2,i)}{\mu_1}.$$

И, с учетом $P(2,i)$ и $P(1,i)$, находим из второго равенства системы (1) $P(0,i+1)$:

$$P(0,i+1) = \frac{P(1,i)\left(\lambda \frac{N-i-1}{N} + \frac{i\sigma}{N} + \mu_1\right) - \lambda \frac{N-i}{N} P(0,i)}{\sigma(i+1)} N,$$

если $i < N$, то $i := i+1$ и на шаг 3;

4. Если $i = N$, то используем одно уравнение для нахождения величины $P(2,N)$:

$$P(2,N) = \frac{\frac{\sigma(N-1)}{N} P(1,N-1) + \lambda \frac{1}{N} P(1,N-2) + \lambda \frac{1}{N} P(2,N-1)}{\mu_2},$$

а второе уравнение для оценки величины погрешности численного алгоритма, определив невязку Δ в виде

$$\Delta = \mu_2 P(2,N) - \sigma P(0,N).$$

Далее, получаем величину p :

$$\sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^N P(k,i) = p,$$

а затем, поделив $P(k,i)$ на p , находим распределение вероятностей состояний системы. Тогда несложно получить семиинварианты первых трех порядков, используя формулы

$$K_1 = \sum_{i=0}^N i P(i), \quad K_2 = \sum_{i=0}^N (i - \kappa_1)^2 P(i), \quad K_3 = \sum_{i=0}^N (i - \kappa_1)^3 P(i),$$

где одномерное маргинальное распределение $P(i)$ определяется равенством

$$P(i) = \sum_{k=0}^2 P(k,i).$$

Пусть $N = \{10, 20, 30, 40, 50, 100, 500, 1000\}$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\lambda = 0,4$, $\sigma = 5$.

Для последнего столбца таблицы взяты коэффициенты κ_v асимптотических семиинвариантов первого, второго и третьего порядков, найденные при применении уравнений (9) – (10) и формул (20) и (32).

Асимптотические и численные семиинварианты

$K_v(N)/N$	N							
	20	30	40	50	100	500	1000	$N \rightarrow \infty$
$K_1(N)/N$	0,256	0,260	0,262	0,264	0,267	0,272	0,271	0,271
$K_2(N)/N$	0,624	0,673	0,704	0,724	0,772	0,819	0,826	0,832
$K_3(N)/N$	1,010	1,106	1,153	1,178	1,202	1,152	1,136	1,188

Приведенные в таблице результаты не противоречат основному результату работы о том, что с ростом N последовательности $K_v(N)/N$ сходятся к κ_v , поэтому с определенной погрешностью

$$\delta_v = \frac{|\kappa_v - K_v(N)/N|}{\kappa_v}$$

допредельные значения $K_v(N)$ можно заменить на их предельные семиинварианты $N \cdot \kappa_v$.

В частности, для $\delta_v \leq 0,1$ такая замена возможна при $N \geq 20$ для κ_1 , при $N \geq 100$ для κ_2 и при $N \geq 30$ для κ_3 . При $\delta_v \leq 0,05$ областью применимости асимптотических семиинвариантов является $N \geq 20$ для κ_1 , $N \geq 200$ для κ_2 и $N \geq 300$ для κ_3 .

Заключение

В работе предложен метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели сети связи с оповещением о конфликте, конечным числом абонентских станций и источником повторных вызовов. Предложена и рассмотрена математическая модель данной сети связи для стационарного случая. Применен метод асимптотических семиинвариантов в условии растущего числа станций. Реализован численный алгоритм расчета семиинвариантов первых трех порядков для допредельной ситуации. Проведено сравнение численных расчетов с асимптотическими.

Проделанная работа позволяет сделать вывод о том, что применение метода асимптотических семиинвариантов целесообразно при $N \geq 100$, что позволяет находить значения $K_v(N)$ с погрешностью $\delta_v \leq 0,1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А., Пичугин С.Б. Исследование спутниковой сети связи методом математического моделирования // Изв. вузов. Физика. 1992. № 9. С. 120 – 129.
2. Назаров А.А., Одышев Ю.Д. Исследование сетей связи с протоколами «адаптивная Алоха» для конечного числа станций в условиях перегрузки // Проблемы передачи информации. 2000. № 3. С. 83 – 93.
3. Назаров А.А., Никитина М.А. Применение условий эргодичности цепей Маркова к исследованию существования стационарных режимов в сетях связи // Автоматика и вычислительная техника. 2003. № 1. С. 59 – 66.

4. Назаров А.А., Одышев Ю.Д. Исследование сети связи с динамическим протоколом «синхронная Алоха» в условиях большой загрузки // Автоматика и вычислительная техника. 2001. № 1. С. 77 – 84.
5. Назаров А.А., Цой С.А. Общий подход к исследованию марковских моделей сетей передачи данных, управляемых статистическими протоколами случайного множественного доступа // Автоматика и вычислительная техника. 2004. № 4. С. 73 – 85.
6. Хомичков И.И. Исследование моделей локальной сети с протоколом случайного множественного доступа // Автоматика и телемеханика. 1993. № 12. С. 89 – 90.
7. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: БГУ, 2000. С. 221.
8. Щербо В.К., Киреичев В.М., Самойленко С.И. Стандарты по локальным вычислительным сетям: Справочник. М.: Радио и связь, 1990. С. 304.
9. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979. С. 598.
10. D'Apice C., De Simone T., Manzo R., Rizelian G. Priority service of primery customers in the M/G/1/r retrial queueing system with server searching for customers // J. Information Theory and Information Processing. 2004. V. 4. No. 1. P. 13 – 23.
11. Bocharov P., D'Apice C., D'Auria B., Salerno S. A queueing system of finite capacity with the server requiring a priority search for customers // Vestnik RUDN, Seria Prikladnaia Matematika I Informatika. 2000. No. 12. P. 50 – 61.
12. Bocharov P., D'Apice C., Phong N., Rizelian G. Retrial servicing of multivariate Poisson flow with customer-searching server with finite buffer // Vestnik RUDN, Seria Prikladnaia Matematika I Informatika. 2002. No. 1. P. 98 – 106.
13. Artalejo J.R., Joshua V.C., Krishnamoorthy A. An M/G/1 retrial gueue with orbital search by the server // Advances in Stochastic Modeling / J.R. Artalejo, A. Krishnamoorthy (Eds). Notable publications, New Jersey, 2002. P. 41 – 54.
14. Колоусов Д.В., Назаров А.А., Цой С.А. Исследование вероятностно-временных характеристик бистабильных сетей случайного доступа // Автоматика и телемеханика. 2006. № 2. С. 90 – 105.
15. Коцюруба П.И., Назаров А.А. Исследование асимптотических средних характеристик немарковских моделей неустойчивых сетей случайного доступа // Проблемы передачи информации. 2003. № 3. С. 77 – 88.
16. Коцюруба П.И., Назаров А.А. Локальная диффузионная аппроксимация процесса изменения состояний неустойчивой сети случайного доступа в окрестности асимптотического среднего // Проблемы передачи информации. 2004. № 1. С. 85 – 97.
17. Neuts M.F., Ramalhoto M.F. A service model in which the server is required to search for customers // J. Appl. Prob. 1984. V. 21. P. 157 – 166.
18. Bocharov P., D'Apice C., Phong N., Rizelian G. Retrial servicing of Poisson flow in a system of finite capacity with customer-searching server // Vestnik RUDN, Seria Prikladnaia Matematika I Informatika. 2002. No. 1. P. 87 – 97.
19. D'Apice C., Manzo R. Search for customers in a finite capacity queueing system with phase-type distributions // Information Processes, Electronic Scientific Journal. 2003. V. 3. No. 1. P. 61 – 69.
20. Bocharov P.P., Pavlova O.I., Puzikova D.A. M/G/1/r retrial queueing system with priority of primary customers // Mathematical and Computer Modeling. 1999. V. 30. P. 89 – 98.
21. Лившиц Б.С., Пиеничников Ф.П., Харкевич А.Д. Теория телетрафика. М.: Связь, 1979.

Работа выполнена при поддержке АВИЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 гг.)» федерального агентства по образованию по проекту «Разработка методов исследования немарковских СМО и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

Судыко Елена Александровна

Назаров Анатолий Андреевич

Томский государственный университет

E-mail: ESudyko@yandex.ru; nazarov@fpmk.tsu.ru

Поступила в редакцию 14 февраля 2009 г.