МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.872

В.А. Вавилов, А.А. Назаров

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ СЕТЕЙ МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА С ИСТОЧНИКОМ ПОВТОРНЫХ ВЫЗОВОВ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИМ В ПОЛУМАРКОВСКОЙ СРЕДЕ

Предлагаются математические модели неустойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в полумарковской среде. Исследуются асимптотические средние характеристики рассматриваемых сетей, величины отклонения нормированного числа заявок в источнике повторных вызовов от их асимптотического среднего. Проводится глобальная аппроксимация процесса изменения числа заявок в источнике повторных вызовов и исследуется плотность распределения вероятностей значений этого процесса.

Ключевые слова: *модели неустойчивых сетей*, *сети множественного доступа*, *глобальная аппроксимация.*

Необходимость оптимизации сетей связи, математическими моделями которых являются системы массового обслуживания (СМО), привела к рассмотрению управляемых систем массового обслуживания [1]. По-другому такие системы называют системами с переменными параметрами [2].

В данной работе рассматриваются математические модели компьютерных сетей в виде СМО, в которых изменение параметров происходит под воздействием внешнего фактора – случайной среды.

Влияние случайных внешних воздействий может непосредственно отражаться на интенсивности входящего потока, а также на интенсивности обслуживания заявок на приборе. Первая ситуация достаточно широко рассмотрена в ряде работ, в том числе в трудах [3, 4]. Ситуация второго рода рассмотрена нами, например, в работах [5 – 8].

Однако вполне очевидна ситуация, при которой влияние случайной среды сказывается на интенсивности обращения заявок на прибор из источника повторных вызовов. Данному случаю на сегодняшний день уделяется мало внимания. Некоторым образом, работы [9 – 12] восполняют этот пробел. В данной работе предлагаются математические модели неустойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в полумарковской среде.

1. Математическая модель

Рассмотрим математическую модель сети множественного доступа с оповещением о конфликте в виде однолинейной системы массового обслуживания (СМО), на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок. Прибор этой СМО может находиться в одном из трех состояний: $k = 0$, если он свободен; $k = 1$, если он занят обслуживанием заявки; $k = 2$, если на приборе реализуется этап оповещения о конфликте. Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает немедленно обслуживаться. Продолжительность обслуживания заявки на приборе имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Если в течение обслуживания этой заявки другие требования на прибор не поступают, то исходная заявка по завершении обслуживания покидает систему. Если во время обслуживания одной заявки поступает другая, то возникает конфликт. От этого момента начинается этап оповещения о конфликте. Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на этапе оповещения о конфликте, переходят в источник повторных вызовов (ИПВ). Число заявок в ИПВ обозначим i. Длины интервалов оповещения о конфликте также имеют экспоненциальное распределение с параметром $1/a$, где a – средняя продолжительность этих интервалов.

Сеть функционирует в случайной среде. В качестве математической модели случайной среды рассмотрим полумарковский процесс [13, 14] $s(t)$ с непрерывным временем t, то есть такой дискретный случайный процесс, который принимает значения из конечного множества состояний $s = 1, 2, ..., S$ и для которого вложенная по моментам времени t_n изменения состояний цепь $s(t_n)$ является марковской. Времена пребывания этого процесса в различных состояниях являются условно независимыми случайными величинами, распределение вероятностей значений которых зависит лишь от номера состояния полумарковского процесса.

Для определения полумарковского процесса $s(t)$ зададим стохастическую матрицу одношаговых вероятностей $p_{s_1 s_2}$ переходов вложенной цепи Маркова $p_{s_1 s_2} = P(s(t_{n+1}) = s_2 \,|\, s(t_n) = s_1)$, при этом будем полагать, что $p_{ss} = 0$. Понятно, что

$$\sum_{s_2=1}^{S} p_{s_1 s_2} = 1, \quad s = 1, 2, ..., S. \qquad (1)$$

Также зададим набор функций распределения $G_s(x)$ значений времени пребывания полумарковского процесса в s-м состоянии.

Будем полагать, что влияние случайной среды на функционирование сети определяется зависимостью интенсивности γ обслуживания заявок в ИПВ от состояний s случайной среды, то есть $\gamma = \gamma(s)$. Вероятность окончания обслуживания заявки на приборе за бесконечно малый промежуток времени Δt равна $\gamma(s)\Delta t + o(t)$, при условии, что среда находится в состоянии s.

В силу свойств приведенной математической модели трехмерный случайный вектор $\{k(t), i(t), s(t)\}$ изменения во времени состояний $\{k(t), i(t)\}$ математической модели сети связи и состояний $\{s(t)\}$ математической модели случайной среды является полумарковским процессом.

Для исследования описанной математической модели марковизируем [15] процесс $\{k(t), i(t), s(t)\}$ методом дополнительной переменной. Введем переменную $\zeta(t)$, имеющую смысл длины интервала времени от момента t до момента смены текущего состояния случайной среды, тогда процесс изменения значений вектора $\{k(t), i(t), s(t), \zeta(t)\}$ является марковским процессом [13, 14].

Обозначим $P(k(t) = k, i(t) = i, s(t) = s, \zeta(t) < \zeta) = P_k(i, s, \zeta, t)$.

В любой момент времени должно выполняться условие нормировки $\sum_{k=0}^{2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{S} P_k(i, s, \infty, t) = 1$.

Для вероятностей $P_k(i,s,\zeta,t)$ можно составить следующую систему конечно-разностных уравнений [15] Δt-методом.

$$P_0(i,s,\zeta,t+\Delta t)(1-(\lambda+i\gamma(s))\Delta t)\ \left(P_0(i,s,\zeta+\Delta t,t)-P_0(i,s,\Delta t,t)\right)+$$

$$+\mu\Delta t P_1(i,s,\zeta+\Delta t,t)+\frac{1}{a}\Delta t P_2(i,s,\zeta+\Delta t,t)+\ G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S} p_{s_1 s}P_0(i,s_1,\Delta t,t)+o(\Delta t),$$

$$P_1(i,s,\zeta,t+\Delta t)=(1-(\lambda+i\gamma(s)+\mu)\Delta t)\ \left(P_1(i,s,\zeta+\Delta t,t)-P_1(i,s,\Delta t,t)\right)+$$

$$+\lambda\Delta t P_0(i,s,\zeta+\Delta t,t)+(i+1)\gamma(s)\Delta t P_0(i+1,s,\zeta+\Delta t,t)+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S} p_{s_1 s}P_1(i,s_1,\Delta t,t)+o(\Delta t),$$

$$P_2(i,s,\zeta,t+\Delta t)=\left(1-\left(\lambda+\frac{1}{a}\right)\Delta t\right)\ \left(P_2(i,s,\zeta+\Delta t,t)-P_2(i,s,\Delta t,t)\right)+$$

$$+\lambda\Delta t P_1(i-2,s,\zeta+\Delta t,t)+(i-1)\gamma(s)\Delta t P_1(i-1,s,\zeta+\Delta t,t)+$$

$$+\lambda\Delta t P_2(i-1,s,\zeta+\Delta t,t)+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S} p_{s_1 s}P_2(i,s_1,\Delta t,t)+o(\Delta t).$$

Разложим функции $P_k(i,s,\zeta+\Delta t,t)$ в ряд по приращениям аргумента ζ, в результате получим

$$P_0(i,s,\zeta,t+\Delta t)=(1-(\lambda+i\gamma(s))\Delta t)\left(P_0(i,s,\zeta,t)+\Delta t\frac{\partial P_0(i,s,\zeta,t)}{\partial\zeta}-\Delta t\frac{\partial P_0(i,s,0,t)}{\partial\zeta}\right)+$$

$$+\mu\Delta t P_1(i,s,\zeta,t)+\frac{1}{a}\Delta t P_2(i,s,\zeta,t)+\ G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\Delta t\frac{\partial P_0(i,s_1,0,t)}{\partial\zeta}p_{s_1 s}+o(\Delta t),$$

$$P_1(i,s,\zeta,t+\Delta t)=(1-(\lambda+i\gamma(s)+\mu)\Delta t)\left(P_1(i,s,\zeta,t)+\Delta t\frac{\partial P_1(i,s,\zeta,t)}{\partial\zeta}-\Delta t\frac{\partial P_1(i,s,0,t)}{\partial\zeta}\right)+$$

$$+\lambda\Delta t P_0(i,s,\zeta,t)+(i+1)\gamma(s)\Delta t P_0(i+1,s,\zeta,t)+\ G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\Delta t\frac{\partial P_1(i,s_1,0,t)}{\partial\zeta}p_{s_1 s}+o(\Delta t),$$

$$P_2(i,s,\zeta,t+\Delta t)=\left(1-\left(\lambda+\frac{1}{a}\right)\Delta t\right)\left(P_2(i,s,\zeta,t)+\Delta t\frac{\partial P_2(i,s,\zeta,t)}{\partial\zeta}-\Delta t\frac{\partial P_2(i,s,0,t)}{\partial\zeta}\right)+$$

$$+\lambda\Delta t P_1(i-2,s,\zeta,t)+(i-1)\gamma(s)\Delta t P_1(i-1,s,\zeta,t)+\ \lambda\Delta t P_2(i-1,s,\zeta+\Delta t,t)+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\Delta t\frac{\partial P_2(i,s_1,0,t)}{\partial\zeta}p_{s_1 s}+o(\Delta t).$$

Представим интенсивность γ обращения заявок на прибор из ИПВ в виде $\gamma(s)=\gamma\sigma(s)$. Поделим уравнения системы на Δt и при $\Delta t\to 0$ для распределения $P_k(i,s,\zeta,t)$ получим следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P_0(i,s,\zeta,t)}{\partial t}+(\lambda+i\gamma\sigma(s))P_0(i,s,\zeta,t)=\frac{\partial P_0(i,s,\zeta,t)}{\partial\zeta}-\frac{\partial P_0(i,s,0,t)}{\partial\zeta}+\mu P_1(i,s,\zeta,t)+$$

$$+\frac{1}{a}P_2(i,s,\zeta,t)+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial P_0(i,s_1,0,t)}{\partial\zeta}p_{s_1 s},$$

$$\frac{\partial P_1(i,s,\zeta,t)}{\partial t}+(\lambda+i\gamma\sigma(s)+\mu)P_1(i,s,\zeta,t)=\frac{\partial P_1(i,s,\zeta,t)}{\partial\zeta}-\frac{\partial P_1(i,s,0,t)}{\partial\zeta}+\lambda P_0(i,s,\zeta,t)+$$

$$+(i+1)\gamma\sigma(s)P_0(i+1,s,\zeta,t)+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial P_1(i,s_1,0,t)}{\partial\zeta}p_{s_1s}\ ,$$

$$\frac{\partial P_2(i,s,\zeta,t)}{\partial t}+\left(\lambda+\frac{1}{a}\right)P_2(i,s,\zeta,t)=\frac{\partial P_2(i,s,\zeta,t)}{\partial\zeta}-\frac{\partial P_2(i,s,0,t)}{\partial\zeta}+\lambda P_2(i-1,s,\zeta,t)+$$

$$+\lambda P_1(i-2,s,\zeta,t)+(i-1)\gamma\sigma(s)\ P_1(i-1,s,\zeta,t)+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial P_2(i,s_1,0,t)}{\partial\zeta}p_{s_1s}\ . \qquad (2)$$

Решение $P_k(i,s,\zeta,t)$ системы (2) достаточно полно определяет функционирование математической модели сети связи и ее вероятностно-временные характеристики, но для нее не существует точных аналитических методов решения, поэтому данную систему будем исследовать модифицированным для нестационарных распределений методом асимптотического анализа [16, 17] в условиях большой задержки $\gamma\to 0$.

Обозначим

$$\gamma=\varepsilon^2,\ \varepsilon^2 t=\tau \qquad (3)$$

и рассмотрим предельный процесс

$$x(\tau)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)\right),$$

имеющий смысл асимптотического среднего нормированного числа заявок в ИПВ, покажем, что он является детерминированной функцией.

Рассмотрим также процесс

$$y(\tau)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left(\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)-x(\tau)\right)\big/\varepsilon\right),$$

который характеризует изменение величин отклонения нормированного числа заявок в ИПВ от их асимптотического среднего и покажем, что он является диффузионным процессом авторегрессии. Процесс изменения состояний канала $k(\tau/\varepsilon^2)$ при $\varepsilon\to 0$ является дискретным марковским процессом, независимым от процесса $y(\tau)$.

Используя предельные процессы $x(\tau)$ и $y(\tau)$ для достаточно малых значений параметра ε, рассмотрим процесс

$$z(\tau)=x(\tau)+\varepsilon y\,,$$

который аппроксимирует процесс изменения числа заявок в ИПВ $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$, и покажем, что он является однородным диффузионным процессом.

Учитывая обозначения (3), выполним следующие замены в системе (2):

$$\varepsilon^2 i=x+\varepsilon y\,,\quad \frac{1}{\varepsilon}P_k(i,s,\zeta,t)=H_k(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\,, \qquad (4)$$

тогда получим систему вида

$$\varepsilon^2\frac{\partial H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+\ (\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y))H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=$$

$$= \frac{\partial H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_0(y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} + \mu H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) +$$

$$+ \frac{1}{a} H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^{S} \frac{\partial H_0(y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} ,$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + (\lambda + \sigma(s)(x+\varepsilon y) + \mu) H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) =$$

$$= \frac{\partial H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_1(y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} + \lambda H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) +$$

$$+ \sigma(s)(x+\varepsilon(y+\varepsilon)) H_0(y+\varepsilon,s,\zeta,\tau,\varepsilon) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^{S} \frac{\partial H_1(y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} ,$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + \left(\lambda + \frac{1}{a}\right) H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) = \frac{\partial H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} -$$

$$- \frac{\partial H_2(y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} + \lambda H_2(y-\varepsilon,s,\zeta,\tau,\varepsilon) + \lambda H_1(y-2\varepsilon,s,\zeta,\tau,\varepsilon) +$$

$$\sigma(s)(x+\varepsilon(y-\varepsilon)) H_1(y-\varepsilon,s,\zeta,\tau,\varepsilon) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^{S} \frac{\partial H_1(y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} . \tag{5}$$

Дальнейшие исследования будем проводить, основываясь на этой системе.

2. Исследование асимптотических средних характеристик

Под асимптотическими средними характеристиками будем понимать распределение вероятностей $R_k(x)$ состояний канала сети связи и функцию $x(\tau)$.

Теорема 1. *Асимптотическое при* $\gamma \to 0$ *среднее значение нормированного числа заявок в ИПВ* $x(\tau)$ *есть детерминированная функция, определяемая обыкновенным дифференциальным уравнением вида*

$$x'(\tau) = -\psi_0 x R_0(x) + \lambda R_2(x) + (2\lambda + \psi_1 x) R_1(x) . \tag{6}$$

Здесь величины ψ_k, $k = 0, 1$ *определяются пределом* (*15*), *а распределения* $R_k(x)$, $k = 0,1,2$ *– равенством*

$$R_k(x) = \lim_{\zeta \to \infty} \sum_{s=1}^{S} Q_k(x,s,\zeta) , \tag{7}$$

в котором функции $Q_k(x,s,\zeta)$ *определяются системой* (*11*) *и условием нормировки* (*12*).

Доказательство. В системе (5) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ и, полагая, что существуют конечные пределы

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H_k(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) = H_k(y,s,\zeta,\tau) , \tag{8}$$

получим систему

$$(\lambda+\sigma(s)x)H_0(y,s,\zeta,\tau)=\frac{\partial H_0(y,s,\zeta,\tau)}{\partial\zeta}-\frac{\partial H_0(y,s,0,\tau)}{\partial\zeta}+\mu H_1(y,s,\zeta,\tau)+$$

$$+\frac{1}{a}H_2(y,s,\zeta,\tau)+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H_0(y,s_1,0,\tau)}{\partial\zeta}p_{s_1s}\ ,$$

$$(\lambda+\sigma(s)x+\mu)H_1(y,s,\tau)=\frac{\partial H_1(y,s,\zeta,\tau)}{\partial\zeta}-\frac{\partial H_1(y,s,0,\tau)}{\partial\zeta}+(\lambda+\sigma(s)x)H_0(y,s,\zeta,\tau)+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H_1(y,s_1,0,\tau)}{\partial\zeta}p_{s_1s}\ ,$$

$$\frac{1}{a}H_2(y,s,\zeta,\tau)=\frac{\partial H_2(y,s,\zeta,\tau)}{\partial\zeta}-\frac{\partial H_2(y,s,0,\tau)}{\partial\zeta}+(\lambda+\sigma(s)x)H_1(y,s,\zeta,\tau)+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H_2(y,s_1,0,\tau)}{\partial\zeta}p_{s_1s}\ . \tag{9}$$

Решение $H_k(y,s,\zeta,\tau)$ системы (9) будем искать в виде

$$H_k(y,s,\zeta,\tau)=Q_k(x,s,\zeta)H(y,\tau)\,. \tag{10}$$

Тогда $Q_k(x,s,\zeta)$, имеющая смысл условного совместного распределения вероятностей состояний k канала и s среды при условии $x(\tau)=x$, как следует из (9), определяется системой вида

$$(\lambda+\sigma(s)x)Q_0(x,s,\zeta)=\frac{\partial Q_0(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial Q_0(x,s,0)}{\partial\zeta}+\mu Q_1(x,s,\zeta)+\frac{1}{a}Q_2(x,s,\zeta)+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial Q_0(x,s,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}\ ,$$

$$(\lambda+\sigma(s)x+\mu)Q_1(x,s,\zeta)=\frac{\partial Q_1(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial Q_1(x,s,0)}{\partial\zeta}+(\lambda+\sigma(s)x)Q_0(x,s,\zeta)+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial Q_1(x,s,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}\ ,$$

$$\frac{1}{a}Q_2(x,s,\zeta)=\frac{\partial Q_2(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial Q_2(x,s,0)}{\partial\zeta}+(\lambda+\sigma(s)x)Q_1(x,s,\zeta)+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial Q_1(x,s,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s} \tag{11}$$

и условием нормировки

$$\sum_{k=0}^{2}\sum_{s=1}^{S}Q_k(x,s,\infty)=1\,. \tag{12}$$

Будем полагать, что $Q_k(x,s,\zeta)$ известны, если удается каким-либо образом решить систему (11).

Далее покажем, что $x=x(\tau)$ является детерминированной функцией.

В системе (5) функции $H_k(y\pm\varepsilon,s,\tau,\varepsilon)$ разложим в ряд по приращениям аргумента y с точностью до $o(\varepsilon)$, получим

$$-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+(\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y))H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=$$
$$=\frac{\partial H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}-\frac{\partial H_0(y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}+\mu H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$
$$+\frac{1}{a}H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H_0(y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1s},$$
$$-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+(\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y)+\mu)H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=\frac{\partial H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}-$$
$$-\frac{\partial H_1(y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}+(\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y))H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+\varepsilon\sigma(s)x\frac{\partial H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H_1(y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1s}+o(\varepsilon),$$
$$-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+\frac{1}{a}H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=\frac{\partial H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}-\frac{\partial H_2(y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}+$$
$$+(\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y))H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)-\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\{\lambda H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$
$$+(2\lambda+\sigma(s)x)H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\}+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H_2(y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1s}+o(\varepsilon). \quad (13)$$

Все уравнения системы (13) просуммируем по k и по s, учтем (1) и при $\zeta\to\infty$ получим

$$-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial}{\partial y}\left\{\sum_{k=0}^{2}\sum_{s=1}^{S}H_k(y,s,\infty,\tau,\varepsilon)\right\}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left\{x\sum_{s=1}^{S}\sigma(s)H_0(y,s,\infty,\tau,\varepsilon)-\right.$$
$$\left.\lambda\sum_{s=1}^{S}H_2(y,s,\infty,\tau,\varepsilon)-\sum_{s=1}^{S}(2\lambda+\sigma(s)x)H_1(y,s,\infty,\tau,\varepsilon)\right\}+o(\varepsilon).$$

Поделим на ε обе части полученного уравнения, выполним предельный переход (8), учтем (10), получим

$$-x'(\tau)\sum_{k=0}^{2}\sum_{s=1}^{S}Q_k(x,s,\infty)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}=\left\{x\sum_{s=1}^{S}\sigma(s)Q_0(x,s,\infty)-\lambda\sum_{s=1}^{S}Q_2(x,s,\infty)-\right.$$
$$\left.-\sum_{s=1}^{S}(2\lambda+\sigma(s)x)Q_1(x,s,\infty)\right\}\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}.$$

Учтем условие нормировки (12), обозначим

$$R_k(x)=\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{s=1}^{S}Q_k(x,s,\zeta); \quad (14)$$

$$\psi_kR_k(x)=\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{s=1}^{S}\sigma(s)Q_k(x,s,\zeta), \quad k=0,1, \quad (15)$$

заметим, что $R_k(x)$ имеет смысл распределения вероятностей состояний канала. Тогда получим

$$\{x'(\tau)+\psi_0 xR_0(x)-\lambda R_2(x)-(2\lambda+\psi_1 x)R_1(x)\}\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}=0\,.$$

Поскольку производная плотности распределения $H(y,\tau)$ не может тождественно равняться нулю, следовательно, функция $x = x(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$x'(\tau)=-\psi_0 xR_0(x)+\lambda R_2(x)+(2\lambda+\psi_1 x)R_1(x)\,. \tag{16}$$

Здесь $R_k(x),\ k=0,1,2$, есть распределение вероятностей состояний канала, определяемое равенствами (14), где $Q_k(x,s,\zeta)$ – двумерное распределение вероятностей состояний k канала и состояний s случайной среды, которое определяется системой (11) и условием нормировки (12). Таким образом, (16) совпадает с (6). ***Теорема доказана.***

3. Исследование величин отклонения нормированного числа заявок в ИПВ от их асимптотического среднего

Покажем, что процесс $y(\tau)$, характеризующий изменение величин отклонения нормированного числа заявок в ИПВ от их асимптотического среднего, является диффузионным процессом авторегрессии. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Асимптотически при* $\gamma\to 0$ *случайный процесс* $y(\tau)$ *определяется стохастическим дифференциальным уравнением вида*

$$dy(\tau)=A'_x(x)y(\tau)d\tau+B(x)dw(\tau)\,, \tag{17}$$

где $w(\tau)$ *есть стандартный винеровский процесс,* $A'(x)$ *есть производная по* x *от правой части дифференциального уравнения* (6), *а функция* $B(x)$ *определяется равенством*

$$B^2(x)=\psi_0 xR_0(x)+\lambda R_2(x)+(4\lambda+\psi_1 x)R_1(x)+$$
$$+2\left[\eta_0\,x\,h_0^{(1)}(x)-\lambda h_2^{(1)}(x)-(2\lambda+\eta_1 x)h_1^{(1)}(x)+\ x'(\tau)\sum_{k=0}^{2}h_k^{(1)}(x)\right], \tag{18}$$

в котором параметры a *и* λ *заданы, распределения* $R_k(x)$ *определяются равенствами* (7), *величины* ψ_k *определяются обозначением* (15), *а величины* $h_k^{(1)}(x)$ – *пределом* (29), *в котором функции* $h_k^{(1)}(x,s,\zeta)$ – *есть решение системы* (22).

Доказательство. Будем искать решение $H_k(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)$ системы (13) в виде следующего разложения:

$$H_k(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=Q_k(x,s,\zeta)H(y,\tau)+\ \varepsilon h_k(y,s,\zeta,\tau)+o(\varepsilon). \tag{19}$$

Подставим в систему (13) разложение (19), учтем (11) и запишем полученную систему, сократив на ε все уравнения в следующем виде:

$$-(\lambda+\sigma(s)x)h_0(y,s,\zeta,\tau)+\mu h_1(y,s,\zeta,\tau)+\frac{1}{a}h_2(y,s,\zeta,\tau)+\frac{\partial h_0(y,s,\zeta,\tau)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_0(y,s,0,\tau)}{\partial\zeta}+$$
$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_0(y,s_1,0,\tau)}{\partial\zeta}p_{s_1 s}=Q_0(x,s,\zeta)\sigma(s)yH(y,\tau)-x'(\tau)Q_0(x,s,\zeta)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}\,,$$

$$-(\lambda+\sigma(s)x+\mu)h_1(y,s,\zeta,\tau))+(\lambda+\sigma(s)x)h_0(y,s,\zeta,\tau)+\frac{\partial h_1(y,s,\zeta,\tau)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_1(y,s,0,\tau)}{\partial\zeta}+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_1(y,s_1,0,\tau)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=$$

$$=\sigma(s)\left(Q_1(x,s,\zeta)-Q_0(x,s,\zeta)\right)yH(y,\tau)-\left(x'(\tau)Q_1(x,s,\zeta)+\sigma(s)xQ_0(x,s,\zeta)\right)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y},$$

$$-\frac{1}{a}h_2(y,s,\zeta,\tau)+(\lambda+\sigma(s)x)h_1(y,s,\zeta,\tau)+\frac{\partial h_2(y,s,\zeta,\tau)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_2(y,s,0,\tau)}{\partial\zeta}+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_2(y,s_1,0,\tau)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=-\sigma(s)Q_1(x,s,\zeta)yH(y,\tau)+$$

$$+\left[(\lambda-x'(\tau))Q_2(x,s,\zeta)+(2\lambda+\sigma(s)x)Q_1(x,s,\zeta)\right]\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}. \quad (20)$$

Будем искать решение системы (20) в виде

$$h_k(y,s,\zeta,\tau)=h_k^{(1)}(x,s,\zeta)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}+h_k^{(2)}(x,s,\zeta)yH(y,\tau). \quad (21)$$

Подставим (21) в (20) и представим систему в виде двух систем

$$-(\lambda+\sigma(s)x)h_0^{(1)}(x,s,\zeta)+\mu h_1^{(1)}(x,s,\zeta)+\frac{1}{a}h_2^{(1)}(x,s,\zeta)+\frac{\partial h_0^{(1)}(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_0^{(1)}(x,s,0)}{\partial\zeta}+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_0^{(1)}(x,s_1,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=-x'(\tau)Q_0(x,s),$$

$$-(\lambda+\sigma(s)x+\mu)h_1^{(1)}(x,s,\zeta)+(\lambda+\sigma(s)x)h_0^{(1)}(x,s,\zeta)+\frac{\partial h_1^{(1)}(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_1^{(1)}(x,s,0)}{\partial\zeta}+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_1^{(1)}(x,s_1,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=-x'(\tau)Q_1(x,s,\zeta)-\sigma(s)xQ_0(x,s,\zeta),$$

$$-\frac{1}{a}h_2^{(1)}(x,s,\zeta)+(\lambda+\sigma(s)x)h_1^{(1)}(x,s,\zeta)+\frac{\partial h_2^{(1)}(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_2^{(1)}(x,s,0)}{\partial\zeta}+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_2^{(1)}(x,s_1,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=(\lambda-x'(\tau))Q_2(x,s,\zeta)+(2\lambda+\sigma(s)x)Q_1(x,s,\zeta) \quad (22)$$

и

$$-(\lambda+\sigma(s)x)h_0^{(2)}(x,s,\zeta)+\mu h_1^{(2)}(x,s,\zeta)+\frac{1}{a}h_2^{(2)}(x,s,\zeta)+$$

$$+\frac{\partial h_0^{(2)}(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_0^{(2)}(x,s,0)}{\partial\zeta}+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_0^{(2)}(x,s_1,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=\sigma(s)Q_0(x,s,\zeta),$$

$$-(\lambda+\sigma(s)x+\mu)h_1^{(2)}(x,s,\zeta)+(\lambda+\sigma(s)x)h_0^{(2)}(x,s,\zeta)+\frac{\partial h_1^{(2)}(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-$$

$$-\frac{\partial h_1^{(2)}(x,s,0)}{\partial\zeta}+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_1^{(2)}(x,s_1,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=\sigma(s)\left(Q_1(x,s,\zeta)-Q_0(x,s,\zeta)\right),$$

$$-\frac{1}{a}h_2^{(2)}(x,s,\zeta)+(\lambda+\sigma(s)x)h_1^{(2)}(x,s,\zeta)+\frac{\partial h_2^{(2)}(x,s,\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\partial h_2^{(2)}(x,s,0)}{\partial\zeta}+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial h_2^{(2)}(x,s_1,0)}{\partial\zeta}p_{s_1s}=-\sigma(s)Q_1(x,s,\zeta). \quad (23)$$

Продифференцируем систему (11) по x, получим

$$-(\lambda+\sigma(s)x)\frac{\partial Q_0(x,s,\zeta)}{\partial x}+\mu\frac{\partial Q_1(x,s,\zeta)}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial Q_2(x,s,\zeta)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_0(x,s,\zeta)}{\partial x}\right\}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_0(x,s,0)}{\partial x}\right\}+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_0(x,s,0)}{\partial x}\right\}p_{s_1s}=\sigma(s)Q_0(x,s,\zeta),$$

$$-(\lambda+\sigma(s)x+\mu)\frac{\partial Q_1(x,s,\zeta)}{\partial x}+(\lambda+\sigma(s)x)\frac{\partial Q_0(x,s,\zeta)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_1(x,s,\zeta)}{\partial x}\right\}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_1(x,s,0)}{\partial x}\right\}+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_0(x,s,0)}{\partial x}\right\}p_{s_1s}=\sigma(s)\left(Q_1(x,s,\zeta)-Q_0(x,s,\zeta)\right),$$

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial Q_2(x,s,\zeta)}{\partial x}+(\lambda+\sigma(s)x)\frac{\partial Q_1(x,s,\zeta)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_2(x,s,\zeta)}{\partial x}\right\}-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_2(x,s,0)}{\partial x}\right\}+$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{\partial Q_2(x,s,0)}{\partial x}\right\}p_{s_1s}=-\sigma(s)Q_1(x,s,\zeta). \quad (24)$$

Из (23) и (24) следует, что решение $h_k^{(2)}(x,s,\zeta)$ системы (23) имеет вид

$$h_k^{(2)}(x,s,\zeta)=\frac{\partial Q_k(x,s,\zeta)}{\partial x}. \quad (25)$$

С учетом (25) и (21) разложение (19) можно представить как

$$H_k(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=Q_k(x,s,\zeta)H(y,\tau)+\varepsilon h_k^{(1)}(x,s,\zeta)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}+$$

$$+\varepsilon yH(y,\tau)\frac{\partial Q_k(x,s,\zeta)}{\partial x}+o(\varepsilon). \quad (26)$$

Теперь найдем вид функции $H(y,\tau)$. Для этого функции в правой части системы (5) разложим в ряд по приращениям аргумента y с точностью до $o(\varepsilon^2)$, получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+(\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y))H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)=$$

$$=\frac{\partial H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}-\frac{\partial H_0(y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}+\mu H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$

$$+\frac{1}{a}H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H_0(y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1s},$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} - \varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + (\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y)+\mu)H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) =$$

$$= \frac{\partial H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta} - \frac{\partial H_1(y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta} + (\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y))H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon\sigma(s)\frac{\partial}{\partial y}\{(x+\varepsilon y)H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\} + \sigma(s)x\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y^2} +$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H_1(y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1 s} + o(\varepsilon^2),$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} - \varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial y} +$$

$$+\frac{1}{a}H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) = \frac{\partial H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta} - \frac{\partial H_2(y,s,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta} +$$

$$+(\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y))H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) -$$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\{(2\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y))H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+\lambda H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\} +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{(4\lambda+\sigma(s)x)H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+\lambda H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\} +$$

$$+G_s(\zeta)\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H_2(y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1 s} + o(\varepsilon^2). \qquad (27)$$

Сложим все уравнения системы (27) по k, получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\sum_{k=0}^{2}H_k(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\right\} - \varepsilon x'(\tau)\frac{\partial}{\partial y}\left\{\sum_{k=0}^{2}H_k(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\right\} =$$

$$=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\sum_{k=0}^{2}H_k(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\right\} - \frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\sum_{k=0}^{2}H_k(y,s,0,\tau,\varepsilon)\right\} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\{-\sigma(s)(x+\varepsilon y)H_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$

$$+(2\lambda+\sigma(s)(x+\varepsilon y))H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon) + \lambda H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\} +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\sigma(s)xH_0(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+\lambda H_2(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)+$$

$$+(4\lambda+\sigma(s)x)H_1(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\} + G_s(\zeta)\sum_{k=0}^{2}\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H_k(y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1 s} + o(\varepsilon^2).$$

Подставим в полученную систему разложение функций $H_k(y,s,\tau,\varepsilon)$ в виде (26), тогда

$$\varepsilon^2\left(\sum_{k=0}^{2}Q_k(x,s,\zeta)\right)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial\tau} - \varepsilon x'(\tau)\left(\sum_{k=0}^{2}Q_k(x,s,\zeta)\right)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y} -$$

$$-\varepsilon^2 x'(\tau)\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_{k=0}^{2}Q_k(x,s,\zeta)\right\}\frac{\partial\{yH(y,\tau)\}}{\partial y} - \varepsilon^2 x'(\tau)\left(\sum_{k=0}^{2}h_k^{(1)}(x,s,\zeta)\right)\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial y^2} =$$

$$=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\sum_{k=0}^{2}H_k(y,s,\zeta,\tau,\varepsilon)\right\}-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\sum_{k=0}^{2}H_k(y,s,0,\tau,\varepsilon)\right\}-$$

$$-\varepsilon\left(-\sigma(s)xQ_0(x,s,\zeta)+\lambda Q_2(x,s,\zeta)+(2\lambda+\sigma(s)x)Q_1(x,s,\zeta)\right)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}-$$

$$-\varepsilon^2\left(\sigma(s)Q_1(x,s,\zeta)-\sigma(s)Q_0(x,s,\zeta)-\sigma(s)x\frac{\partial Q_0(x,s,\zeta)}{\partial x}+\lambda\frac{\partial Q_2(x,s,\zeta)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+(2\lambda+\sigma(s)x)\frac{\partial Q_1(x,s,\zeta)}{\partial x}\right)\frac{\partial\{yH(y,\tau)\}}{\partial y}+\frac{\varepsilon^2}{2}[\sigma(s)xQ_0(x,s,\zeta)+\lambda Q_2(x,s,\zeta)+$$

$$+(4\lambda+\sigma(s)x)Q_1(x,s,\zeta)+2\Big(\sigma(s)xh_0^{(1)}(x,s,\zeta)-\lambda h_2^{(1)}(x,s,\zeta)-$$

$$-(2\lambda+\sigma(s)x)h_1^{(1)}(x,s,\zeta)\Big)\Big]\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial y^2}+G_s(\zeta)\sum_{k=0}^{2}\sum_{s_1=1}^{S}\frac{\partial H_k(y,s_1,0,\tau,\varepsilon)}{\partial\zeta}p_{s_1 s}+o(\varepsilon^2).\quad(28)$$

Просуммируем уравнения системы (28) по s, выполним предельный переход при $\zeta\to\infty$, воспользуемся условием нормировки (12), обозначениями (14) и (15), также обозначим

$$h_k^{(1)}(x)=\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{s=1}^{S}h_k^{(1)}(x,s,\zeta);\quad(29)$$

$$\eta_k h_k^{(1)}(x)=\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{s=1}^{S}\sigma(s)h_k^{(1)}(x,s,\zeta),\ k=0,1,\quad(30)$$

учтем (1), получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial\tau}-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}-\varepsilon^2 x'(\tau)\left(\sum_{k=0}^{2}h_k^{(1)}(x)\right)\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial y^2}=$$

$$=-\varepsilon(-\psi_0 xR_0(x)+\lambda R_2(x)+(2\lambda+\psi_1 x)R_1(x))\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial y}-$$

$$-\varepsilon^2\left(\psi_1 R_1(x)-\psi_0 R_0(x)-x\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{s=1}^{S}\sigma(s)\frac{\partial Q_0(x,s,\zeta)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\lambda\frac{\partial R_2(x)}{\partial x}+2\lambda\frac{\partial R_1(x)}{\partial x}+x\lim_{\zeta\to\infty}\sum_{s=1}^{S}\sigma(s)\frac{\partial Q_1(x,s,\zeta)}{\partial x}\right)\frac{\partial\{yH(y,\tau)\}}{\partial y}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}[\psi_0 xR_0(x)+\lambda R_2(x)+(4\lambda+\psi_1 x)R_1(x)+$$

$$+2\Big(\eta_0 xh_0^{(1)}(x)-\lambda h_2^{(1)}(x)-(2\lambda+\eta_1 x)h_1^{(1)}(x)\Big)\Big]\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial y^2}+o(\varepsilon^2).\quad(31)$$

В силу дифференциального уравнения (6) уничтожим слагаемые порядка $o(\varepsilon)$, поделим обе части полученного уравнения на ε^2, выполним несложные преобразования, тогда будем иметь

$$\frac{\partial H(y,\tau)}{\partial \tau} = -\left(\psi_1 R_1(x) - \psi_0 R_0(x) - \psi_0 x \frac{\partial R_0(x)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial R_2(x)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. +(2\lambda + \psi_1 x)\frac{\partial R_1(x)}{\partial x}\right)\frac{\partial\{yH(y,\tau)\}}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\psi_0 x R_0(x) + \lambda R_2(x) + (4\lambda + \psi_1 x)R_1(x) + \right.$$

$$\left. +2\left(\eta_0\, x\, h_0^{(1)}(x) - \lambda h_2^{(1)}(x) - (2\lambda + \eta_1 x)h_1^{(1)}(x) + \; x'(\tau)\sum_{k=0}^{2} h_k^{(1)}(x)\right)\right]\frac{\partial^2 H(y,\tau)}{\partial y^2}. \quad (32)$$

Получили уравнение Фоккера – Планка для плотности распределения вероятностей $H(y,\tau)$ значений диффузионного процесса авторегрессии $y(\tau)$. Обозначим коэффициент переноса уравнения (32) как $A_x'(x)$. Заметим, что $A_x'(x)$ является производной по x от правой части дифференциального уравнения (6), то есть

$$A_x'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\{-\psi_0 x R_0(x) + \lambda R_2(x) + (2\lambda + \psi_1 x)R_1(x)\}. \quad (33)$$

Коэффициент диффузии обозначим следующим образом:

$$B^2(x) = \psi_0 x R_0(x) + \lambda R_2(x) + (4\lambda + \psi_1 x)R_1(x) +$$

$$+2\left[\eta_0\, x\, h_0^{(1)}(x) - \lambda h_2^{(1)}(x) - (2\lambda + \eta_1 x)h_1^{(1)}(x) + \; x'(\tau)\sum_{k=0}^{2} h_k^{(1)}(x)\right], \quad (34)$$

если выражение в правой части больше нуля.

Получили, что (34) совпадает с (18). Из (32) следует, что $H(y,\tau)$ является плотностью распределения вероятностей некоторого диффузионного процесса $y(\tau)$, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dy(\tau) = A_x'(x)y(\tau)d\tau + B(x)dw(\tau), \quad (35)$$

где $w(\tau)$ является стандартным винеровским процессом, $A_x'(x)$ определяется равенством (33), $B(x)$ – равенством (34), совпадающим с (17), следовательно, уравнение (35) совпадает с уравнением (17), а процесс $y(\tau)$ является процессом авторегрессии. ***Теорема доказана.***

Следствие 2.1. *Решение* $y(\tau)$ *стохастического дифференциального уравнения* (*35*) *имеет вид*

$$y(\tau) = e^{\int_0^\tau A_x'(x(s))ds}\int_0^\tau B(x(u))e^{-\int_0^u A_x'(x(s))ds}dw(u), \quad (36)$$

где $A'(x)$ *определяется равенством* (*33*), $B(x)$ *– равенством* (*18*), *а* $w(\tau)$ *– есть стандартный винеровский процесс.*

Доказательство. Представим процесс $y(\tau)$ в следующем виде:

$$y(\tau) = e^{\int_0^\tau A_x'(x(s))ds} f(\tau), \quad (37)$$

тогда

$$f(\tau) = e^{-\int_0^\tau A_x'(x(s))ds} y(\tau). \quad (38)$$

Здесь $A_x'(x)$ определяется равенством (33).

Продифференцируем (38), используя формулы Ито. Тогда

$$df(\tau) = -A_x'(x(\tau))f(\tau)d\tau + e^{-\int_0^\tau A_x'(x(s))ds}dy .$$

Учитывая (37), получим

$$df(\tau) = -A_x'(x(\tau))e^{-\int_0^\tau A_x'(x(s))ds}y(\tau)d\tau + e^{-\int_0^\tau A_x'(x(s))ds}[A_x'(x(\tau))y(\tau)d\tau + B(x(\tau))dw(\tau)] .$$

Выполним преобразования, будем иметь

$$df(\tau) = B(x(\tau))e^{-\int_0^\tau A_x'(x(s))ds}dw(\tau). \tag{39}$$

Проинтегрируем (39), положив $f(0) = 0$, тогда исходное представление $y(\tau)$ в виде (37) примет вид

$$y(\tau) = e^{\int_0^\tau A_x'(x(s))ds}\int_0^\tau B(x(u))e^{-\int_0^u A_x'(x(s))ds}dw(u) , \tag{40}$$

где $A_x'(x)$ определяется равенством (33), $B(x)$ – равенством (18), а $w(\tau)$ – есть стандартный винеровский процесс. ***Следствие доказано.***

4. Глобальная аппроксимация процесса изменения числа заявок в ИПВ

Покажем, что для достаточно малых значений параметра ε случайный процесс $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, аппроксимирующий процесс изменения числа заявок в ИПВ $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$, является однородным диффузионным процессом. Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *С точностью до $o(\varepsilon)$ случайный процесс $z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения*

$$dz(\tau) = A(z)d\tau + \varepsilon B(z)dw(\tau) , \tag{41}$$

где $w(\tau)$ – есть стандартный винеровский процесс, функция $A(z)$ определяется правой частью дифференциального уравнения (6), а функция $B(z)$ – равенством (18), то есть $z(\tau)$ является однородным диффузионным процессом с коэффициентом переноса $A(z)$ и коэффициентом диффузии $\varepsilon^2 B^2(z)$.

Доказательство. Поскольку $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, то, дифференцируя $z(\tau)$ по τ, получаем

$$dz(\tau) = x'(\tau)d\tau + \varepsilon dy. \tag{42}$$

В силу (6) и (17) имеем

$$dz(\tau) = [-\psi_0 x R_0(x) + \lambda R_2(x) + (2\lambda + \psi_1 x)R_1(x)]d\tau +$$

$$+\varepsilon y\frac{\partial}{\partial x}\{-\psi_0 x R_0(x) + \lambda R_2(x) + (2\lambda + \psi_1 x)R_1(x)\}d\tau + \varepsilon B(x)dw(\tau) .$$

Так как правая часть содержит разложение в ряд по приращениям εy аргумента x, то можно записать

$$dz(\tau)=[-\psi_0\cdot(x+\varepsilon y)R_0(x+\varepsilon y)+\lambda R_2(x+\varepsilon y)+$$

$$+(2\lambda+\psi_0\cdot(x+\varepsilon y)R_1(x+\varepsilon y)]d\tau+\ \varepsilon B(z-\varepsilon y)dw(\tau)\,.$$

Заметим, что $z(\tau)=x(\tau)+\varepsilon y$, тогда с точностью до $o(\varepsilon)$ имеем

$$dz(\tau)=[-\psi_0 zR_0(z)+\lambda R_2(z)+(2\lambda+\psi_1 z)R_1(z)]d\tau+\ \varepsilon B(z)dw(\tau)+o(\varepsilon)\,.$$

С учетом (6) уравнение (42) окончательно примет вид

$$dz(\tau)=A(z)d\tau+\varepsilon B(z)dw(\tau)+o(\varepsilon)\,.$$

Таким образом, $z(\tau)$ является однородным диффузионным процессом с коэффициентом переноса $A(z)$ и коэффициентом диффузии $\varepsilon^2 B^2(z)$ и определяется с точностью до $o(\varepsilon)$ стохастическим дифференциальным уравнением вида (41). ***Теорема доказана.***

Следствие 3.1. *Плотность распределения вероятностей значений процесса* $z(\tau)$ *имеет вид*

$$F(z)=\frac{\dfrac{1}{B^2(z)}e^{\frac{2}{\varepsilon^2}\int\limits_0^z\frac{A(u)}{B^2(u)}du}}{\int\limits_0^\infty\dfrac{1}{B^2(z)}e^{\frac{2}{\varepsilon^2}\int\limits_0^z\frac{A(u)}{B^2(u)}du}dz}, \tag{43}$$

где $A(z)$ *определяется правой частью дифференциального уравнения* (*6*), $B(z)$ – *равенством* (*18*).

Доказательство. Обозначим через $F(z,\tau)$ плотность распределения вероятностей значений процесса $z(\tau)$, тогда можно записать уравнение Фоккера – Планка для плотности этого процесса:

$$\frac{\partial F(z,\tau)}{\partial\tau}=-\frac{\partial}{\partial z}\{A(z)F(z,\tau)\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{B^2(z)F(z,\tau)\right\},$$

где $A(z)$ определяется правой частью дифференциального уравнения (6), $B(z)$ – равенством (18). Рассмотрим функционирование процесса $z(\tau)$ в стационарном режиме, то есть $F(z,\tau)\equiv F(z)$, тогда стабильное распределение можно найти из уравнения Фоккера – Планка

$$0=-\frac{\partial}{\partial z}\{A(z)F(z)\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{B^2(z)F(z)\right\}. \tag{44}$$

Данное уравнение (44) является однородным дифференциальным уравнением второго порядка.

Обозначим

$$B^2(z)F(z)=G(z)\,. \tag{45}$$

Понизим порядок уравнения (44) и, положив константу, возникшую в результате интегрирования, равной нулю, запишем

$$\frac{\partial G(z)}{\partial z}=\frac{2}{\varepsilon^2}\frac{A(z)}{B^2(z)}G(z)\,.$$

Проинтегрируем последнее уравнение

$$\int_0^z \frac{dG(u)}{G(u)} du = \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du + C_1 ,$$

выполним преобразования

$$\ln|G(z)| = \frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du + \ln|C| , \quad G(z) = C \cdot e^{\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du} .$$

Учтем замену (45) и перепишем последнее уравнение в виде

$$F(z) = \frac{C}{B^2(z)} e^{\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du} . \tag{46}$$

Константу C найдем из условия нормировки $\int_0^\infty F(z)dz = 1$, тогда

$$C = 1 \Big/ \int_0^\infty \frac{1}{B^2(z)} e^{\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du} . \tag{47}$$

Подставим (47) в (46), получим плотность распределения вероятностей для процесса $z(\tau)$ в виде (43). ***Следствие доказано.***

Заключение

Таким образом, в данной работе найдено распределение вероятностей $R_k(x)$ состояний k канала в виде (14). Получено дифференциальное уравнение (6), определяющее асимптотическое среднее $x(\tau)$ нормированного числа заявок в ИПВ. Исследованы величины отклонения от этого среднего, показано, что процесс их изменения $y(\tau)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением вида (17). Доказано, что для достаточно малых значений параметра ε случайный процесс $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, аппроксимирующий процесс изменения числа заявок в ИПВ $\varepsilon^2 i(\tau / \varepsilon^2)$, является однородным диффузионным процессом. Найдена важнейшая из вероятностно-временных характеристик этого процесса – плотность распределения вероятностей $F(z)$ в виде (43).

Полученные результаты могут быть использованы при проведении анализа существующих сетей, управляемых протоколами случайного множественного доступа, а также при проектировании новых сетей связи, реализующих более производительные протоколы передачи данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А.А.* Управляемые системы массового обслуживания и их оптимизация. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1984. 234 с.
2. *Коротаев И.А.* Системы массового обслуживания с переменными параметрами. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 167 с.
3. *Назаров А.А.*, *Туенбаева А.Н.* Исследование марковской модели компьютерной сети с нестационарным входящим потоком требований // Вестник ТГУ. Приложение. 2005. № 16. С. 87 – 94.

4. *Туенбаева А.Н.* Исследование математической модели системы видеонаблюдения с потерей искаженных видеосигналов при рекуррентном входящем потоке // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 19. С. 202 – 203.
5. *Вавилов В.А.*, *Назаров А.А.* Исследование средних характеристик неустойчивых сетей множественного доступа в случайной среде // Обработка данных и управление в сложных системах: Сб. статей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 14 – 24.
6. *Вавилов В.А.*, *Назаров А.А.* Исследование математических моделей многостабильных сетей множественного доступа в случайной среде // Обработка данных и управление в сложных системах: Сб. статей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 17 – 30.
7. *Вавилов В.А.*, *Назаров А.А.* Исследование асимптотических средних характеристик устойчивых сетей множественного доступа, функционирующих в диффузионной среде // Вестник ТГУ. Приложение. 2005. № 16. С. 73 – 81.
8. *Вавилов В.А.*, *Назаров А.А.* Исследование математических моделей неустойчивых сетей множественного доступа, функционирующих в полумарковской среде // Там же. С. 61 – 72.
9. *Вавилов В.А.*, *Назаров А.А.* Асимптотический анализ математических моделей устойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в диффузионной среде // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 19. С. 124 – 131.
10. *Вавилов В.А.* Исследование математических моделей устойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в случайной среде // Там же. С. 131 – 137.
11. *Вавилов В.А.* Исследование математических моделей неустойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов, функционирующим в диффузионной среде // Научное творчество молодежи: Материалы XI Всерос. науч.-практич. конф. (20 – 21 апреля 2007 г.) Ч. 1. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. С. 3 – 6.
12. *Вавилов В.А.* Плотность распределения вероятностей стабильного функционирования устойчивых сетей множественного доступа с работающим в случайной среде источником повторных вызовов // Там же. С. 6 – 10.
13. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971.
14. *Назаров А.А.*, *Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
15. *Назаров А.А.*, *Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2005. 228 с.
16. *Назаров А.А.* Асимптотический анализ марковизуемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 159 с.
17. *Назаров А.А.*, *Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 10 октября 2007 г.