

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 681.324

В.А. Павский, К.В. Павский

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОСУЩЕСТВИМОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ*

Предлагается подход к расчету показателей осуществимости решения задач, характеризующих функционирование вычислительных систем в среднем. В его основе лежат вероятностные процессы теории массового обслуживания. Полученные формулы обладают наглядностью и могут быть использованы при ручном счете. Установлена взаимосвязь между вероятностью решения сложной задачи и параметрами надежности системы.

Ключевые слова: *Распределенные вычислительные системы, осуществимость решения задач.*

При анализе эффективности функционирования вычислительных систем (ВС), как сосредоточенных, так и распределенных, используются показатели осуществимости [1, 2]. В зависимости от сложности задач и характера их поступления выделяют следующие режимы работы ВС: решение сложной задачи; обработка набора задач; обслуживание потока задач.

В работе предлагается подход к нахождению математических ожиданий и дисперсий, используемых в расчетах показателей осуществимости решения задач потока и набора.

2. Расчет показателей осуществимости решения задач на ВС

Рассмотрим абсолютно надежную распределенную ВС, состоящую из потенциально неограниченного числа элементарных машин (ЭМ) [2], на которую поступает поток простых задач интенсивностью α и интенсивностью β решения. (Простая задача представляется последовательной программой [2].)

Предполагается, что потоки поступлений и решения задач пуассоновские с параметрами α и β соответственно.

Требуется вычислить математическое ожидание $A_i(t)$ числа задач, находящихся в системе [2], и соответствующую дисперсию $D_i(t)$ в момент времени $t \in [0, \infty)$ при начальных условиях

$$A_i(0) = i, \quad D_i(0) \equiv 0, \quad i \in E_0^\infty = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 07-07-00142, № 06-07-89089, № 08-08-00300, № 08-07-00022.

Пусть $P_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени $t \in [0, \infty)$ в ВС k задач находится на обслуживании, $k \in E_0^\infty$. Тогда система дифференциальных уравнений, в системе массового обслуживания М/М/∞ [4] имеет вид

$$\frac{d}{dt}P_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k) \cdot P_k(t) + \lambda_{k-1} \cdot P_{k-1}(t) + \mu_{k+1} \cdot P_{k+1}(t), \quad (2)$$

$$\lambda_k \geq 0, \mu_k > 0, \mu_0 = 0, k \in E_0^\infty.$$

$$P_r(t) \equiv 0, \quad r \in E_{-1}^{-\infty}.$$

Случай 1. Пусть ВС – высокопроизводительная, следовательно, можно считать, что каждая задача, поступившая в систему, сразу начинает обслуживаться. Полагая в системе (2)

$$\lambda_k = \alpha, \mu_k = k \cdot \beta,$$

получаем систему уравнений [3, 4]

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -(\alpha + k \cdot \beta) \cdot P_k(t) + \alpha \cdot P_{k-1}(t) + (k+1) \cdot \beta \cdot P_{k+1}(t). \quad (3)$$

Введем производящую функцию

$$F(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot P_k(t). \quad (4)$$

Система (3) сводится к следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial F(z, t)}{\partial t} + \beta \cdot (z-1) \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} = \alpha(z-1)F(z, t). \quad (5)$$

При начальных условиях (с учетом (1))

$$F(z, 0) = z^i.$$

Из (4) имеем

$$A_i(t) = \frac{\partial}{\partial z} F(1, t), \quad D_i(t) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(1, t) + \frac{\partial}{\partial z} F(1, t) - \left(\frac{\partial}{\partial z} F(1, t) \right)^2. \quad (6)$$

Преобразование уравнения (5), с учетом (6), приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} A_i(t) + \beta \cdot A_i(t) = \alpha, \\ \frac{d}{dt} [D_i(t) + A_i^2(t) - A_i(t)] + 2\beta [D_i(t) + A_i^2(t) - A_i(t)] = 2\alpha \cdot A_i(t) \end{cases} \quad (7)$$

с начальными условиями (1).

Решение системы (7) записывается в виде

$$\begin{cases} A_i(t) = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + i \cdot e^{-\beta t}, \\ D_i(t) = (1 - e^{-\beta t}) \left(\frac{\alpha}{\beta} + i \cdot e^{-\beta t} \right). \end{cases} \quad (8)$$

Характер вхождения вычислительной системы в стационарный режим работы при обслуживании потока задач иллюстрируют рис. 1 и 2.

На рис. 1 приведены графики функций $A_i(t)$ (тонкие линии) и $A_i(t) + \sigma(t)$ (жирные линии) для $\alpha = 10 \text{ ч}^{-1}$, $\beta = 0,1 \text{ ч}^{-1}$, $i = 0, 50, 90$; $\sigma(t) = \sqrt{D_i(t)}$. Стационарный режим функционирования ВС достигается практически через $t = 40 \text{ ч}$; учет дисперсии существенен, так как $\max \sigma(t) = 10$.

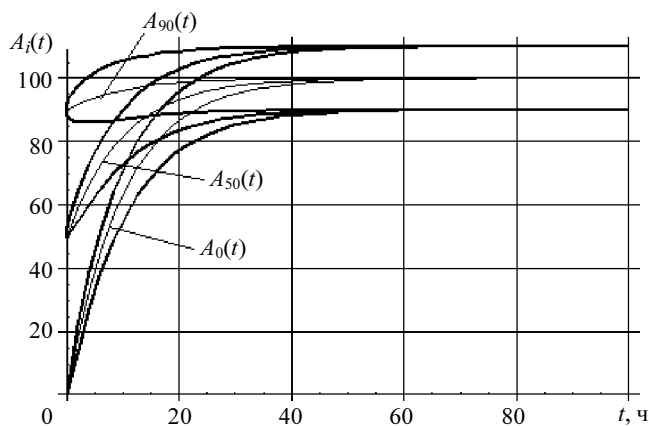


Рис. 1

Для практических расчетов можно пользоваться формулами

$$A \pm \sqrt{D} = \lim_{t \rightarrow \infty} [A_i(t) \pm \sqrt{D_i(t)}] = \alpha / \beta \pm \sqrt{\alpha / \beta}.$$

В ситуации, представленной на рис. 1, имеем $A \pm \sqrt{D} = 100 \pm 10$.

На рис. 2 при $\alpha = 10 \text{ ч}^{-1}$, $\beta = 0,2 \text{ ч}^{-1}$ и различных начальных условиях стационарный режим функционирования ВС достигается через $t \approx 35 \text{ ч}$, $\max \sigma(t) = 10$.

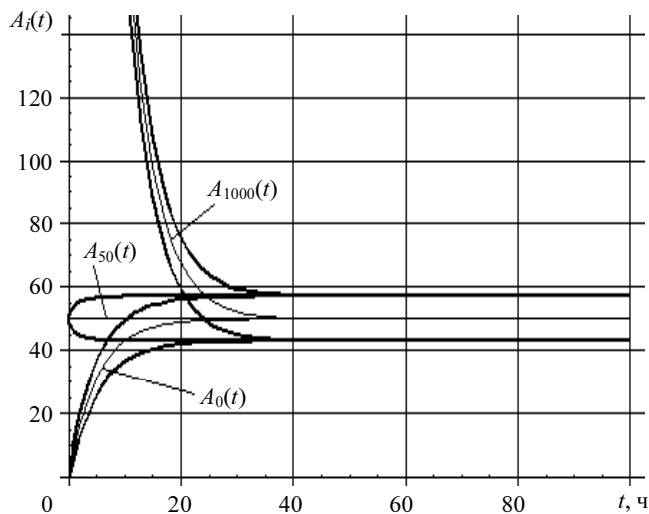


Рис. 2

Случай 2. Изучим функционирование ВС невысокой производительности в режиме обработки пакета, состоящего из i простых задач. Выделенный ресурс составляет i ЭМ. В этом случае, полагая $\alpha = 0$, получаем вместо уравнения (5) следующее:

$$\frac{\partial F(z, t)}{\partial t} + \beta \cdot (z - 1) \cdot \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} = 0, \quad F(z, 0) = z^i. \quad (9)$$

Из (9), с учетом (6), после необходимых преобразований получим систему

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} A_i(t) + \beta \cdot A_i(t) = 0, \\ \frac{d}{dt} [D_i(t) + A_i^2(t) - A_i(t)] = 2\beta \cdot A_i(t). \end{cases} \quad (10)$$

Решение системы (10) при начальных условиях (1) имеет вид

$$A_i(t) = i \exp(-\beta t), \quad D_i(t) = i \exp(-\beta t) [1 - \exp(-\beta t)]. \quad (11)$$

Вычислим, например, время, через которое от начального набора i задач в ВС останется их половина. Из (11) имеем

$$i/2 = i \exp(-\beta t),$$

тогда $t = \ln 2 / \beta$, дисперсия $D_i(t) = i/4$, $\sigma = \sqrt{i} / 2$.

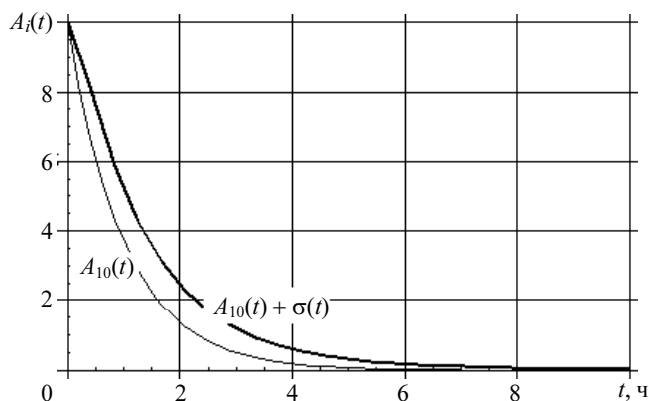


Рис. 3

На рис. 3 представлена зависимость числа решенных простых задач от времени t , если начальный набор состоял из $i=10$ задач, выделенный ресурс состоит из 10 ЭМ, $\beta = 1 \text{ ч}^{-1}$. Время, необходимое для решения половины задач, находящихся в системе, $t = \ln 2 \approx 0,69 \text{ ч}$, $\sigma \approx 1,6$. Следовательно, за 42 мин будет решено от 3,4 до 6,6 задач из 10, при суммарной интенсивности решения $i\beta = 10 \text{ ч}^{-1}$.

Случай 3. Рассмотрим решение набора i (>0) сложных задач на ВС. Сложная задача (представлена параллельной программой [2]) решается на всем выделенном ресурсе.

Пусть выделенный ресурс составляет n ЭМ, тогда интенсивность решения задачи будем считать равной $n \cdot \beta$, где β – интенсивность решения задачи на одной ЭМ (оцениваются потенциальные возможности ВС [1, 2]).

Так как задачи сложные, то они решаются последовательно.

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность того, что к моменту времени t в ВС находится k задач (включая обслуженную), $k \in E_0^i$.

В такой постановке система (2) записывается в виде

$$\begin{cases} P_k'(t) = -n \cdot \beta \cdot P_k(t) + n \cdot \beta \cdot P_{k+1}(t), & k \in E_1^{i-1}, \\ P_0'(t) = n \cdot \beta \cdot P_1(t); & P_i'(t) = -n \cdot \beta \cdot P_i(t), \end{cases} \quad (12)$$

с начальными условиями

$$P_i(0) = 1, \quad P_k(0) = 0, \quad k \neq i.$$

Условие нормировки, являющееся следствием системы уравнений, имеет вид

$$\sum_{k=0}^i P_k(t) = 1, \quad t \in [0, \infty).$$

Вводя производящую функцию

$$F(z, t) = \sum_{k=0}^n z^k \cdot P_k(t),$$

систему (12) приводим к уравнению

$$z \cdot \frac{\partial F(z, t)}{\partial t} = n \cdot \beta \cdot (1 - z) \cdot (F(z, t) - P_0(t)), \quad F(z, 0) = z^i, \quad (13)$$

из которого, после необходимых преобразований, получаем, с учетом (6), систему

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} A_i(t) = -n \cdot \beta \cdot (1 - P_0(t)), \\ \frac{d}{dt} [D_i(t) + A_i^2(t) + A_i(t)] = -2n \cdot \beta \cdot A_i(t) \end{cases} \quad (14)$$

с начальными условиями (1).

Для нахождения $P_0(t)$ вернемся к системе (12). Приведем точное решение.

Применяя преобразование Лапласа ($\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot f(t) dt$, где $f(t)$ – функция ограниченного изменения [3]) к уравнению (13), получим

$$z \cdot (s \cdot \tilde{F}(z, s) - z^i) = n \cdot \beta \cdot (1 - z) \cdot (\tilde{F}(z, s) - \tilde{P}_0(s)), \quad \text{Re}(s) > 0, \quad (15)$$

$$\text{или} \quad \tilde{F}(z, s) = \frac{z^{i+1} - n \cdot \beta \cdot (1 - z) \cdot \tilde{P}_0(s)}{s \cdot z - n \cdot \beta \cdot (1 - z)}. \quad (16)$$

Так как нуль в знаменателе существует внутри круга $|z| = |n \cdot \beta / (s + n \cdot \beta)| < 1$, то с необходимостью в числителе имеем

$$\tilde{P}_0(s) = s^{-1} \cdot [n \cdot \beta / (s + n \cdot \beta)]^i. \quad (17)$$

Подставляя правую часть формулы (17) в (16) и разделив полученный числитель на знаменатель, будем иметь

$$\tilde{F}(z, s) = s^{-1} \cdot [n \cdot \beta / (s + n \cdot \beta)]^i + \sum_{k=0}^{i-1} z^{i-k} \cdot [n \cdot \beta / (s + n \cdot \beta)]^k. \quad (18)$$

Взяв обратное преобразование Лапласа, предварительно разложив правую часть (18) на простейшие рациональные дроби, получим

$$F(z, t) = 1 - \exp(-n \cdot \beta \cdot t) \cdot \sum_{k=1}^i (n \cdot \beta \cdot t)^{i-k} / (i-k)! + \exp(-n \cdot \beta \cdot t) \cdot \sum_{k=0}^{i-1} z^{i-k} \cdot (n \cdot \beta \cdot t)^k / k!$$

Учитывая, что

$$P_k(t) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k}{\partial z^k} F(0, t),$$

находим искомое решение

$$P_0(t) = 1 - \exp(-n \cdot \beta \cdot t) \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(n \cdot \beta \cdot t)^k}{k!},$$

$$P_k(t) = \frac{(n \cdot \beta \cdot t)^{i-k}}{(i-k)!} \cdot \exp(-n \cdot \beta \cdot t), \quad k \in E_1^i. \quad (19)$$

Таким образом, решение системы (14) имеет вид

$$\begin{cases} A_i(t) = \exp(-n \cdot \beta \cdot t) \cdot \sum_{k=1}^i k \cdot \frac{(n \cdot \beta \cdot t)^{i-k}}{(i-k)!}, \\ D_i(t) = \exp(-n \cdot \beta \cdot t) \cdot \sum_{k=1}^i k^2 \cdot \frac{(n \cdot \beta \cdot t)^{i-k}}{(i-k)!} - (A_i(t))^2. \end{cases} \quad (20)$$

Обратимся к системе (14). Если число i задач велико, то можно считать, что $i \rightarrow \infty$, тогда $P_0(t) \rightarrow 0$, $\forall t \in [0, \infty)$. При $P_0(t) = 0$ система (14) имеет очевидное решение

$$\begin{cases} A_i(t) = i - n \cdot \beta \cdot t, \\ D_i(t) = n \cdot \beta \cdot t, \quad t < i / n \cdot \beta, \end{cases} \quad (21)$$

в котором $n \cdot \beta \cdot t$, при $i \rightarrow \infty$, есть параметр случайного процесса Пуассона.

Погрешность приближенного решения (21) для $A_i(t)$ находится по формуле

$$\Delta_i(t) = \exp(-n \cdot \beta \cdot t) \cdot \sum_{k=i+1}^{\infty} (i-k) \cdot \frac{(n \cdot \beta \cdot t)^k}{k!}.$$

Формула (21) может быть использована при экспресс-анализе функционирования ВС.

Из (21) следует, что среднее время, необходимое для решения i сложных задач набора, $t_{cp} = i / (n \cdot \beta)$ при стандартном отклонении $\sigma = \sqrt{i}$. Например, при выделенном ресурсе $n = 100$ ЭМ время, необходимое для решения набора из 400 задач при $\beta = 0,1 \text{ ч}^{-1}$, составит $t_{cp} = 400 / (100 \cdot 0,1) = 40 \text{ ч}$. С учетом отклонения, $\sigma = \sqrt{400} = 20 \text{ ч}$, для среднего времени решения набора задач имеем оценку: $\tilde{t}_{cp} = 40 \pm 20 \text{ ч}$.

Учитывая, что $P_0(t)$ является распределением Эрланга порядка i [4], для которого

$$M\xi = i / (n \cdot \beta), \quad D\xi = i / (n \cdot \beta)^2$$

(ξ – полное время нахождения последней обслуженной задачи набора в ВС), получаем более точную оценку $\tilde{t}_{cp} = 40 \pm 2 \text{ ч}$.

3. Условие осуществимости решения сложной задачи на живучей ВС

При построении моделей функционирования ВС, в которых число элементарных машин было невелико и решаемые задачи простые, влияние надежности на организацию процесса решения задач (в целях упрощения математических моделей) можно было считать несущественным [4].

Для большемасштабных ВС такие упрощения привели бы к ошибкам принципиального характера. В связи со сказанным, вывод условия, позволяющего оценить осуществимость решения сложных задач на большемасштабных ВС с учетом их надежности, практически необходим. В самом деле, выход из строя ЭМ приводит к реконфигурации ВС тем чаще, чем больше число N ЭМ в системе; кроме того, с увеличением N время реконфигурации ВС увеличивается.

Обозначим через λ интенсивность отказов одной ЭМ, а через μ – интенсивность восстановлений отказавшей ЭМ одним восстанавливающим устройством.

Рассмотрим вычислительные системы со структурной избыточностью [2, 3]. Они представляют программно настроенную конфигурацию [2], в которой:

а) выделена основная подсистема из n ЭМ и подсистема из $(N - n)$ ЭМ, подчиненная основной и составляющая структурную избыточность;

б) основная подсистема предназначена для решения сложных задач, представленных параллельными программами из n ветвей, а подчиненная система – для решения фоновых задач;

в) функции отказавшей ЭМ основной подсистемы берет на себя любая исправная ЭМ структурной избыточности.

Под восстановлением будем понимать комплекс мер, связанных с бесперебойной работой ВС (контроль, (само)диагностика, реконфигурация, избыточность и др. [2]). Время, необходимое для реализации этих мер, учтено в параметре μ .

Если восстанавливающая система является высокопроизводительной, то условие осуществимости решения задач на ВС можно записать в виде

$$(N - n) \cdot \mu / (n \cdot \lambda) > 1. \quad (22)$$

Физический смысл неравенства состоит в том, что суммарное время восстановления всегда должно быть больше, чем суммарное время отказов ЭМ.

Если задача сложная (т.е. решается на всех элементарных машинах), $n \rightarrow \infty$, и реконфигурация ВС происходит со всеми оставшимися работоспособными ЭМ, то неравенство (11), в конце концов, нарушается (то есть система перестает самовосстанавливаться). Для его выполнения необходимо, чтобы реконфигурация осуществлялась на ограниченной подсистеме (объем которой сводил бы к минимуму межмашинные взаимодействия). Один из таких вариантов реконфигурации обеспечивает крупноблочное распараллеливание сложных задач [2].

Условие осуществимости (22) в большей мере имеет методологическое значение, хотя оно может использоваться и для практических оценок.

В самом деле, пусть сложная задача решается на ВС со структурной избыточностью. Поскольку условие (22) получено из вероятностной модели, то его выполнение зависит от вида случайного процесса, которому принадлежат параметры модели; в рассматриваемом случае процесс описывается схемой Бернулли (соответствующие формулы в переходном режиме получены в [3]).

Из (22) имеем

$$(N - n) > N \cdot \lambda / (\lambda + \mu).$$

Пусть $N - n$ – случайная величина, характеризующая число ЭМ структурной избыточности. Зададим $\lambda = 10^{-4} \text{ ч}^{-1}$, $\mu = 10 \text{ ч}^{-1}$, а) $N = 10^4$, б) $N = 10^5$, в) $N = 10^6$, тогда решение осуществимо с вероятностью

$$\text{а) } P\{0 \leq N - n \leq 1\} = (\mu \cdot (\lambda + \mu)^N + N \cdot \lambda \cdot \mu^{N-1} / (\lambda + \mu)^N) \approx 0.99;$$

$$\text{б) } P\{0 \leq N - n \leq 5\} \approx 0.98;$$

$$\text{в) } P\{0 \leq \xi \leq x\} \geq 0.99.$$

Для нахождения x , числа ЭМ структурной избыточности (при $x > 10$), для оценки можно воспользоваться интегральной теоремой Муавра – Лапласа [4]. Зададим доверительную вероятность $\gamma = 0.99$, тогда $P\{0 \leq N - n \leq x\} = \gamma$. Используя указанную теорему, имеем

$$\Phi\left((x - N \cdot p) / \sqrt{N \cdot p \cdot (1 - p)}\right) - \Phi\left((0 - N \cdot p) / \sqrt{N \cdot p \cdot (1 - p)}\right) \approx 0.9935, \quad (23)$$

где $p = \lambda / (\lambda + \mu)$, $\Phi(y)$ – нормированная нормальная функция распределения.

Решая трансцендентное уравнение (23), находим $x = 18$.

Следовательно, число ЭМ структурной избыточности определяется практическими соображениями и подтверждается вероятностями, значения которых должны быть близкими к единице. Обратно, если задать вероятность (назовем ее доверительной), то можно оценить число ЭМ структурной избыточности.

Замечание. Условие осуществимости основано на модели, описывающей состояния системы в текущий момент времени, что может вызвать сомнения в правомерности ее использования, поскольку модель не учитывает продолжительности решения задачи. Мы считаем, что было бы неразумным отвергать этот подход, так как с вероятностью сколь угодно близкой к единице он дает простой алгоритм поддержки необходимой производительности ВС в любой момент времени, что и определяет осуществимость решения задачи.

Заключение

Показано, что полученные аналитические формулы можно использовать при анализе эффективности функционирования ВС. Предложенный подход позволяет с единых методологических позиций вычислять моменты (центральные и начальные) не менее второго порядка, не вычисляя вероятности состояний системы, что особенно важно для анализа функционирования многомашинных ВС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евреинов Э.В., Хорошевский В.Г. Однородные вычислительные системы. Новосибирск: Наука, 1978.
2. Хорошевский В.Г. Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Баумана, 2005.
3. Павский В.А., Павский К.В., Хорошевский В.Г. Вычисление показателей живучести распределенных вычислительных систем и осуществимости решения задач // Искусственный интеллект. 2006. № 4. С. 28 – 34.
4. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979.

Статья представлена кафедрой информационных технологий в исследовании дискретных структур радиофизического факультета Томского государственного университета и оргкомитетом 7-й Российской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», поступила в научную редакцию 8 октября 2008 г.