

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.865

В.В. Поддубный, О.В. Романович

РЫНОК КАК ОПТИМАЛЬНО САМОУПРАВЛЯЕМАЯ ИНЕРЦИОННАЯ СИСТЕМА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается математическая модель рынка одного товара при известной линии спроса с учетом запаздывания в поставках товара. Сформулированы общий и частные критерии оптимальности поведения рынка. Состояние рынка характеризуется ценой товара в последовательные дискретные моменты времени и объемами непроданного товара (остатками). Управление состоянием рынка производится изменением цены товара. Учитывается инерционность (консервативность) рынка по отношению к изменениям цены товара. Из критериев оптимальности выводятся стратегии (алгоритмы) самоуправления рынка при переходе его из некоторого возмущенного состояния в состояние равновесия. Приведены примеры численного исследования различных моделей рынка с использованием метода возможных направлений.

Ключевые слова: рынок, цена товара, инерционность, запаздывание, математическая модель, оптимальное самоуправление.

В классической модели рынка Вальраса – Маршалла [1] и ее модификациях [2] рыночное равновесие достигается в точке пересечения линий спроса и предложения. В этой модели рынок, будучи выведенным в некоторый начальный момент времени из состояния равновесия, стремится снова к состоянию равновесия, совершая вокруг него затухающие колебания, если точка равновесия устойчива, и незатухающие колебания, если она неустойчива (известная «паутинообразная» модель рынка).

В реальных условиях функционирования рынка можно предположить, что вид линии спроса более или менее известен (его можно идентифицировать по результатам наблюдений покупательского спроса при различных ценах на один и тот же товар). Но вид линии предложения, как правило, неизвестен, и его практически невозможно оценить по наблюдениям за состоянием рынка. В связи с этим в данной работе рассматривается математическая модель рынка, не требующая знания линии предложения, но использующая знание линии потребительского спроса.

1. Постановка задачи

Пусть x – цена товара, Q^D – объем спроса товара при данной цене. В простейшем случае линия спроса, определяющая зависимость объема спроса товара от его цены, представляется прямой линией [1], понижающейся с ростом цены:

$$Q^D(x) = Q_m - ax, \quad (1)$$

где a – модуль тангенса угла наклона линии в координатах цена-спрос (x, Q), Q_m – спрос при нулевой цене. Реально спрос $Q^D(x)$ нелинеен, и при приближении цены к нулю очень быстро возрастает, а при значительном увеличении цены медленно приближается к нулю, оставаясь положительным, так что линейная модель спроса (1) является простейшим приближением линии спроса, достаточно адекватным реальности лишь в окрестности точки рыночного равновесия.

Пусть состояние рынка характеризуется в каждый данный момент (интервал) текущего времени t ценой товара $x(t)$. Не будет большим преувеличением предположение о том, что рынок стремится обеспечить покупательский спрос и при этом добиться максимальной прибыли путем соответствующего регулирования цены товара. Очевидно, слишком высокие цены приведут к падению покупательского спроса на этот товар и снизят объем продаж с соответствующим уменьшением прибыли. Наоборот, слишком низкие цены сделают рынок нерентабельным для продавцов. Следовательно, критерий оптимальности поведения рынка должен быть связан с требованием обеспечения покупательского спроса при цене, обеспечивающей максимальную прибыль продавцов, т.е. максимальную рентабельность рынка.

Примем в качестве стратегии поставки товара на рынок поставку товара при закупке его в объеме покупательского спроса. В момент времени t покупательский спрос определяется линией спроса

$$Q^D(t) = Q_m - ax(t). \quad (2)$$

Обычно между моментом заказа товара для поставки его на рынок и моментом исполнения заказа (фактической поставкой) проходит некоторое время τ (запаздывание, лаг поставки), так что к моменту времени t на рынок поступит товар, заказанный за τ единиц времени до этого в объеме

$$Q^S(t) = Q_m - ax(t - \tau) \quad (3)$$

по цене закупки P_1 . Таким образом, к моменту времени t объем поставки товара равен $Q^S(t)$, тогда как объем спроса товара в этот момент составляет величину $Q^D(t)$ по цене $x(t)$.

Заметим, что стратегия закупки товара в объеме текущего спроса (3) не учитывает того факта, что в момент времени $t - \tau$ на рынке уже может находиться непроданный на предыдущем интервале товар в объеме $Q(t - \tau)$, так что логичнее было бы заказывать поставку товара в объеме

$$Q^S(t) - Q(t - \tau) = Q_m - ax(t - \tau) - Q(t - \tau)$$

вместо объема спроса (3), если $Q^S(t) > Q(t - \tau)$, т.е. если текущий спрос превышает остатки, или вообще не заказывать товар, если его остатки превышают текущий спрос. Однако в такой постановке модель рынка резко усложняется, хотя, естественно, является более адекватной реальности. Из-за сложности такой модели оставим пока стратегию закупки товара для поставки его на рынок в виде текущего спроса (3).

Если $x(t - \tau) < x(t)$, то $Q^S(t) > Q^D(t)$, и спрос будет полностью удовлетворен. При этом останется непроданным $Q(t) = Q^S(t) - Q^D(t) > 0$ единиц товара. Если же $x(t - \tau) \geq x(t)$, то $Q^S(t) \leq Q^D(t)$, и спрос может оказаться неудовлетворенным в полном объеме. Весь товар $Q^S(t)$ будет продан, непроданного товара (остатка) не будет ($Q(t) = 0$), и образуется дефицит спроса $Q^S(t) - Q^D(t) < 0$, что приведет к недополученной прибыли.

Таким образом, если к моменту t (к началу t -го интервала дискретного времени) имелся остаток (непроданный товар) в объёме $Q(t)$, а дополнительное предложение (поставка) товара на этом интервале составило величину $Q^S(t)$, то продано на этом интервале может быть либо $Q^D(t)$, если $Q(t) + Q^S(t) \geq Q^D(t)$, либо $Q(t) + Q^S(t)$, если $Q(t) + Q^S(t) < Q^D(t)$. Тогда остаток товара на рынке к началу следующего $(t+1)$ -го интервала выразится величиной

$$Q(t+1) = [Q(t) + Q^S(t) - Q^D(t)] \cdot 1(Q(t) + Q^S(t) \geq Q^D(t)), \quad (4)$$

где $1(\cdot)$ – индикатор события, указанного в скобках, равный 1, если событие имеет место, и 0, если нет.

Соотношение (4) может рассматриваться как уравнение состояния рынка по переменной Q . В развернутой форме это уравнение имеет вид

$$Q(t+1) = [Q(t) - a(x(t-\tau) - x(t))] \cdot 1(Q(t) - a(x(t-\tau) - x(t))), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Очевидно, на закупку товара в объёме $Q^S(t)$ по цене P_1 продавец платит сумму $Q^S(t)P_1$. А продажа товара происходит в момент t по цене $x(t)$ в объёме

$$\begin{aligned} Q_{\text{прод}}(t) &= \min(Q(t) + Q^S(t), Q^D(t)) = \min(Q(t) + Q_m - ax(t-\tau), Q_m - ax(t)) = \\ &= [Q_m - (ax(t-\tau) - Q(t)) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t) + Q(t)/a) - \\ &- ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t) + Q(t)/a)] x(t) - (Q_m - ax(t-\tau)) P_1 - Q(t) P_2. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом выручка продавца составит на интервале t величину $Q_{\text{прод}}(t)x(t)$, а прибыль – разницу

$$Q^S(t)P_1 - Q_{\text{прод}}(t)x(t).$$

При этом, если $Q(t) \neq 0$ (оставался некоторый объём непроданного товара на текущем интервале дискретного времени), то хранение его стоило $Q(t)P_2$, где P_2 – цена хранения единицы товара, и прибыль уменьшается на эту величину. Таким образом, текущая прибыль продавца на t -м интервале времени составляет величину

$$\begin{aligned} J(t) &= \min(Q(t) + Q_m - ax(t-\tau), Q_m - ax(t)) x(t) - \\ &- (Q_m - ax(t-\tau)) P_1 - Q(t) P_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Если с течением времени цена стабилизируется, принимая равновесное значение x , так что $x(t) \rightarrow x$, $x(t-\tau) \rightarrow x$, $\min(Q(t) + Q_m - ax(t-\tau), Q_m - ax(t)) \rightarrow Q_m - ax$, то текущая прибыль принимает вид

$$J(t) = (Q_m - ax)(x - P_1) - Q(t)P_2, \quad (8)$$

откуда видно, что наибольшего и стационарного значения она достигает в отсутствие остатков непроданных товаров, т.е. при $Q(t) = 0$:

$$J(x) = (Q_m - ax)(x - P_1). \quad (9)$$

Это квадратичная выпуклая вверх функция x . Следовательно, максимальное значение текущая прибыль достигает при

$$x = \frac{Q_m + aP_1}{2a} = P^*, \quad (10)$$

$$\max_x J(x) = J(P^*) = \frac{(Q_m - aP_1)^2}{4a}.$$

Заметим, что линия спроса $Q_m - ax$ принимает значение, равное нулю, при $x_{max} = Q_m/a$ (это максимальная цена, при которой спрос обращается в нуль, т.е. предельная цена, по которой покупатель уже не согласен покупать товар). Цена закупки товара $P_1 < P^* < x_{max}$ всегда.

Таким образом, в рассматриваемой модели рынка существует равновесная цена P^* , обеспечивающая максимальную прибыль продавца, которая достигается при отсутствии остатков непроданного товара.

Пусть до некоторого начального момента $t = 0$ рынок находился в состоянии равновесия, так что

$$x(t)|_{t < 0} = P^*. \quad (11)$$

Пусть в момент $t = 0$ рынок каким-либо образом выводится из состояния равновесия, т.е. цена товара в этот момент принимает значение

$$x(0) = P_0 \neq P^*. \quad (12)$$

Очевидно, для обеспечения максимальной прибыли продавца рынок в следующий же момент дискретного времени должен вернуться в состояние равновесия P^* , т.е. скачком изменить цену от значения $x(0) = P_0$ до значения $x(1) = P^*$. Однако реальный рынок, как правило, не допускает резкого изменения цен, обладая определенной инерционностью, консерватизмом. Эту инерционность можно ввести в математическую модель рынка в виде аддитивной штрафной функции вида

$$-\frac{R}{2}(x(t+1) - x(t))^2, \quad R > 0,$$

к целевой функции рынка $J(t)$. Величину $u(t) = x(t+1) - x(t)$ можно рассматривать как «управление», которое вырабатывает инерционный рынок, стремясь перевести себя из возмущенного состояния $x(0) = P_0$ в равновесное P^* с максимизацией на траектории этого перехода суммарной прибыли:

$$\begin{aligned} J = \sum_{t=0}^T \{ [Q_m - (ax(t-\tau) - Q(t)) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t) + Q(t)/a) - \\ - ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t) + Q(t)/a)] x(t) - \\ - (Q_m - ax(t-\tau))P_1 - Q(t)P_2 \} - \sum_{t=0}^{T-1} \frac{R}{2} u^2(t) \Rightarrow \max_{u,x} \end{aligned} \quad (13)$$

при ограничениях типа равенств (уравнения состояния)

$$x(t+1) = x(t) + u(t), \quad x(0) = P_0 > 0, \quad x(t)|_{t < 0} = P^*, \quad t = \overline{0, T-1}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} Q(t+1) = [Q(t) - ax(t-\tau) + ax(t)] \cdot 1(x(t-\tau) < x(t) + Q(t)/a), \\ Q(0) = Q_0, \quad t = \overline{0, T-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

и неравенств (ограничения на состояния)

$$x(t+1) \geq 0, \quad t = \overline{0, T-1}, \quad (16)$$

или, что то же, неравенств (ограничений на управления)

$$x(t) + u(t) \geq 0, \quad t = \overline{0, T-1}. \quad (17)$$

Здесь T – время наблюдения за состоянием рынка (время функционирования рынка).

Таким образом, рассматриваемая модель рынка – это оптимально самоуправляемая система, описываемая уравнениями состояния (14), (15), максимизирующая выпуклый вверх функционал качества (13) с помощью управлений $u(t)$, допустимых системой неравенств (16) или (17).

3. Необходимые условия оптимальности

Выпишем необходимые условия оптимальности управления $u(t)$ и состояния $x(t)$, $Q(t)$, используя функцию Лагранжа, присоединяющую к функционалу качества (13) ограничения типа равенств (уравнения состояния) (14), (15) с помощью неопределенных множителей Лагранжа (сопряженных по Гамильтону переменных) $p(t+1)$, $q(t+1)$:

$$L(x, Q, u, p, q) = J(x, Q, u) + \sum_{t=0}^{T-1} p(t+1)(x(t) + u(t) - x(t+1)) + \\ + \sum_{t=0}^{T-1} q(t+1)[(Q(t) - ax(t-\tau) - ax(t)) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t) + Q(t)/a) - Q(t+1)]. \quad (18)$$

Решив двойственную задачу

$$L(u, p, q) = \max_{x, Q} L(x, Q, u, p, q) \quad (19)$$

при фиксированных значениях управлений $u(t)$ и сопряженных переменных $p(t+1)$, $q(t+1)$, получим систему рекуррентных уравнений для сопряженных переменных, решаемую в обратном времени:

$$p(t) = p(t+1) + \frac{\partial J}{\partial x(t)}, \quad t = \overline{T-1, 1}, \quad p(T) = \frac{\partial J}{\partial x(T)}; \quad (20)$$

$$q(t) = q(t+1) + \frac{\partial J}{\partial Q(t)}, \quad t = \overline{T-1, 1}, \quad q(T) = \frac{\partial J}{\partial Q(T)}, \quad (21)$$

где

$$\left. \frac{\partial J}{\partial x(t)} \right|_{1 \leq t \leq \tau-1} = Q_m - (aP^* - Q(t)) \cdot 1(P^* \geq x(t) + Q(t)/a) - \\ - 2ax(t) \cdot 1(P^* < x(t) + Q(t)/a),$$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial x(t)} \right|_{t=\tau} = Q_m - (aP_0 - Q(\tau)) \cdot 1(P_0 \geq x(\tau) + Q(\tau)/a) - \\ - 2ax(\tau) \cdot 1(P_0 < x(\tau) + Q(\tau)/a),$$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial x(t)} \right|_{\tau+1 \leq t \leq T-\tau} = Q_m - (ax(t-\tau) - Q(t)) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t) + Q(t)/a) - \\ - 2ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t) + Q(t)/a) - \\ - ax(t+\tau) \cdot 1(x(t) \geq x(t+\tau) + Q(t+\tau)/a) + aP_1,$$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial x(t)} \right|_{T-\tau \leq t \leq T} = Q_m - (ax(t-\tau) - Q(t)) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t) + Q(t)/a) - \\ - 2ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t) + Q(t)/a)); \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial J}{\partial Q(t)} \right|_{1 \leq t \leq \tau-1} &= x(t) \cdot 1(P^* \geq x(t) + Q(t)/a) - P_2, \\
\left. \frac{\partial J}{\partial Q(t)} \right|_{t=\tau} &= x(\tau) \cdot 1(P_0 \geq x(\tau) + Q(\tau)/a) - P_2, \\
\left. \frac{\partial J}{\partial Q(t)} \right|_{\tau+1 \leq t \leq T} &= x(t) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t) + Q(t)/a) - P_2.
\end{aligned} \tag{23}$$

Выпишем функцию Гамильтона как функцию управления $u(t)$:

$$H(u(t)) = -\frac{R}{2}u^2(t) + p(t+1) \cdot u(t). \tag{24}$$

Оптимальное управление находится из условия максимума этой функции по $u(t)$ при ограничениях (17). Функция Гамильтона (24) – выпуклая вверх квадратичная функция скалярной переменной $u(t)$. Безусловный максимум этой функции находится в точке

$$u^*(t) = p(t+1)/R. \tag{25}$$

Но оптимальное управление $u(t)$ должно удовлетворять ограничению (17), откуда получаем

$$u(t) = u^*(t) \cdot 1(u^*(t) + x(t) \geq 0), \tag{26}$$

т.е. окончательно

$$u(t) = (p(t+1)/R) \cdot 1(x(t) + p(t+1)/R \geq 0). \tag{27}$$

Подставив это выражение в уравнение состояния (14), получаем уравнение состояния в замкнутой форме (т.е. уравнение состояния оптимального самоуправляемого рынка):

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= x(t) + (p(t+1)/R) \cdot 1(x(t) + p(t+1)/R \geq 0), \\
x(0) &= P_0, \quad x(t)|_{t < 0} = P^*.
\end{aligned} \tag{28}$$

Это уравнение совместно с уравнением состояния (15) и уравнениями (20), (21) для сопряженных переменных $p(t)$, $q(t)$ образуют нелинейную двухточечную краевую задачу (ДТКЗ), решение которой определяет оптимальную траекторию перехода рассматриваемой модели инерционного рынка с запаздыванием из возмущенного состояния $x(0)=P_0$ к равновесному состоянию P^* .

К сожалению, эффективных общих методов решения нелинейных двухточечных краевых задач не существует.

4. Метод возможных направлений

Воспользуемся для решения оптимизационной задачи (13) при ограничениях типа равенств (14), (15) и неравенств (16) или (17) одним из методов последовательных приближений по управлениям – методом возможных направлений [3], конкретизировав его применительно к рассматриваемой задаче оптимизации инерционного рынка с запаздыванием. Опишем работу алгоритма по шагам.

Шаг 1. Выбираем в качестве допустимого начального приближения для управления $\bar{u}(t) \equiv 0$, $t = 0, T-1$.

Шаг 2. Используя рекуррентное соотношение (14), вычислим траекторию цен $\bar{x}(t)$, $t = \overline{1, T}$, соответствующую заданному управлению $\bar{u}(t)$, полагая $\bar{x}(0) = P_0$. Используя рекуррентное соотношение (15), вычислим соответствующую траекторию остатков товара $\bar{Q}(t)$, $t = \overline{1, T}$, полагая $\bar{Q}(0) = Q_0$.

Шаг 3. Используя формулы (22) и (23), вычислим все производные $\partial J / \partial x(t)$ и $\partial J / \partial Q(t)$, $t = \overline{1, T}$, соответствующие значениям $\bar{x}(t)$, $\bar{Q}(t)$, после чего, используя рекуррентные соотношения (20), (21), вычислим в обратном времени все сопряженные переменные $\bar{p}(t)$, $\bar{q}(t)$, $t = \overline{1, T}$.

Шаг 4. Вычислим градиент функции Гамильтона при заданных $\bar{u}(t)$ и полученных $\bar{p}(t)$:

$$\bar{\gamma}(t) = \left. \frac{\partial H(u(t))}{\partial u(t)} \right|_{u=\bar{u}, p=\bar{p}} = -R\bar{u}(t) + \bar{p}(t+1), \quad t = \overline{0, T-1}. \quad (29)$$

Найдем направления $s(t)$ изменения $\bar{u}(t)$, обеспечивающие наибольшее улучшение показателя качества (увеличение функции Гамильтона), решив задачу максимизации скалярного произведения

$$\sum_{t=0}^{T-1} \frac{\partial H(\bar{u}(t))}{\partial u(t)} s(t) = \sum_{t=0}^{T-1} \bar{\gamma}(t) s(t) \Rightarrow \max_s \quad (30)$$

при ограничениях $|s(t)| \leq 1$, $t = \overline{0, T-1}$. Очевидно, её решение имеет вид

$$\bar{s}(t) = \text{sign} \bar{\gamma}(t) = \text{sign}(\bar{p}(t+1) - R\bar{u}(t)), \quad t = \overline{0, T-1}. \quad (31)$$

Шаг 5. Строим новое управление

$$u(t) = \bar{u}(t) + \varepsilon \bar{s}(t), \quad t = \overline{0, T-1}, \quad (32)$$

где $\varepsilon > 0$ – шаг изменения управления в направлении $\bar{s}(t)$. Тогда получится новая траектория

$$x(t+1) = x(t) + \bar{u}(t) + \varepsilon \bar{s}(t), \quad t = \overline{0, T-1}, \quad x(0) = P_0. \quad (33)$$

Решив это уравнение для любого t , получим

$$x(t+1) = \bar{x}(t+1) + \varepsilon c(t+1), \quad t = \overline{0, T-1}, \quad (34)$$

где обозначено

$$c(t+1) = \sum_{k=0}^t \bar{s}(k), \quad t = \overline{0, T-1}. \quad (35)$$

С одной стороны, шаг $\varepsilon > 0$ должен быть выбран так, чтобы не нарушались неравенства (16):

$$\bar{x}(t+1) + \varepsilon c(t+1) \geq 0, \quad t = \overline{0, T-1}. \quad (36)$$

Очевидно, если $c(t+1) \geq 0$, то $\varepsilon > 0$ может быть любым, даже как угодно большим. Если же $c(t+1) < 0$, то, очевидно,

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\bar{x}(t+1)}{|c(t+1)|}.$$

Положим

$$\varepsilon_u = \min \{ \varepsilon_u(t) \}, \quad (37)$$

где

$$\varepsilon_u(t) = \begin{cases} +\infty, & c(t+1) \geq 0, \\ \bar{x}(t+1)/|c(t+1)|, & c(t+1) < 0, \end{cases} \quad t = \overline{0, T-1}. \quad (38)$$

С другой стороны, шаг $\varepsilon > 0$ желательно выбрать таким, чтобы целевой функционал при новом управлении увеличился как можно больше, т.е. чтобы $J(\varepsilon)$, определяемый формулой (13) при $u(t) = \bar{u}(t) + \varepsilon \bar{s}(t)$, $x(t+1) = \bar{x}(t+1) + \varepsilon c(t+1)$, $t = \overline{0, T-1}$, с учетом (15) и условия $c(t)|_{t \leq 0} = 0$, достигал максимального по $\varepsilon > 0$ значения. Ограничиваясь параболическим приближением функции $J(\varepsilon)$:

$$J(\varepsilon) \approx J(0) + \frac{dJ(0)}{d\varepsilon} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2 J(0)}{d\varepsilon^2} \varepsilon^2$$

и обозначая

$$\left. \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = A, \quad \left. \frac{d^2 J(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = B, \quad (39)$$

получим линейное уравнение

$$\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \approx A + B\varepsilon = 0, \quad (40)$$

откуда

$$\varepsilon_x = \arg \max_{\varepsilon} J(\varepsilon) \approx \left| \frac{A}{B} \right|. \quad (41)$$

Окончательно

$$\bar{\varepsilon} = \min(\varepsilon_u, \varepsilon_x). \quad (42)$$

Коэффициенты A и B рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} A = \sum_{t=0}^T \{ & Q_m c(t) + a P_1 c(t - \tau) - \\ & - [a \bar{x}(t - \tau) c(t) + a c(t - \tau) \bar{x}(t) - Q(t) c(t)] \cdot 1(\bar{x}(t - \tau) \geq \bar{x}(t) + Q(t)/a) - \\ & - 2ac(t) \bar{x}(t) \cdot 1(\bar{x}(t - \tau) < \bar{x}(t) + Q(t)/a) \} - R(\bar{x}(T) - P_0), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} B = \sum_{t=0}^T \{ & -2ac(t - \tau) c(t) \cdot 1(\bar{x}(t - \tau) \geq \bar{x}(t) + Q(t)/a) - \\ & - 2ac^2(t) \cdot 1(\bar{x}(t - \tau) < \bar{x}(t) + Q(t)/a) \} - Rc(T), \end{aligned} \quad (44)$$

причем при вычислениях следует учитывать, что $c(t)|_{t \leq 0} = 0$, $\bar{x}(t)|_{t < 0} = P^*$, $\bar{x}(0) = P_0$.

Шаг 6. Найдя таким образом оптимальную величину шага $\varepsilon > 0$, обеспечивающего максимальное увеличение функционала качества и не выводящего траекторию рыночной цены в область отрицательных значений, т.е. за допустимые пре-

дела, получим новое приближение управления $u(t) = \bar{u}(t) + \varepsilon s(t)$, $t = \overline{0, T-1}$, к оптимальному и оценим его качество. Если

$$\max_t |u(t) - \bar{u}(t)| \leq \delta, \quad (45)$$

где $\delta > 0$ – допустимая погрешность отыскания управления, то процесс построения решения заканчивается. Иначе переходим на **шаг 2** и продолжаем процесс последовательных приближений, пока не достигнем желаемой точности решения (45).

5. Более простые модели инерционного рынка с запаздыванием

Рассмотренная выше модель инерционного рынка с запаздыванием довольно сложна. Более простые модели, хотя, возможно, менее адекватные реальности, получаются, если в них $Q(t) \equiv 0$.

Для каждой из этих моделей в системе уравнений состояния (14), (15) остаётся только первое уравнение (14), описывающее динамику цены с теми же начальными условиями. Ограничения (16) или (17) остаются прежними. В системе сопряженных уравнений остаётся только уравнение (20) с соответствующей заменой целевого функционала на J_j , где j – номер рассматриваемого варианта задачи. Функция Гамильтона (24) и все соотношения (25) – (28) сохраняют прежний вид. Шаги алгоритма метода возможных направлений остаются прежними, только на **шаге 5** целевая функция $J(\varepsilon)$ заменяется функцией $J_j(\varepsilon)$, соответствующей рассматриваемому варианту модели.

Рассмотрим 3 варианта частных моделей.

Вариант 1. Рынок с уничтожением остатков непроданного товара. Эта модель характерна для рынка скоропортящихся продуктов.

В этой модели функционал качества принимает вид

$$J_1 = J|_{Q(t) \equiv 0} = \sum_{t=0}^T \{ [Q_m - ax(t-\tau) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t)) - \\ - ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t))] x(t) - (Q_m - ax(t-\tau)) P_1 \} - \sum_{t=0}^{T-1} \frac{R}{2} u^2(t). \quad (46)$$

Сопряженная система

$$p(t) = p(t+1) + \frac{\partial J_1}{\partial x(t)}, \quad t = \overline{T-1, 1}, \quad p(T) = \frac{\partial J_1}{\partial x(T)}, \quad (47)$$

где
$$\frac{\partial J_1}{\partial x(t)} = \frac{\partial J}{\partial x(t)} \Big|_{Q(t) \equiv 0}, \quad t = \overline{1, T}. \quad (48)$$

Вариант 2. Рынок с реализацией в каждый момент дискретного времени всего поставляемого товара, даже если поставка превышает спрос.

В этой модели функционал качества вместо (13) принимает вид

$$J_2 = \sum_{t=0}^T (Q_m - ax(t-\tau))(x(t) - P_1) - \sum_{t=0}^{T-1} \frac{R}{2} u^2(t). \quad (49)$$

Сопряженная система

$$p(t) = p(t+1) + \frac{\partial J_2}{\partial x(t)}, \quad t = \overline{T-1, 1}, \quad p(T) = \frac{\partial J_2}{\partial x(T)}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
\text{где} \quad \left. \frac{\partial J_2}{\partial x(t)} \right|_{1 \leq t \leq \tau-1} &= (Q_m - aP^*) - a(x(t) - P_1), \\
\left. \frac{\partial J_2}{\partial x(t)} \right|_{t=\tau} &= (Q_m - aP_0) - a(x(\tau) - P_1), \\
\left. \frac{\partial J_2}{\partial x(t)} \right|_{\tau+1 \leq t \leq T} &= (Q_m - ax(t-\tau)) - a(x(t) - P_1). \quad (51)
\end{aligned}$$

Вариант 3. Рынок с дополнительной поставкой товара на текущем интервале дискретного времени.

В этом варианте предполагается, что если цена товара $x(t-\tau)$ в момент его заказа превышает цену товара $x(t)$ в момент его продажи, так что поставка товара не удовлетворяет спрос в момент t , то возможна дополнительная поставка товара в момент t , что позволит удовлетворить спрос в этот момент. Однако в этой модели также предполагается, что если поставка заказанного ранее товара превышает спрос, товар все равно будет продан на интервале текущего времени. Таким образом, в этом варианте модели, как и в предыдущем варианте, предполагается, что продается весь товар без остатка, даже если поставка превышает спрос.

При такой постановке задачи функционал качества вместо (13) принимает вид

$$\begin{aligned}
J_3 = & \sum_{t=0}^T (Q_m - ax(t-\tau))(x(t) - P_1) + \\
& + a(x(t-\tau) - x(t))(x(t) - P_1) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t)) - \sum_{t=0}^{T-1} \frac{R}{2} u^2(t). \quad (52)
\end{aligned}$$

Этот функционал можно привести к эквивалентному, иногда более удобному виду

$$\begin{aligned}
J_3 = & \sum_{t=0}^T [Q_m - ax(t-\tau) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t)) - \\
& - ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t))] (x(t) - P_1) - \sum_{t=0}^{T-1} \frac{R}{2} u^2(t). \quad (53)
\end{aligned}$$

Сопряженная система

$$p(t) = p(t+1) + \frac{\partial J_3}{\partial x(t)}, \quad t = \overline{T-1, 1}, \quad p(T) = \frac{\partial J_3}{\partial x(T)}, \quad (54)$$

$$\begin{aligned}
\text{где} \quad \left. \frac{\partial J_3}{\partial x(t)} \right|_{1 \leq t \leq \tau-1} &= Q_m - aP^* \cdot 1(P^* < x(t)) - a(2x(t) - P_1) \cdot 1(P^* \geq x(t)), \\
\left. \frac{\partial J_3}{\partial x(t)} \right|_{t=\tau} &= Q_m - aP_0 \cdot 1(P_0 < x(\tau)) - a(2x(\tau) - P_1) \cdot 1(P_0 \geq x(\tau)), \\
\left. \frac{\partial J_3}{\partial x(t)} \right|_{\tau+1 \leq t \leq T-\tau} &= Q_m - ax(t-\tau) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t)) - \\
& - 2ax(t) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t)) - ax(t+\tau) \cdot 1(x(t) < x(t+\tau)) + aP_1,
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial J_3}{\partial x(t)} \right|_{\tau+1 \leq t \leq T} = Q_m - ax(t-\tau) \cdot 1(x(t-\tau) < x(t)) - a(2x(t) - P_1) \cdot 1(x(t-\tau) \geq x(t)). \quad (55)$$

6. Примеры численного моделирования вариантов рынка

При численном моделировании различных вариантов рынка использовались следующие значения параметров: $T = 500$; $R = 100$; $Q_m = 4$; $a = 0,4$; $P_0 = 3$; $P_1 = 1$; $Q_0 = 1$; $\tau = 0 - 40$. Значение равновесной цены вычислялось по формуле (10): $P^* = 5,5$.

На рис. 1 и 2 изображены оптимальное управление $u(t)$ и оптимальная траектория цены $x(t)$ для основной модели рынка в отсутствие запаздывания ($\tau = 0$). Виден экспоненциальный ход траектории цены к равновесному значению. Остаток непроданного товара в этом случае остается неизменным: $Q(t) = Q_0$.

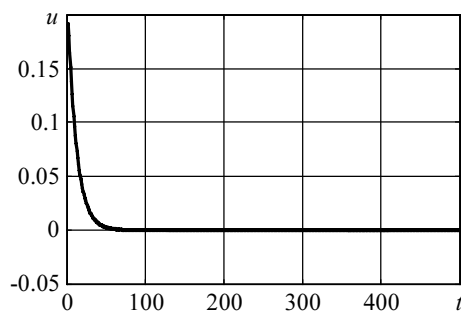


Рис. 1. Оптимальное управление $u(t)$ при $\tau = 0$

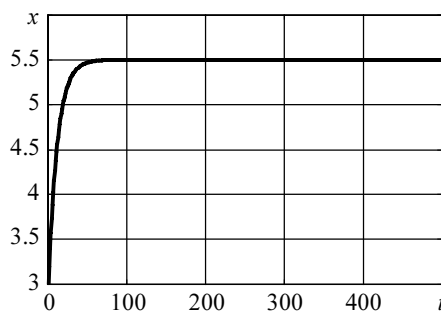


Рис. 2. Оптимальная цена $x(t)$ при $\tau = 0$

На рис. 3 – 6 приведены оптимальное управление $u(t)$, оптимальная траектория цены $x(t)$, поведение остатка непроданного товара $Q(t)$ и фазовая траектория рынка – зависимость остатка товара от цены $Q(x)$ – для основной модели рынка при запаздывании $\tau = 10$. Видно, что цена товара возрастает до равновесного значения и долго сохраняется на этом уровне. Но примерно за 2τ единиц времени до конца интервала функционирования рынка цена начинает снижаться, причем скорость снижения цены достигает максимального значения за τ единиц времени до конца интервала, а максимальное снижение цены достигается в конце интервала. Это можно объяснить необходимостью хотя бы частичной распродажи остатков непроданного товара.

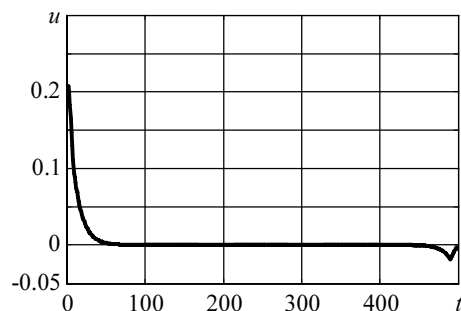


Рис. 3. Оптимальное управление $u(t)$ при $\tau = 10$

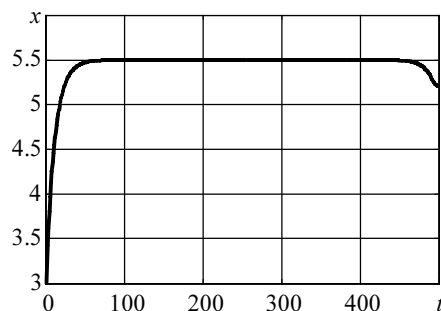
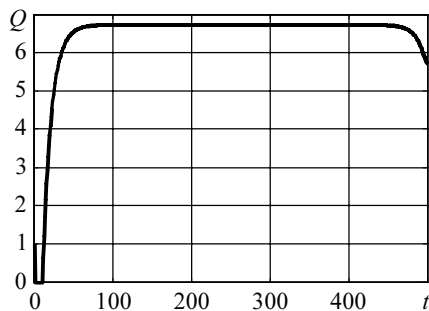
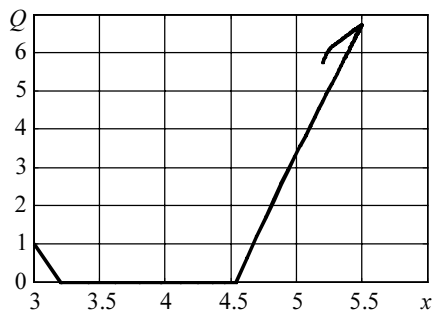
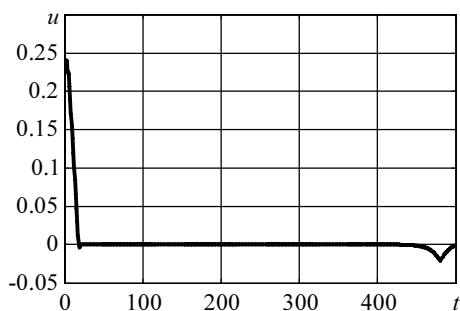
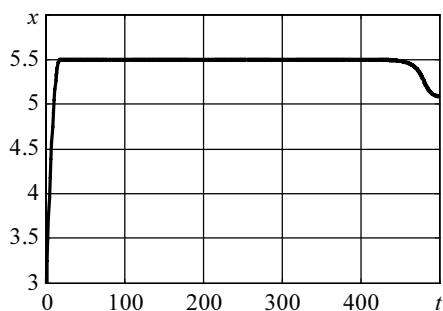
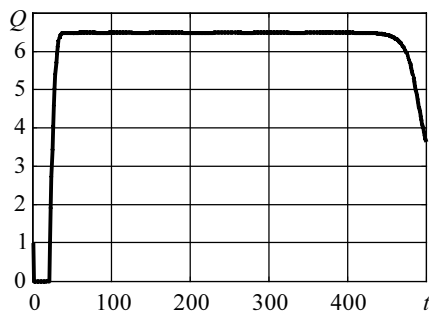
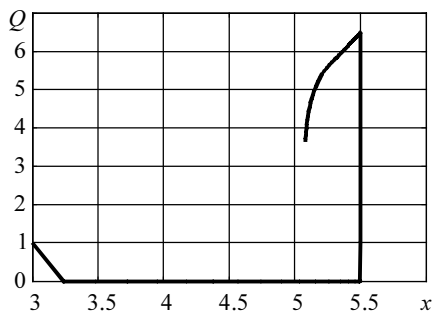


Рис. 4. Оптимальная цена $x(t)$ при $\tau = 10$

Рис. 5. Остаток товара $Q(t)$ при $\tau = 10$ Рис. 6. Фазовая траектория $Q(x)$ при $\tau = 10$

На рис. 7 – 10 приведены оптимальное управление $u(t)$, оптимальная траектория цены $x(t)$, поведение остатка непроданного товара $Q(t)$ и фазовая траектория рынка $Q(x)$ для основной модели рынка при запаздывании $\tau = 20$. Видно, что с увеличением запаздывания скорость снижения цены возрастает, а само снижение цены и уменьшение остатка товара к концу интервала увеличиваются.

Рис. 7. Оптимальное управление $u(t)$ при $\tau = 20$ Рис. 8. Оптимальная цена $x(t)$ при $\tau = 20$ Рис. 9. Остаток товара $Q(t)$ при $\tau = 20$ Рис. 10. Фазовая траектория $Q(x)$ при $\tau = 20$

Исследования показали, что при больших запаздываниях ($\tau > 40$) остаток товара к концу интервала уменьшается почти до нуля. Скорость этого снижения зависит от инерционности рынка, определяемой параметром R (чем больше R , тем выше инерционность), а время снижения определяется запаздыванием. Инерционность

рынка не позволяет быстро снижать цену при распродаже остатков и доводить ее до «бросовой» цены за конечное время 2τ .

На рис. 11 – 16 приведены оптимальное управление $u(t)$ и оптимальная траектория цены $x(t)$ для вариантов 1 – 3 частных моделей рынка при запаздывании $\tau = 30$.

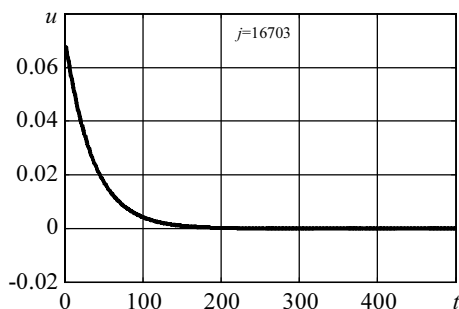


Рис. 11. Оптимальное управление $u(t)$ при $\tau = 0 - 30$ (вариант 1 модели)

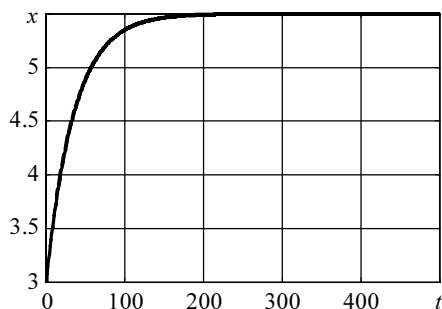


Рис. 12. Оптимальная цена $x(t)$ при $\tau = 0 - 30$ (вариант 1 модели)

Из рис. 11, 12 видно, что в варианте 1 модели рынка переход к равносному состоянию носит экспоненциальный характер и не зависит от запаздывания.

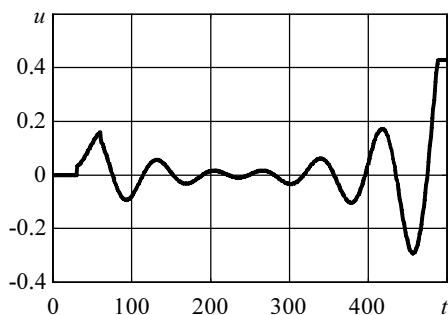


Рис. 13. Оптимальное управление $u(t)$ при $\tau = 0 - 30$ (вариант 2 модели)

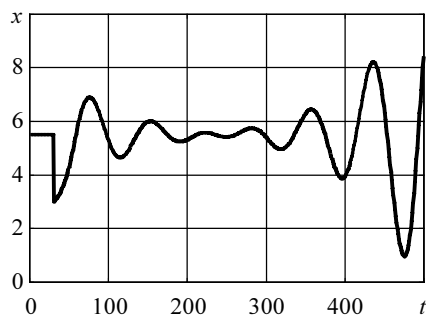


Рис. 14. Оптимальная цена $x(t)$ при $\tau = 0 - 30$ (вариант 2 модели)

Из рис. 13, 14 видно, что в варианте 2 модели рынка цена колеблется вокруг состояния равновесия. Как показали исследования, амплитуда этих колебаний возрастает с увеличением запаздывания τ и уменьшается с его уменьшением, причем колебания становятся пренебрежимо малыми при малых запаздываниях τ и исчезают при $\tau = 0$. В последнем случае в начале интервала функционирования рынка имеем экспоненциальный рост цены до равновесного значения, а затем трудно объяснимый новый рост цены в конце интервала. По-видимому, рост цены или увеличение амплитуды колебаний цены на правом конце интервала функционирования рынка («концевой» эффект) в моделях вариантов 2 и, как увидим ниже, 3 объясняется нереалистичным предположением этих моделей о возможности продажи всего поступающего на рынок товара безотносительно к спросу на него. Отсутствие этого предположения в основной модели рынка, как видим, не приводит к появлению «концевого» эффекта.

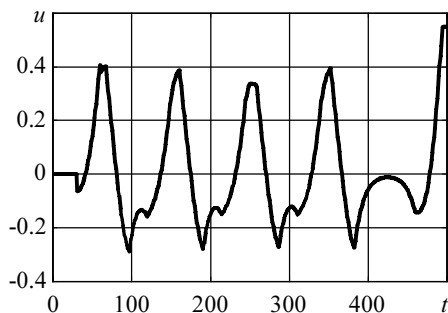


Рис. 15. Оптимальное управление $u(t)$ при $\tau = 0 - 30$ (вариант 3 модели)

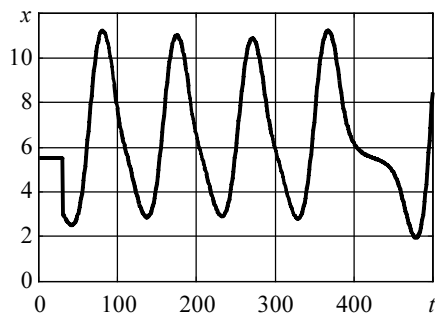


Рис. 16. Оптимальная цена $x(t)$ при $\tau = 0 - 30$ (вариант 3 модели)

Из рис. 15, 16 видно, что в варианте 3 модели рынка характер поведения цены тоже колебательный, но колебания имеют более сложный вид. При $\tau = 0$ они исчезают, и мы имеем экспоненциальный переход цены к равновесному значению. При малых τ возникают затухающие колебания, с увеличением τ уменьшение амплитуды колебаний замедляется, и, наконец, при некотором достаточно большом τ точка равновесия рынка теряет устойчивость (на рис. 16 – при $\tau = 30$).

Подчеркнем, что в отсутствие запаздывания ($\tau=0$) во всех вариантах частных моделей имеем экспоненциальный переход цены к равновесному значению, как и в случае основной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин В.М., Игнатъев С.М., Морозов В.И. Микроэкономика: В 2 т. / Под общ. ред. В.М. Гальперина. СПб.: Экономическая школа, 2002. Т. 1. 349 с.
2. Поддубный В.В., Романович О.В. Разностные динамические модели рынка вальрасовского типа с постоянными и случайными переменными запаздываниями // Сб. научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции «Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития. Транспорт, физика и математика». Одесса, 2007. Т. 1. С. 60 – 69.
3. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 256 с.

Статья представлена кафедрой прикладной информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 20 марта 2008 г.