ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.872

А.Е. Горбатенко, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ МАР-ПОТОКА В УСЛОВИЯХ РАСТУЩЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Для исследования МАР-потока предложен метод асимптотического анализа в условиях растущей интенсивности. Приведены результаты численной реализации асимптотического и допредельного распределений числа событий, наступивших в потоке за время *t*.

Ключевые слова: *асимптотический анализ, условие растущей интенсивности, распределение вероятностей числа событий потока.*

Многочисленные исследования реальных потоков в различных предметных областях, в частности телекоммуникационных потоков, а также потоков в экономических системах, выполненные зарубежными и отечественными специалистами, позволили сделать вывод о существенной неадекватности классических моделей (пуассоновских, рекуррентных) случайных потоков, поэтому актуальной является задача применения современных моделей потоков и развитие математических методов их исследования.

1. Математическая модель

Известно, что МАР-поток определяется цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей Q инфинитезимальных характеристик $q_{k\nu}$, набором неотрицательных величин $\lambda_k^{(1)} \geq 0$ и набором вероятностей $d_{k\nu}$ при всех $k \neq \nu$.

События МАР-потока наступают в соответствии с законами ММР вне моментов изменения состояния цепи Маркова $k(t)$, а в моменты перехода из состояния k в ν с вероятностью $d_{k\nu}$ наступает еще одно событие, а с вероятностью $(1 - d_{k\nu})$ событие в этот момент не наступает [1].

Обозначим $n(t)$ – число событий рассматриваемого потока, наступивших за время t.

Определим случайный процесс $\{k(t), n(t)\}$, который является двумерной цепью Маркова [2].

Обозначим $P(k,n,t) = P\{k(t) = k,\ n(t) = n\}$ – распределение вероятностей значений процесса $\{k(t), n(t)\}$.

Так как $\{k(t), n(t)\}$ является двумерной цепью Маркова, то для распределения его вероятностей $P(k,n,t)$ можно записать следующие равенства:

$$P(k,m,t+\Delta t) = P(k,m,t)(1-\lambda_k \Delta t)(1+q_{kk}\Delta t) + P(k,m-1,t)\lambda_k \Delta t +$$

$$+\sum_{\nu\neq k}\{P(\nu,m-1,t)d_{\nu k} + P(\nu,m,t)(1-d_{\nu k})\}q_{\nu k}\Delta t + o(\Delta t),$$

откуда, положив $d_{kk}=0$, получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(k,n,t)}{\partial t}=\lambda_k^{(1)}\{P(k,n-1,t)-P(k,n,t)\}+\sum_{\nu}\{P(\nu,n-1,t)d_{\nu k}+P(\nu,n,t)(1-d_{\nu k})\}q_{\nu k}. \quad (1)$$

Начальное условие для решения $P(k,n,t)$ этой системы определим в виде

$$P(k,n,0)=\begin{cases}R(k), & n=0,\\ 0, & n>0,\end{cases}$$

где $R(k)$ – стационарное распределение вероятностей значений цепи Маркова $k(t)$.

Обозначим

$$H(k,u,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(k,n,t)=R(k)M\{e^{jun(t)}\mid k(t)=k\}, \quad (2)$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

С учетом (2) из (1) для функций $H(k, u, t)$ получим задачу Коши:

$$\begin{gathered}\frac{\partial H(k,u,t)}{\partial t}=\lambda_k^{(1)}(e^{ju}-1)H(k,u,t)+\sum_{\nu}H(\nu,u,t)\left\{1+(e^{ju}-1)d_{\nu k}\right\}q_{\nu k},\\ H(k,u,0)=R(k).\end{gathered} \quad (3)$$

Задачей исследования случайных потоков однородных событий является нахождение распределения вероятностей $P(n,t)=P\{n(t)=n\}$, которое определяется как одномерное маргинальное распределение

$$P(n,t)=\sum_{k}P(k,n,t).$$

Методом асимптотического анализа [3] будем называть исследование уравнений, определяющих какие-либо характеристики системы, при выполнении некоторого асимптотического условия.

Поставленную задачу будем решать в асимптотическом условии растущей интенсивности.

Условием растущей интенсивности MAP-потока будем называть соотношения

$$\lambda_k^{(1)}=N\cdot\lambda,\ N\to\infty, \quad (4)$$

определяющие большие значения интенсивности потока.

С учетом (4) перепишем задачу Коши (3) и получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial H(k,u,t,N)}{\partial t}=N\lambda_k(e^{ju}-1)H(k,u,t,N)+\sum_{\nu}H(\nu,u,t,N)\left\{1+(e^{ju}-1)d_{\nu k}\right\}q_{\nu k},\\ H(k,u,0,N)=R(k).\end{gathered} \quad (5)$$

2. Асимптотическое распределение

Обозначим $\delta=1/N$ и в системе (5) выполним следующие замены:

$$t=\frac{\tau}{N},\ H(k,u,t,N)=F(k,u,\tau,\delta), \quad (6)$$

получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial F(k,u,\tau,\delta)}{\partial t}=\lambda_k(e^{ju}-1)F(k,u,\tau,\delta)+\delta\sum_{\nu}F(k,u,\tau,\delta)\left\{1+(e^{ju}-1)d_{\nu k}\right\}q_{\nu k},\\ F(k,u,0)=R(k).\end{gathered} \quad (7)$$

В соответствии с теоремой Пуанкаре об аналитической зависимости решения от параметра [4] можно утверждать, что существует

$$\lim_{\delta \to 0} F(k,u,\tau,\delta) = F(k,u,\tau) . \tag{8}$$

В задаче (7), с учетом (8), выполним предельный переход при $\delta \to 0$ ($N \to \infty$), тогда для $F(k,u,\tau)$ получим совокупность независимых задач Коши

$$\frac{\partial F(k,u,\tau)}{\partial \tau} = \lambda_k (e^{ju} - 1) F(k,u,\tau), \qquad F(k,u,0) = R(k) \tag{9}$$

для любых k.

Решения $F(k,u,\tau)$ задач (9) определяются равенствами

$$F(k,u,\tau) = R(k) \exp\left\{ (e^{ju} - 1) \lambda_k \tau \right\} . \tag{10}$$

Суммируя (10) по k и выполняя в экспоненте обратную к (6) замену $\tau = tN$, получим

$$\sum_k F(k,u,t) = \sum_k R(k) \exp\left\{ (e^{ju} - 1) \lambda_k N t \right\} = h(u,t) , \tag{11}$$

где $h(u,t)$ – асимптотическая при $\delta \to 0$ ($N \to \infty$) характеристическая функция числа $n(t)$ событий, наступивших в MAP-потоке за время t.

Разложив экспоненту в ряд, получим следующее равенство:

$$h(u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} \sum_k R(k) \frac{(\lambda_k N t)^n}{n!} e^{-\lambda_k N t} . \tag{12}$$

Для достаточно малых δ (больших N) выполняется приближенное (асимптотическое) равенство

$$H(k,u,t) = F(k,u,\tau,\delta) \approx F(k,u,\tau) . \tag{13}$$

С другой стороны, $H(k,u,t)$ определяется равенством (2). Также просуммировав (2) по k, получим

$$H(u,t) = \sum_k H(k,u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} \sum_k P(k,n,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n,t) . \tag{14}$$

Просуммировав по k (13), в силу (11), получим следующее асимптотическое равенство:

$$H(u,t) \approx h(u,t) .$$

Из полученного асимптотического равенства, в силу (12) и (14), получим

$$P_1(n,t) = \sum_k R(k) \frac{(\lambda_k N \cdot t)^n}{n\,!} e^{-\lambda_k N \cdot t} , \tag{15}$$

где $P_1(n, t) \approx P(n, t)$ – асимптотическое распределение числа событий потока, наступивших за время t.

Из (15) следует, что распределение вероятностей $P_1(n,t)$ является взвешенной суммой с весами $R(k)$ пуассоновских распределений, поэтому рассматриваемое распределение может быть многомодальным [4].

3. Область применимости асимптотических результатов к допредельной ситуации

Выше были получены формулы (15), позволяющие найти асимптотическое распределение числа событий наступивших в MAP-потоке за время t. Также это распределение можно найти в допредельной ситуации [5] при заданных значениях N. Остается выяснить, насколько результаты, полученные с помощью асимптотического анализа, близки к результатам, полученным в допредельной ситуации. Для этого находится величина $\Delta = \max_n |\hat{F}(n,t) - F(n,t)|$, где $\hat{F}(n,t)$ – функция распределения, полученная с помощью асимптотического анализа, $F(n,t)$ – функция распределения для допредельной ситуации.

Пусть

$$Q = \begin{Bmatrix} -0,2 & 0,15 & 0,05 \\ 0,1 & -0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & -0,8 \end{Bmatrix},\ \lambda = N\cdot\{2 \quad 7 \quad 14\},\ d = \begin{Bmatrix} 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \end{Bmatrix},\ N = 1000.$$

При заданных параметрах величины Δ при различных значениях t составили

t	0,03	0,02	0,01	0,005
Δ	0.0029	0.0027	0.0026	0.0025

На рис. 1 – 4 представлены графики распределения вероятностей числа событий в потоке, наступивших соответственно за время t = 0,005, t = 0,01, t = 0,02 и t = 0,03, полученные с помощью асимптотического анализа и допредельной ситуации.

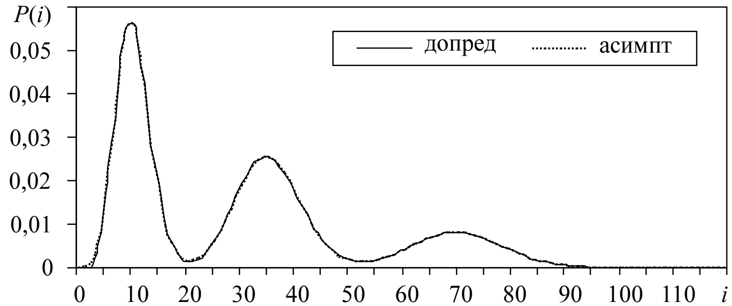

Рис. 1

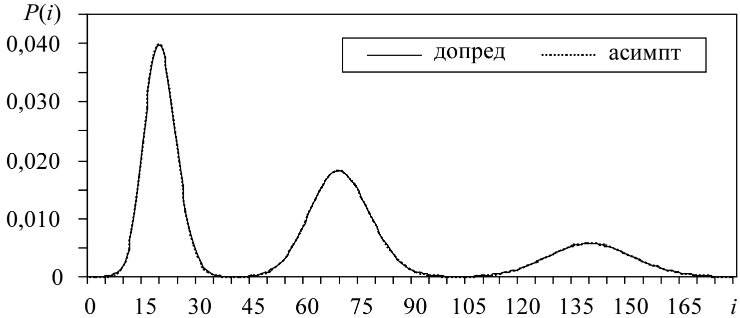

Рис. 2

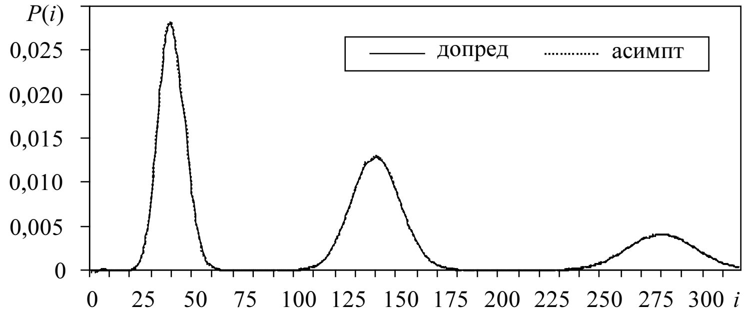

Рис. 3

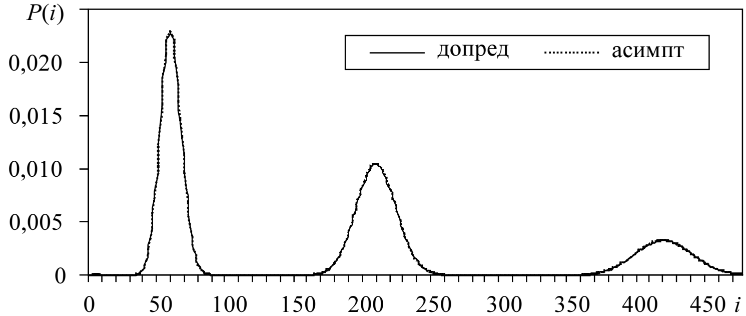

Рис. 4

В данной работе получено распределение вероятностей числа событий, наступивших в потоке за время t. Найдена численная реализация распределений, полученных с помощью асимптотического анализа и допредельной модели. Полученное распределение является многомодальным (гиперпуассоновским).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко Б.В.*, *Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: КомКнига, 2005. 336 с.
2. *Назаров А.А.*, *Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов: Учеб. пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
3. *Назаров А.А.*, *Моисеева С.П.* Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
4. *Эльсгольц Л.Е.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
5. *Лопухова С.В.*, *Назаров А.А.* Исследование рекуррентного потока // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2007. № 1. С 67 – 76.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 12 февраля 2008 г.