ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2008 Управление, вычислительная техника и информатика № 3(4)

УДК 519:389.1.001.5

О.В. Ниссенбаум

ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ АСИНХРОННОГО ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ С ИНИЦИИРОВАНИЕМ ЛИШНЕГО СОБЫТИЯ И ПРОДЛЕВАЮЩИМСЯ МЕРТВЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассмотрен асинхронный альтернирующий дважды стохастический поток событий с продлевающимся мертвым временем, порождаемый случайным процессом с двумя состояниями. Получена формула для преобразования Лапласа плотности вероятностей интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке. Приведены численные результаты, полученные постановкой статистического эксперимента.

Ключевые слова: *поток событий*, *случайный процесс*, *преобразование Лапласа*, *оценки*, *оценивание*, *длительность мертвого времени*, *статистический эксперимент.*

В последние десятилетия в связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей связи, телекоммуникационных сетей и т. п., которые можно объединить единым термином – цифровые сети интегрального обслуживания (Integrated Service Digital Networks – ISDN). Системы и сети массового обслуживания (СМО, СеМО) находят широкое применение в качестве математической модели реальных технических, физических и экономических систем. Случайные потоки событий являются, в свою очередь, математической моделью информационных потоков, функционирующих в СМО и СеМО. Например, случайными потоками событий достаточно адекватно описываются информационные потоки заявок, циркулирующие в ISDN, в измерительных системах, а также потоки элементарных частиц (фотонов, электронов), поступающих на регистрирующую аппаратуру в физических экспериментах.

В реальных объектах и системах, как правило, интенсивность потока событий меняется со временем, и часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий. Такие потоки описаны в [1, 2].

Со стороны регистрирующего прибора также может быть внесена некоторая неопределенность, в частности, прибор может обладать так называемым мертвым временем, то есть не регистрировать входящие события в течение некоторого времени с момента наступления или регистрации очередного события [3, 4].

В настоящей работе рассмотрена задача об оценке параметров потока и длительности периода мертвого времени, наступающего в момент регистрации события прибором и имеющего фиксированную длительность, в асинхронном альтернирующем потоке событий с инициированием лишнего события в условиях продления периода мертвого времени в моменты наступления событий потока.

1. Постановка задачи

Рассматривается поток с инициированием лишнего события, интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda$, $\lambda(t) = 0$. Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = \lambda$, и, наоборот, имеет место второе состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = 0$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии есть случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону $F_1(t) = 1 - \exp(-\alpha_1 t)$, во втором – $F_2(t) = 1 - \exp(-\alpha_2 t)$, где α_1, α_2 — интенсивности перехода процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе и из второго в первое соответственно. В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ. Во втором состоянии процесса $\lambda(t)$ генерация событий не производится. Переход процесса из первого состояния во второе вызывает инициирование лишнего события во втором состоянии в момент перехода.

После каждого зарегистрированного в момент времени t_i события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. События, наступившие в течение мертвого времени, вызывают продление периода ненаблюдаемости на величину T. По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т. д. Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1.

Требуется оценить параметры потока λ, α_1, α_2 и длительность мертвого времени T по наблюдениям за моментами наступления событий t_1, t_2, ...

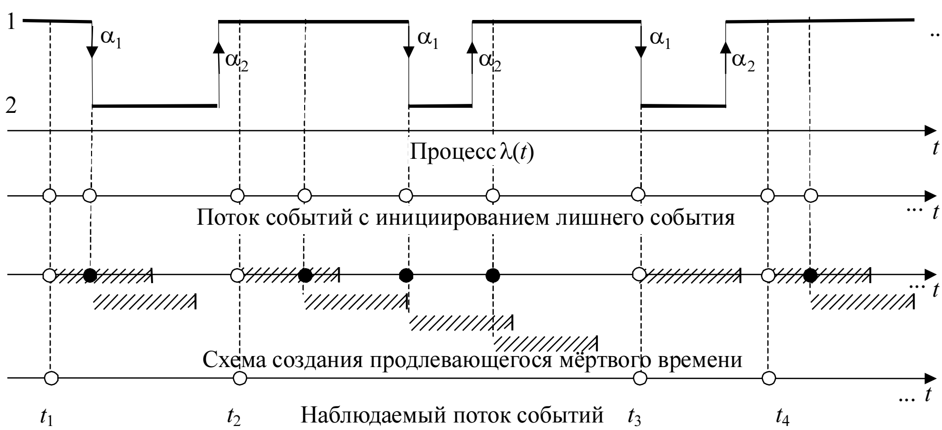

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий в схеме с продлевающимся мертвым временем: 1, 2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; штриховка – периоды мертвого времени; t_1, t_2, … – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке

2. Получение преобразования Лапласа для плотности вероятностей $p(\tau)$

В связи с тем, что начало периода мертвого времени совпадает с моментом t_i наступления наблюдаемого события, рассматриваемый процесс, как и процессы [5, 6], обладает марковским свойством и является потоком типа Пальма, а временные интервалы $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ взаимно независимы для любого i, ($i = 1,2,\ldots$). В силу стационарности случайного процесса $\lambda(t)$ плотность вероятностей временного интервала между событиями наблюдаемого потока $p(\tau_i) = p(\tau)$ для любого i, ($i = 1, 2,\ldots$).

Для того чтобы найти плотность вероятностей $p(\tau)$ для потока с продлевающимся мертвым временем, воспользуемся преобразованием Лапласа $g_\tau(s)$ [9,10]. Построения проведем подобно [7]. Обозначим общую длительность мертвого времени, которая является случайной величиной, ξ ($\xi \geq T$).

В каждом конкретном случае возникновения периода ненаблюдаемости возможны следующие варианты:

1) В течение периода (t_i, t_i+T) не произошло событий потока, и тогда $\xi = T$. Вероятность этого варианта есть функция Пальма

$$\varphi_0(T) = \int_T^\infty \tilde{p}(\tau)d\tau,$$

где $\tilde{p}(\tau) = (\lambda + \alpha_1)\gamma e^{-(\lambda+\alpha_1)\tau} + \alpha_2(1-\gamma)e^{-\alpha_2\tau}$ есть плотность вероятностей интервала между соседними событиями для исходного потока,

$$\gamma = \frac{\lambda - \alpha_2}{\lambda + \alpha_1 - \alpha_2}, \quad \tau \geq 0, \quad \lambda, \alpha_1, \alpha_2 > 0.$$

Тогда
$$\varphi_0(T) = \gamma e^{-(\lambda+\alpha_1)T} + (1-\gamma)e^{-\alpha_2 T}. \tag{1}$$

2) Однократное продление периода мертвого времени произойдет, если в момент времени x_1 ($0 < x_1 < T$) произойдет событие исходного потока, а на интервале (x_1, x_1+T) событий не прозойдет. Тогда $\xi = x_1 + T$. Вероятность такого случая есть $\varphi_0(T)\tilde{p}(x_1)dx_1$.

3) Двукратное продление периода мертвого времени произойдет, если в моменты времени x_1 и $x_1 + x_2$ ($0 < x_1 < T$, $0 < x_2 < T$) произойдут события исходного потока, а на интервале (x_1+x_2, x_1+x_2+T) событий не произойдет. Тогда $\xi = x_1+x_2+T$. Вероятность такого случая есть $\varphi_0(T)\tilde{p}(x_1)dx_1\tilde{p}(x_2)dx_2$.

Рассуждая аналогично далее и объединяя все возможные ситуации, получим

$$p(\xi) = \varphi_0(T)\left(\delta(\xi - T) + \int_0^T \delta(\xi - (x_1 + T))\tilde{p}(x_1)dx_1 + \right.$$
$$\left. + \int_0^T\int_0^T \delta(\xi - (x_1 + x_2 + T))\tilde{p}(x_1)\tilde{p}(x_2)dx_1dx_2 + \ldots\right), \tag{2}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция.

Применяя преобразование Лапласа к плотности вероятностей $p(\xi)$ и выполняя необходимые преобразования, получаем

$$g_\xi(s) = \varphi_0(T)e^{-sT}\left[1 - \frac{(\lambda+\alpha_1)\gamma(1-e^{-(\lambda+\alpha_1+s)T})}{\lambda+\alpha_1+s} - \frac{\alpha_2(1-\gamma)(1-e^{-(\alpha_2+s)T})}{\alpha_2+s}\right]^{-1}. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь интервал времени между событиями в наблюдаемом потоке $\tau_i = t_{i+1} - t_i$. Поскольку τ_i, $i = 1,2,\ldots$ – независимые случайные величины, то индекс i можно опустить. С другой стороны, $\tau = \xi + \eta$, где η – длительность интервала между моментом окончания общего периода ненаблюдаемости ξ и моментом наступления очередного события в наблюдаемом потоке. В силу рекуррентности наблюдаемого потока, величины η и ξ зависимы и справедливо

$$p(\tau) = \int_0^\infty p(\xi)p(\eta \mid \xi) = \int_0^\infty p(\xi)p(\tau - \xi \mid \xi)d\xi. \tag{4}$$

Найдем выражение для $p(\tau-\xi|\xi)$. В силу стационарности потока, припишем моменту наступления события в наблюдаемом потоке момент $\tau=0$ и рассмотрим интервал времени $(0, \xi+\eta)$. Зафиксируем момент ξ – момент окончания периода ненаблюдаемости.

Введем вероятности $p_{ij}(\tau-\xi)$ – условные вероятности того, что на интервале длительности $\eta=\tau-\xi$ не наступит событий наблюдаемого потока, и в момент времени τ будет иметь место j-е состояние процесса $\lambda(t)$ при условии, что в момент времени $\tau=\xi$ имело место i-е состояние процесса $\lambda(t)$, $(i, j = 1, 2)$. Составляя и решая для этих вероятностей систему дифференциальных уравнений с граничными условиями $p_{11}(0)=p_{22}(0)=1$, $p_{12}(0)=p_{21}(0)=0$, получаем следующие формулы:

$$p_{11}(\tau-\xi)=e^{-(\lambda+\alpha_1)(\tau-\xi)}, \quad p_{21}(\tau-\xi)=\frac{\alpha_2}{\lambda+\alpha_1-\alpha_2}\left(e^{-\alpha_2(\tau-\xi)}-e^{-(\lambda+\alpha_1)(\tau-\xi)}\right),$$
$$p_{12}(\tau-\xi)=0, \qquad p_{22}(\tau-\xi)=e^{-\alpha_2(\tau-\xi)}. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение вероятности $P_i(\tau-\xi)$ – условные вероятности того, что на интервале (ξ,τ) не произойдет событий наблюдаемого потока при условии, что в момент времени $\tau=\xi$ имело место i-е состояние процесса $\lambda(t)$, $i=1, 2$. Тогда, очевидно,

$$P_1(\tau-\xi)=p_{11}(\tau-\xi)+p_{12}(\tau-\xi)=e^{-(\lambda+\alpha_1)(\tau-\xi)},$$
$$P_2(\tau-\xi)=p_{21}(\tau-\xi)+p_{22}(\tau-\xi)=\frac{1}{\lambda+\alpha_1-\alpha_2}\left[(\lambda+\alpha_1)e^{-\alpha_2(\tau-\xi)}-\alpha_2 e^{-(\lambda+\alpha_1)(\tau-\xi)}\right]. \tag{6}$$

Плотности соответствующих вероятностей будут иметь вид

$$p_1(\tau-\xi)=-P_1'(\tau-\xi)=(\lambda+\alpha_1)e^{-(\lambda+\alpha_1)(\tau-\xi)},$$
$$p_2(\tau-\xi)=-P_2'(\tau-\xi)=\frac{(\lambda+\alpha_1)\alpha_2}{\lambda+\alpha_1-\alpha_2}\left[e^{-\alpha_2(\tau-\xi)}-e^{-(\lambda+\alpha_1)(\tau-\xi)}\right]. \tag{7}$$

Введем в рассмотрение вероятности $\pi_i(\tau|\xi)$ – условные вероятности того, что в момент времени τ процесс $\lambda(\tau)$ находился в i-м состоянии $(i=1, 2)$ при условии, что в момент времени $\tau=0$ наступило событие наблюдаемого потока и период ненаблюдаемости длительности ξ. Прибегнув к построению и решению дифференциальных уравнений для вероятностей $\pi_i(\tau|\xi)$, получим соотношения

$$\pi_1(\tau|\xi)=\pi_1+[\pi_1(0|\xi)-\pi_1]e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau},$$
$$\pi_2(\tau|\xi)=\pi_2-[\pi_1(0|\xi)-\pi_1]e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}, \tag{8}$$

где $\pi_1=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$, $\pi_2=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$.

$\pi_i(0|\xi)$ $(i=1, 2)$ в (8) – условные вероятности того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau=0$ находился i-м состоянии $(i=1,2)$ при условии, что в этот момент времени в наблюдаемом потоке наступило событие и начался период ненаблюдаемости длительности ξ. В дальнейшем будем обозначать $\pi_i(0|\xi)=\tilde{\pi}_i(\xi)$, $(i=1, 2)$.

Введем в рассмотрение переходные вероятности π_{ij} – вероятности того, что за время, которое пройдет от момента $\tau=0$ до наступления следующего события в наблюдаемом потоке, процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i, в котором он находился в момент $\tau = 0$, в состояние j, $(i, j = 1,2)$. Тогда для вложенной цепи Маркова (моментов наступления событий в наблюдаемом потоке) справедливы уравнения для финальных вероятностей:

$$\tilde{\pi}_1(\xi) = \tilde{\pi}_1(\xi)\pi_{11} + \tilde{\pi}_2(\xi)\pi_{21}\,,\ \tilde{\pi}_2(\xi) = \tilde{\pi}_1(\xi)\pi_{12} + \tilde{\pi}_2(\xi)\pi_{22}\,. \tag{9}$$

Введем в рассмотрение переходные вероятности $q_{ij}(\xi)$ – вероятности того, что если в момент времени $\tau = 0$ произошло событие наблюдаемого потока и наступил период ненаблюдаемости длительности ξ и при этом процесс $\lambda(\tau)$ находился в i-м состоянии, то в момент времени $\tau = \xi$ процесс $\lambda(\tau)$ окажется в j-м состоянии $(i, j = 1, 2)$. Составляя и решая систему дифференциальных уравнений для вероятностей $q_{ij}(\xi)$, получаем

$$q_{11}(\tau) = \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}\,,\ q_{12}(\tau) = \pi_2 - \pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}\,,$$

$$q_{21}(\tau) = \pi_1 - \pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}\,,\ q_{22}(\tau) = \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}\,, \tag{10}$$

где π_1, π_2 определены в (8).

Припишем моменту окончания периода ненаблюдаемости $(0,\xi)$ момент $t = 0$. Тогда на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$, где Δt – достаточно малый интервал времени, с вероятностью $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ или $\alpha_1\Delta t+o(\Delta t)$ произойдет событие наблюдаемого потока.

$p_{i1}(t)\lambda\Delta t+\mathrm{o}(\Delta t)$ – вероятность того, что на интервале $(0,t)$ не произошло событий наблюдаемого потока, а на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$ произошло событие в 1-м состоянии процесса $\lambda(t)$ при условии, что в момент $t = 0$ процесс $\lambda(t)$ находился в i-м состоянии $(i = 1, 2)$.

$p_{i1}(t)\alpha_1\Delta t+\mathrm{o}(\Delta t)$ – вероятность того, что на интервале $(0,t)$ не произошло событий наблюдаемого потока, а на полуинтервале $[t,t+\Delta t)$ произошло событие во 2-м состоянии процесса $\lambda(t)$ при условии, что в момент $t=0$ процесс $\lambda(t)$ находился в i-м состоянии $(i = 1, 2)$.

Плотности этих вероятностей вычислим, интегрируя их по t от нуля до бесконечности и учитывая (5).

$$p_{11} = p_{21} = \frac{\lambda}{\lambda+\alpha_1}\,,\ p_{12} = p_{22} = \frac{\alpha_1}{\lambda+\alpha_1}\,. \tag{11}$$

Тогда, в силу марковости процесса, учитывая (10) и (11), получим

$$\pi_{11} = \pi_{21} = \frac{\lambda}{\lambda+\alpha_1}\,,\ \pi_{12} = \pi_{22} = \frac{\alpha_1}{\lambda+\alpha_1}\,. \tag{12}$$

Переходные вероятности не зависят от ξ. Подставляя (12) в (9), а затем (9) в (8), получаем

$$\pi_1(\tau|\xi) = \pi_1 + \pi_2 \frac{\lambda-\alpha_2}{\lambda+\alpha_1} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}\,,\ \pi_2(\tau|\xi) = \pi_2 - \pi_2 \frac{\lambda-\alpha_2}{\lambda+\alpha_1} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\tau}\,. \tag{13}$$

По построению вероятностей $p_{ij}(\tau-\xi)$, $P_i(\tau-\xi)$ и $\pi_i(\tau|\xi)$ справедливо

$$p(\tau-\xi|\xi) = p_1(\tau-\xi)\pi_1(\tau|\xi) + p_2(\tau-\xi)\pi_2(\tau|\xi). \tag{14}$$

Подставляя (7) и (13) в (14) и выполняя необходимые преобразования, получаем

$$p(\tau-\xi\,|\,\xi) = (\lambda+\alpha_1)\Gamma(\xi)e^{-(\lambda+\alpha_1)(\tau-\xi)} + \alpha_2\left[1-\Gamma(\xi)\right]e^{-\alpha_2(\tau-\xi)}\,, \tag{15}$$

где $\Gamma(\xi) = \dfrac{\lambda-\alpha_2}{\lambda+\alpha_1-\alpha_2}\left(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)\xi}\right)$, π_1, π_2 определены в (8).

Преобразование Лапласа для $p(\tau)$ запишется в виде

$$g_\tau(s)=\int_0^\infty e^{-s\tau}p(\tau)d\tau=\int_0^\infty e^{-s\tau}\left(\int_0^\tau p(\xi)p(\tau-\xi\,|\,\xi)d\xi\right)d\tau\,. \qquad (16)$$

Подставляя (15) в (16), учитывая (3) и производя необходимые преобразования, получаем

$$g_\tau(s)=\frac{(\lambda+\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2+s)\pi_1 g_\xi(s)+(\lambda-\alpha_2)\pi_2 s g_\xi(\alpha_1+\alpha_2+s)}{(\lambda+\alpha_1+s)(\alpha_2+s)}, \qquad (17)$$

где π_1, π_2 определены в (8), λ, α_1, $\alpha_2>0$.

3. Построение оценок

Перейдем к оцениванию фиксированной длины мертвого времени T. Воспользуемся методом моментов [8].

По теореме Колмогорова в силу независимости величин τ_i, $i=1,2,\ldots$, статистики $C_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i^k$ сходятся почти наверное к $M(\tau^k)$ при $n\to\infty$. При известных параметрах λ, α_1, α_2 и неизвестном T требуется решить относительно T одно уравнение моментов

$$C_1=M(\tau)\,, \qquad (18)$$

где

$$C_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i\,,$$

$$M(\tau)=-\left(g_\tau(s)\right)'_s\big|_{s=0}=-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\lambda+\alpha_1}+$$

$$\frac{1}{\varphi_0(T)}\left(\frac{\gamma\left(1-e^{-(\lambda+\alpha_2)T}\right)}{\lambda+\alpha_1}+\frac{(1-\gamma)\left(1-e^{-\alpha_2 T}\right)}{\alpha_2}\right)-\frac{(\lambda-\alpha_2)\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}g_\xi(\alpha_1+\alpha_2)\,.$$

Здесь γ, $\varphi_0(T)$ определены в (1), а λ, α_1, $\alpha_2>0$, $T\geq 0$; $g_\xi(\alpha_1+\alpha_2)$ – формулой (4), в которой вместо s следует подставить $\alpha_1+\alpha_2$.

Уравнение (18) для неизвестной T является нелинейным уравнением одной переменной с тремя параметрами и может быть решено численно, при этом оценку мертвого времени $\hat{T}$ следует выбирать из интервала $(0,\tau_{\min})$, где $\tau_{\min}$ – минимальный интервал между соседними событиями в наблюдаемом потоке.

Для оценивания четырех неизвестных параметров потока имеем уравнения моментов $C_k=M(\tau^k)$, $k=\overline{1,4}$, где $M(\tau^k)=(-1)^k g_\tau^{(k)}(s)\big|_{s=0}$.

С целью установления свойств полученных оценок проведен статистический эксперимент. При одних и тех же значениях параметров исходного потока с инициированием лишнего события имитировалось 1000 реализаций наблюдаемого потока. Оценки неизвестных параметров вычислялись путем численного решения уравнений моментов, рассчитывались выборочные средние, вариации от истинного значения, строились доверительные интервалы.

Поиск оценки мертвого времени проводился на интервале $(0,\tau_{\min}]$, где $\tau_{\min}$ – длительность минимального интервала между событиями в наблюдаемом потоке. В том случае, когда функция (18) не достигала минимума внутри этого интервала, в качестве оценки принималось $\hat{T}=\tau_{\min}$.

Результаты эксперимента приведены на рис. 2 и 3. На рис. 2 приведены графики выборочного среднего (сплошная линия), верхней и нижней границы доверительных интервалов (пунктирные линии) для оценки мертвого времени при значениях параметров $\lambda = 10$, $\alpha_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 0{,}01$, $T = 5$ при общем времени наблюдения от 100 до 30 000 ед., горизонтальной сплошной линией обозначено истинное значение измеряемого параметра ($T = 5$ ед. вр.) На рис. 3 приведены графики выборочной дисперсии (сплошная линия) и вариации от истинного значения (прерывистая линия) для тех же значений параметров. По горизонтальной оси отложено общее время наблюдения за процессом (в единицах времени), по вертикальной – значения соответствующих характеристик.

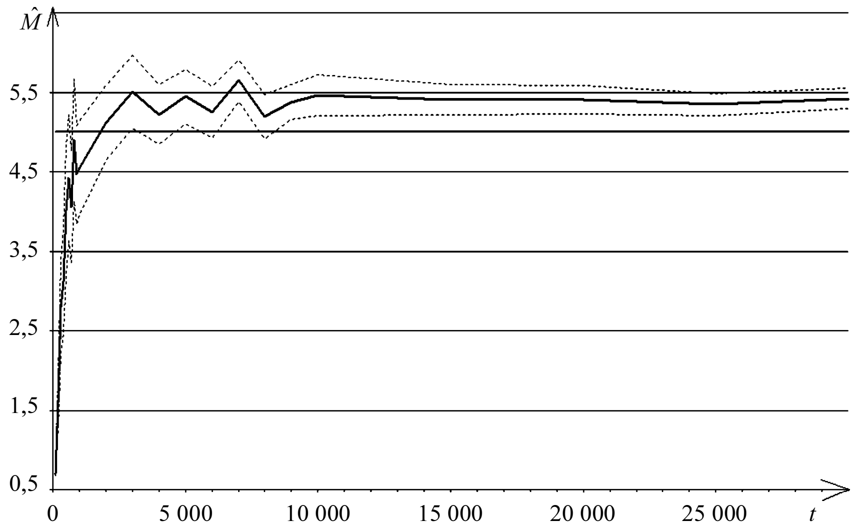

Рис. 2

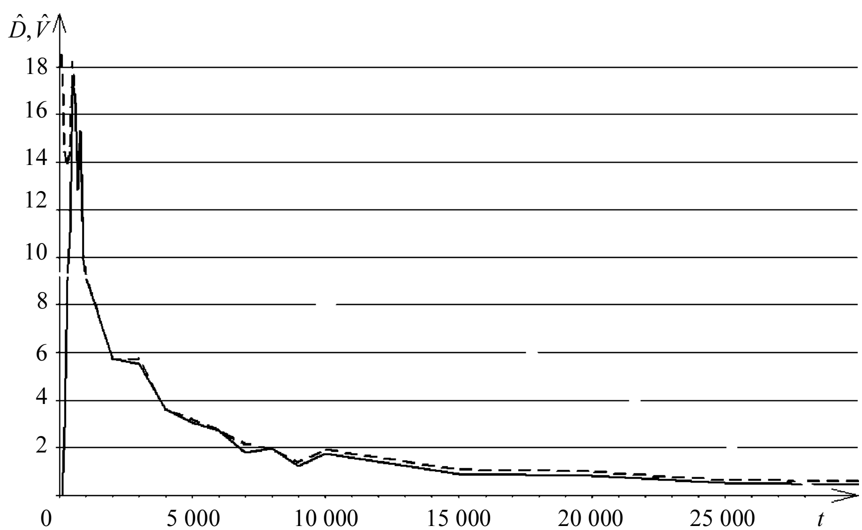

Рис. 3

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что оценка $\hat{T}$ начиная с общего времени наблюдения за потоком от 3000 ед. времени становится достаточно устойчивой и приближается к истинному значению параметра T, что является следствием достаточно большой выборки наблюдений при $t > 3000$ ед. вр.

Заключение

Полученные результаты показывают возможность оценивания методом моментов параметров рассмотренного потока и длительности мёртвого времени по результатам текущих наблюдений за потоком событий для регистрирующих приборов с продлевающимся мёртвым временем. Результаты численных экспериментов говорят о достаточной точности полученных оценок, однако в силу достаточно сложного вида (18) вычисление оценки $\hat{T}$ требует применения численных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горцев А.М.*, *Нежельская Л.А.* Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Сер. Системы связи. 1989. Вып. 7. С. 46 – 54.
2. *Васильева Л.А.*, *Горцев А.М.* Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 69 – 79.
3. *Курочкин С. С.* Многомерные статистические анализаторы. М.: Атомиздат, 1968.
4. *Апанасович В.В.*, *Коляда А.А.*, *Чернявский А.Ф.* Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск: Университетское, 1988.
5. *Горцев А.М.*, *Ниссенбаум О.В.* Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события // Вестник ТГУ. 2004. № 284. С. 139 – 147.
6. *Горцев А.М.*, *Ниссенбаум О.В.* Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Изв. вузов. Физика. 2005. № 10. С. 35 – 49.
7. *Горцев А.М.*, *Нежельская Л.А.* // Измерительная техника. 2003. № 6. С. 7.
8. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
9. *Ивченко Г.И.*, *Каштанов В.А.*, *Коваленко И.Н.* Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982.
10. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963.

Статья представлена кафедрой исследования операций факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 12 декабря 2007 г.