

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 62-50

Г.М. Гайнутдинова, Т.И. Грекова

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАЛОГОВЫМИ ОТЧИСЛЕНИЯМИ

Решена задача оптимального управления налоговыми отчислениями при ограниченном времени управления для случая односекторной экономики с однородным продуктом. Рассматривается две среды: внутренняя – производственная сфера (предприятие) и внешняя – непроизводственная сфера (государство), существующая за счёт налоговых отчислений из производственной сферы. Использована неоклассическая модель экономического роста, которая описывает рост в агрегированной замкнутой экономике.

Ключевые слова: *налоговые отчисления, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина.*

1. Постановка задачи

Задача оптимального управления рассматривается на конечном интервале времени $[0, T]$. Произведённый продукт $Y(t)$ может использоваться и как потребительский для удовлетворения потребностей населения, и как фондообразующий для создания новых производственных мощностей. В процессе производства используются два фактора: труд $L(t)$ и капитал $K(t)$.

Пусть $C(t)$ – непроизводственное потребление в производственной сфере в момент времени t , а $I(t)$ – капиталовложения в момент времени t . В качестве внешнего управления рассмотрим функцию $v(t)$ – налоговую ставку на прибыль производственной сферы, которая удовлетворяет ограничениям

$$v_{\min} < v(t) < v_{\max}, \quad (1)$$

где $v_{\min}$ – минимальная налоговая ставка: $0 \leq v_{\min} < 1$, $v_{\max}$ – максимальная налоговая ставка: $0 < v_{\max} < 1$.

Будем учитывать, что в некоторый промежуток времени возможны так называемые «налоговые каникулы», когда с прибыли предприятия ничего не изымается: $v(t) = v_{\min} = 0$.

Пусть $N(t)$ – темп налоговых отчислений. Согласно тождественному равенству доходов и расходов,

$$Y(t) = \gamma Y(t) + I(t) + C(t) + N(t), \quad (2)$$

где γ – постоянный коэффициент производственных затрат (или норма материальности), $0 < \gamma < 1$.

Скорость роста основных фондов определяется уравнением

$$K'(t) = I(t) - \mu K(t), \quad (3)$$

где μ – норма амортизации ($\mu > 0$).

Частью дохода, облагаемую налогом, назовём величину

$$D(t) = Y(t) - \gamma Y(t) = (1 - \gamma)Y(t). \quad (4)$$

Тогда налоговые отчисления будут иметь вид

$$N(t) = \nu(t)D(t) = \nu(t)(1 - \gamma)Y(t), \quad (5)$$

а величина

$$\Pi(t) = D(t) - N(t) = (1 - \nu(t))(1 - \gamma)Y(t) \quad (6)$$

представляет собой средства, оставшиеся в распоряжении производственной сферы после налоговых отчислений. Тогда

$$\Pi(t) = I(t) + C(t) = (1 - \nu(t))(1 - \gamma)Y(t). \quad (7)$$

Таким образом, имеем следующие соотношения:

$$I(t) = s(1 - \nu(t))(1 - \gamma)Y(t); \quad (8)$$

$$C(t) = (1 - s)(1 - \nu(t))(1 - \gamma)Y(t); \quad (9)$$

$$K'(t) = s(1 - \nu(t))(1 - \gamma)Y(t) - \mu K(t), \quad (10)$$

где $s(t)$ – норма накопления, $0 < s < 1$.

Производственные возможности совокупности производителей описываются производственной функцией [1], которая представляется в виде

$$Y(t) = F(K(t), L(t)). \quad (11)$$

С использованием выражения (11) уравнение (10) примет вид

$$K'(t) = s(1 - \nu(t))(1 - \gamma)F(K(t), L(t)) - \mu K(t). \quad (12)$$

Траектория экономического роста определяется начальным условием $K(0) = K_0$, где K_0 – начальный капитал. Из этой «точки» экономика «стартует», и условием экономического горизонта: $K(T) = K_T$, где $K_T > 0$ – минимально допустимая величина основных фондов для обеспечения возможности потребления за пределами горизонта планирования.

Уравнение баланса (2) для удельных величин

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}, \quad c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}, \quad i(t) = \frac{I(t)}{L(t)}, \quad n(t) = \frac{N(t)}{L(t)}, \quad y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = f(k),$$

можно переписать:

$$y(t) = \gamma y(t) + i(t) + c(t) + n(t). \quad (13)$$

Предполагая, что численность рабочей силы $L(t)$ в момент времени t пропорциональна её начальному значению L_0 и рост $L(t)$ происходит по экспоненциальному закону с темпом m ($m > 0$), $L(t) = L_0 e^{mt}$, можно скорость изменения величины капиталовооружённости рабочего $k(t)$ записать следующим образом:

$$k'(t) = s(1 - \nu(t))(1 - \gamma)f(k(t)) - \lambda k(t), \quad (14)$$

где $\lambda = \mu + m$, $\lambda = \text{const} > 0$.

Начальное состояние экономики задаётся значением капиталовооружённости рабочего в момент времени $t = 0$:

$$k(0) = k_0, \quad k_0 > 0, \quad (15)$$

а условие экономического горизонта задаётся равенством

$$k(T) = k_T, \quad k_T > 0. \quad (16)$$

Управление экономикой заключается в выборе налоговой ставки $\nu(t)$ с целью обеспечения максимальной суммы удельных налоговых отчислений:

$$J = \int_0^T n(t) e^{-\delta t} dt = \int_0^T v(t)(1-\gamma)f(k(t))e^{-\delta t} dt, \quad (17)$$

где δ – постоянная норма дисконтирования при следующих ограничениях:

$$k'(t) = s(1-v(t))(1-\gamma)f(k(t)) - \lambda k(t),$$

$$k(0) = k_0, k_0 > 0, k(T) = k_T, k_T > 0, v_{\min} \leq v(t) \leq v_{\max}, t \in [0, T].$$

2. Алгоритм оптимального управления

В результате решения поставленной задачи с применением принципа максимума Понтрягина [2] получено релейное трёхуровневое оптимальное управление

$$v(t) = \begin{cases} v_{\max}, & \text{если } q(t) < 1; \\ v_{\min}, & \text{если } q(t) > 1; \\ v_{\min} < v(t) < v_{\max}, & \text{если } q(t) = 1 \end{cases} \quad (18)$$

при ограничениях

$$k'(t) = s(1-v(t))(1-\gamma)f(k(t)) - \lambda k(t),$$

$$q'(t) = (\lambda + \delta)q(t) - (sv(t)(1-\gamma) + q(t)s(1-v(t))(1-\gamma))f'(k(t)),$$

$$k(0) = k_0, k_0 > 0, k(T) = k_T, k_T > 0, q(T)(k(T) - k_T) = 0, q(T) \geq 0, \quad (19)$$

где использовано обозначение $q(t) = \psi(t)e^{\delta t}$, $\psi(t)$ – сопряжённая переменная функции Гамильтона.

3. Анализ решения

Анализ системы дифференциальных уравнений (19) облегчается тем, что она автономна, в правые части уравнений не входит в явном виде время t .

Найдём участки знакопостоянства производных $q'(t)$ и $k'(t)$. Пусть $q(t) > 1$, тогда в силу (18) $v(t) = v_{\min} = 0$,

$$q'(t) = (\lambda + \delta)q(t) - (sv_{\min}(1-\gamma) + q(t)s(1-v_{\min})(1-\gamma))f'(k(t)). \quad (20)$$

Если $q'(t) > 0$, то

$$q(t) > \frac{sv_{\min}(1-\gamma)f'(k(t))}{\delta + \lambda - s(1-v_{\min})(1-\gamma)f'(k(t))},$$

$q'(t) < 0$ соответствует

$$q(t) < \frac{sv_{\min}(1-\gamma)f'(k(t))}{\delta + \lambda - s(1-v_{\min})(1-\gamma)f'(k(t))},$$

$q'(t) = 0$ соответствует

$$q(t) = \frac{sv_{\min}(1-\gamma)f'(k(t))}{\delta + \lambda - s(1-v_{\min})(1-\gamma)f'(k(t))}. \quad (21)$$

Введем обозначение:

$$\varphi_1(k(t)) = \frac{sv_{\min}(1-\gamma)f'(k(t))}{\delta + \lambda - s(1-v_{\min})(1-\gamma)f'(k(t))}. \quad (22)$$

Исследуем поведение функции $\varphi_1(k(t))$. Поскольку по неоклассическим условиям $f'(k(t)) > 0$, то чтобы $\varphi_1(k(t))$ была положительной, необходимо выполнение условия

$$f'(k(t)) < \frac{\delta + \lambda}{s(1 - v_{\min})(1 - \gamma)}. \quad (23)$$

В силу неоклассического условия $f''(k) < 0$ и условия (23), $\varphi_1'(k(t)) < 0$, то есть $\varphi_1(k(t))$ является убывающей функцией.

При $q(t) = \varphi_1(k(t)) = 1$ (22) принимает вид

$$f'(k(t)) = \frac{\delta + \lambda}{s(1 - \gamma)}. \quad (24)$$

В силу неоклассических условий $f'(k)$ является монотонно убывающей функцией. Поэтому уравнение (24) $\left(\frac{\delta + \lambda}{s(1 - \gamma)} = \text{const} \right)$ имеет единственное решение $k^* > 0$. Таким образом, график функции $\varphi_1(k(t))$ проходит через точку $(k^*, 1)$.

Тогда для $q(t) > 1$ получаем соотношения:

$$\begin{aligned} q'(t) &> 0, \text{ если } q(t) > \varphi_1(k(t)); \\ q'(t) &< 0, \text{ если } q(t) < \varphi_1(k(t)); \\ q'(t) &= 0, \text{ если } q(t) = \varphi_1(k(t)). \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим уравнение для $k(t)$ системы (19). Поскольку $v(t) = v_{\min}$, то

$$\text{если } k'(t) > 0, \text{ то } f(k(t)) > \frac{\lambda}{s(1 - v_{\min})(1 - \gamma)} k(t);$$

$$\text{если } k'(t) < 0, \text{ то } f(k(t)) < \frac{\lambda}{s(1 - v_{\min})(1 - \gamma)} k(t);$$

$$\text{если } k'(t) = 0, \text{ то } f(k(t)) = \frac{\lambda}{s(1 - v_{\min})(1 - \gamma)} k(t).$$

В силу неоклассических условий $f(k(t))$ является монотонно возрастающей функцией. Поэтому уравнение

$$f(k(t)) = \frac{\lambda}{s(1 - v_{\min})(1 - \gamma)} k(t)$$

имеет единственный положительный корень k_1 . Тогда для $q(t) > 1$ получим следующее:

$$\begin{aligned} k'(t) &> 0, \text{ если } k < k_1; \\ k'(t) &< 0, \text{ если } k > k_1; \\ k'(t) &= 0, \text{ если } k = k_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Величина $k^* < k_1$, так как $f(k^*) > \frac{\lambda}{s(1 - v_{\min})(1 - \gamma)} k^*$.

Рассмотрим случай $q(t) < 1$. В силу (18), $v(t) = v_{\max}$. Следовательно,

$$q'(t) = (\lambda + \delta)q(t) - (sv_{\max}(1 - \gamma) + q(t)s(1 - v_{\max})(1 - \gamma))f'(k(t)). \quad (27)$$

$$q(t) > \frac{sv_{\max}(1 - \gamma)f'(k(t))}{\delta + \lambda - s(1 - v_{\max})(1 - \gamma)f'(k(t))}, \text{ если } q'(t) > 0,$$

$$q(t) < \frac{sv_{\max}(1 - \gamma)f'(k(t))}{\delta + \lambda - s(1 - v_{\max})(1 - \gamma)f'(k(t))} \text{ если } q'(t) < 0,$$

$$q(t) = \frac{sv_{\max}(1 - \gamma)f'(k(t))}{\delta + \lambda - s(1 - v_{\max})(1 - \gamma)f'(k(t))} \text{ если } q'(t) = 0. \quad (28)$$

Функция $\varphi_2(k(t)) = \frac{sv_{\max}(1 - \gamma)f'(k(t))}{\delta + \lambda - s(1 - v_{\max})(1 - \gamma)f'(k(t))}$

является неотрицательной функцией при выполнении условия

$$f'(k(t)) < \frac{\delta + \lambda}{s(1 - v_{\max})(1 - \gamma)}$$

и монотонно убывающей. График её проходит через точку $(k^*, 1)$.

Таким образом, для $q(t) < 1$ получаем следующие соотношения:

$$q'(t) > 0, \text{ если } q(t) > \varphi_2(k(t));$$

$$q'(t) < 0, \text{ если } q(t) < \varphi_2(k(t));$$

$$q'(t) = 0, \text{ если } q(t) = \varphi_2(k(t));$$

$$\text{если } k'(t) > 0, \text{ то } f(k(t)) > \frac{\lambda}{s(1 - v_{\max})(1 - \gamma)}k(t),$$

$$\text{если } k'(t) < 0, \text{ то } f(k(t)) < \frac{\lambda}{s(1 - v_{\max})(1 - \gamma)}k(t),$$

$$\text{если } k'(t) = 0, \text{ то } f(k(t)) = \frac{\lambda}{s(1 - v_{\max})(1 - \gamma)}k(t),$$

Уравнение $f(k(t)) = \frac{\lambda}{s(1 - v_{\max})(1 - \gamma)}k(t)$ имеет единственный положительный корень k_2 .

Итак, для $q(t) < 1$ получено следующее:

$$k'(t) > 0, \text{ если } k < k_2;$$

$$k'(t) < 0, \text{ если } k > k_2;$$

$$k'(t) = 0, \text{ если } k = k_2. \quad (29)$$

Величина $k^* > k_2$, так как

$$f(k^*) < \frac{\lambda}{s(1 - v_{\max})(1 - \gamma)}k^*.$$

Таким образом $k_2 < k^* < k_1$.

Можно изобразить положения областей знакопостоянства производных $q'(t)$ и $k'(t)$ на плоскости $\{k \geq 0, q \geq 0\}$.

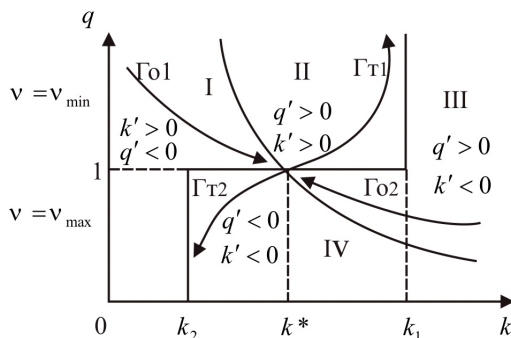


Рис. 1

Кривая, отделяющая области I и II, задаётся уравнением

$$q(t) = \frac{sv_{\min}(1-\gamma)f'(k(t))}{\delta + \lambda - s(1-v_{\min})(1-\gamma)f'(k(t))},$$

а кривая, отделяющая области III и IV, задаётся уравнением

$$q(t) = \frac{sv_{\max}(1-\gamma)f'(k(t))}{\delta + \lambda - s(1-v_{\max})(1-\gamma)f'(k(t))}.$$

Теперь нетрудно изобразить фазовые траектории решений рассматриваемой системы (19) в зависимости от начальных условий $k(0) = k_0$ и $q(0) = q_0$.

Из общих теорем о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений вытекает, что через заданную точку (k_0, q_0) проходит единственная кривая $(k(t), q(t))$, являющаяся решением системы.

Имеются всего две траектории, «входящие» в точку $(k^*, 1)$, обозначенные Γ_O , и две траектории, «выходящие» из неё, обозначенные Γ_T , условно изображенные на рис. 1.

Точка $(k^*, 1)$ является особой, или узловой, точкой, поскольку она является общим корнем уравнений $k' = 0$, $q' = 0$. Это точка равновесия, соответствующая сбалансированному росту экономики. В точке $(k^*, 1)$ налоговая ставка принимает оптимальное значение v^* , которое определяется из следующей системы уравнений:

$$s(1-v(t))(1-\gamma)f(k(t)) - \lambda k(t) = 0,$$

$$(\lambda + \delta)q(t) - (sv(t)(1-\gamma) + q(t)s(1-v(t))(1-\gamma))f'(k(t)) = 0. \quad (30)$$

Второе уравнение системы (30) при $q(t) = 1$ преобразуется в (24) и имеет решение $k(t) = k^*$. Подставив результат в первое уравнение системы (30) и разрешив его относительно $v(t)$, окончательно будем иметь

$$v^* = 1 - \frac{\lambda k^*}{s(1-\gamma)f(k^*)}, \quad v_{\min} < v^* < v_{\max}. \quad (31)$$

Состояние, когда экономика находится в точке $(k^*, 1)$, является режимом стационарного состояния.

4. Анализ движения по фазовым траекториям

Вычислим время движения из начальной точки (k_0, q_0) в точку $(k^*, 1)$ и время движения из точки $(k^*, 1)$ в конечную точку (k_T, q_T) .

Согласно предыдущим рассуждениям, время движения из начальной точки (k_0, q_0) в точку $(k^*, 1)$ – это время движения по траектории, «входящей» в точку $(k^*, 1)$, то есть по траектории Γ_{01} или Γ_{02} .

Если начальное условие задано так, что фазовой траекторией является траектория типа Γ_{01} , то налоговая ставка $v(t) = v_{\min}$, и уравнение для фазовооружённости представится в виде

$$k'(t) = s(1 - v_{\min})(1 - \gamma)f(k(t)) - \lambda k(t).$$

Время движения по траектории Γ_{01} вычисляется по формуле

$$T_{\Gamma_{01}} = \int_{k_0}^{k^*} \frac{dk}{s(1 - v_{\min})(1 - \gamma)f(k) - \lambda k}. \quad (32)$$

Если начальное условие задано так, что фазовой траекторией является траектория типа Γ_{02} , то налоговая ставка $v(t) = v_{\max}$ и время движения по траектории Γ_{02}

$$T_{\Gamma_{02}} = \int_{k_0}^{k^*} \frac{dk}{s(1 - v_{\max})(1 - \gamma)f(k) - \lambda k}. \quad (33)$$

Время движения из точки $(k^*, 1)$ в конечную точку (k_T, q_T) – это время движения по траектории, «выходящей» из точки $(k^*, 1)$, то есть по траектории Γ_{11} или Γ_{12} .

Когда рассматривается траектория Γ_{11} , $v(t) = v_{\min}$. Время движения по траектории Γ_{11}

$$T_{\Gamma_{11}} = \int_{k^*}^{k_T} \frac{dk}{s(1 - v_{\min})(1 - \gamma)f(k) - \lambda k}. \quad (34)$$

Когда рассматривается траектория Γ_{12} , $v(t) = v_{\max}$. Время движения по траектории Γ_{12} вычисляется по формуле

$$T_{\Gamma_{12}} = \int_{k^*}^{k_T} \frac{dk}{s(1 - v_{\max})(1 - \gamma)f(k) - \lambda k}. \quad (35)$$

Таким образом, весь промежуток времени управления экономикой $[0, T]$ разбивается на три интервала.

Интервал $[0, T^*]$ – время движения по траектории типа Γ_{01} или Γ_{02} , в зависимости от того, в какой области, I или III, заданы начальные условия.

Интервал $[T^*, T^{**}]$ – время пребывания экономической системы в точке $(k^*, 1)$ при $v(t) = v^*$, где v^* определяется по формуле (31). Интервал $[T^{**}, T]$ – время движения по траектории типа Γ_{11} или Γ_{12} , в зависимости от того, в какой области, II или IV, заданы конечные условия.

Значение T^* вычисляется по формулам (32) или (33). Значение T^{**} вычисляется по формуле

$$T^{**} = T - T_{\Gamma_1}, \quad (36)$$

где T_{Γ_1} вычисляется либо по (34), либо по (35).

5. Синтез оптимального управления

Целью управления налоговой ставкой является перевод траектории $k(t)$ из начального положения k_0 в конечное k_T за время T . Обобщая предыдущие результаты, сущность алгоритма управления можно сформулировать следующим образом: начальное положение k_0 за время T^* переводится в положение k^* , где k^* определяется как единственное решение уравнения

$$f'(k(t)) = \frac{\delta + \lambda}{s(1 - \gamma)}.$$

При этом на всём промежутке времени $[0, T^*]$ налоговая ставка $v(t) = v_{\max}$, если $k_0 > k^*$, и $v(t) = v_{\min}$, если $k_0 < k^*$. В момент времени T^* налоговая ставка полагается равной v^* , значение которой определяется по формуле (31). На протяжении всего промежутка времени $[T^*, T^{**}]$ $v(t) = v^*$ и $k(t) = k^*$. В момент времени T^{**} и на протяжении всего промежутка времени $[T^{**}, T]$ $v(t) = v_{\max}$, если $k_T < k^*$ и $v(t) = v_{\min}$, если $k_T > k^*$. За время $T - T^{**}$ значение фондовооружённости от оптимального значения k^* переходит в конечное k_T .

Итак, алгоритм оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале $[0, T]$ осуществляется в четыре этапа:

- 1) весь интервал времени $[0, T]$ разбивается на три интервала:

$$[0, T] = [0, T^*] + [T^*, T^{**}] + [T^{**}, T];$$

- 2) оптимальное управление налоговой ставкой $v(t)$ является кусочно-постоянной функцией с тремя возможными значениями $\{v_{\min}, v_{\max}, v^*\}$, где v^* определяется формулой (31), причём $v_{\min} < v^* < v_{\max}$, а k^* является единственным решением дифференциального уравнения

$$f'(k(t)) = \frac{\delta + \lambda}{s(1 - \gamma)};$$

- 3) на интервале времени $[T^*, T^{**}]$ $v(t) = v^*$ и фондовооружённость сохраняет постоянное значение k^* .

На интервале времени $[0, T^*]$ могут быть две ситуации:

- а) $v(t) = v_{\min}$; если $k_0 < k^*$, то фондовооружённость $k(t)$ возрастает от k_0 до k^* ;
- б) $v(t) = v_{\max}$; если $k_0 > k^*$, то фондовооружённость $k(t)$ убывает от k_0 до k^* .

На интервале времени $[T^{**}, T]$ также могут возникнуть две ситуации:

- а) $v(t) = v_{\min}$; если $k_T > k^*$, то фондовооружённость $k(t)$ возрастает от k^* до k_T ;
- б) $v(t) = v_{\max}$; если $k_T < k^*$, то фондовооружённость $k(t)$ убывает от k^* до k_T ;

- 4) значения T^* и T^{**} определяются приведёнными выше формулами в зависимости от начального и конечного состояния экономики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терехов А.Л. Производственные функции. М.: Наука, 1974.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 1 октября 2007 г.