УДК 681.513.3

В.В. Домбровский, Д.В. Домбровский, Е.А. Ляшенко

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ОБЪЕМЫ ВЛОЖЕНИЙ В ФИНАНСОВЫЕ АКТИВЫ

В работе представлена модель управления инвестиционным портфелем (ИП), учитывающая ограничения на объемы торговых операций. Цены рисковых финансовых активов подчиняются стохастическим разностным уравнениям со случайной волатильностью. Целью управления ИП является отслеживание гипотетического эталонного портфеля с заданной траекторией роста. Получены уравнения, определяющие оптимальные стратегии прогнозирующего управления ИП с обратной связью при ограничениях.

Ключевые слова: *инвестиционный портфель, прогнозирующие стратегии управления, оптимизация при ограничениях.*

Проблема выбора оптимальной структуры портфеля ценных бумаг (инвестиционного портфеля – ИП) – одна из основных в финансовом менеджменте. Существуют различные подходы к управлению ИП, которые отличаются способами описания эволюции цен финансовых активов, представления динамики ИП, целями управления (выбором функции риска) [1 – 6].

В работе рассматривается задача управления инвестиционным портфелем, состоящим из рисковых вложений (обыкновенных акций) и безрискового вклада (банковского счета), допускается также возможность займа по безрисковой ставке и участие в операциях продажи без покрытия. Предполагается, что цены рисковых финансовых активов описываются дискретными аналогами уравнений диффузионного типа со стохастической волатильностью. Целью управления является отслеживание желаемой траектории роста капитала, которая задается инвестором [5 – 6].

Для оптимизации инвестиционного портфеля предлагается использовать методологию управления с прогнозирующей моделью [6]. Привлекательной чертой такого подхода является возможность достаточно просто в явном виде учитывать ограничения на переменные состояния и управления. При этом получается стратегия управления с обратной связью, но удается избежать так называемого «проклятия размерности», которое препятствует синтезу управлений с обратной связью при ограничениях, если применять традиционные подходы с использованием метода динамического программирования. В случае оптимизации инвестиционного портфеля метод позволяет учесть ограничения на объемы торговых операций, например на размеры займов и операций продаж без покрытия.

1. Модель инвестиционного портфеля

Рассмотрим ИП, состоящий из n видов рисковых финансовых активов (обыкновенных акций) и одного безрискового финансового актива (банковского счета или надежных облигаций). Капитал, помещенный в рисковый актив i-го вида в момент времени k, равен $u_i(k)$, $i=\overline{1,n}$, в безрисковый – $u_0(k)\geq 0$, объем безрискового займа равен $u_{n+1}(k) \geq 0$. Тогда общий объем вложений (капитал портфеля) в момент k будет равен

$$V(k) = \sum_{i=1}^{n} u_i(k) + u_0(k) - u_{n+1}(k). \qquad (1)$$

Отметим, что если $u_i(k) < 0$, $i = \overline{1, n}$, то это означает участие в операции «продажа без покрытия» [1] на сумму $|u_i(k)|$. В момент времени $k + 1$ капитал портфеля станет равен (рассматривается самофинансируемый портфель)

$$V(k+1) = \sum_{i=1}^{n} [1 + \eta_i(k+1)] u_i(k) + [1 + r_1] u_0(k) - [1 + r_2] u_{n+1}(k), \qquad (2)$$

где $\eta_i(k + 1)$ – ставка доходности рисковых вложений на интервале $[k; k+1]$ (случайная величина), r_1 – неслучайная доходность безрисковых вложений, r_2 – неслучайная ставка по займу безрискового актива ($r_1 < r_2$).

Используя (1), уравнение (2) преобразуем к виду

$$V(k+1) = [1 + r_1] V(k) + \sum_{i=1}^{n} [\eta_i(k) - r_1] u_i(k) - [r_2 - r_1] u_{n+1}(k),$$

при этом
$$u_0(k) = V(k) - \sum_{i=1}^{n} u_i(k) + u_{n+1}(k).$$

При управлении портфелем учитываются следующие ограничения:

$$u_i^{\min}(k) \leq u_i(k) \leq u_i^{\max}(k), \; i = \overline{1, n}; \qquad (3)$$

$$0 \leq u_{n+1}(k) \leq u_{n+1}^{\max}(k); \qquad (4)$$

$$0 \leq V(k) - \sum_{i=1}^{n} u_i(k) + u_{n+1}(k) \leq u_0^{\max}(k). \qquad (5)$$

Если нижняя граница $u_i^{\min}(k) < 0$, $i = \overline{1, n}$, то для рискового актива i-го вида допустимо участие в операции «продажа без покрытия» на сумму не более $\left|u_i^{\min}(k)\right|$; если $u_i^{\min}(k) \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, то операции «продажа без покрытия» для рискового актива i-го вида запрещены; $u_i^{\max}(k)$, $i = \overline{1, n}$, определяют максимальный объем капитала, который можно вкладывать в рисковый актив i-го вида; $u_0^{\max}(k) \geq 0$ определяет максимальный объем капитала, который можно вкладывать в безрисковый актив, $u_{n+1}^{\max}(k) \geq 0$ определяет максимальный размер займа безрискового актива. Отметим, что величины $u_i^{\min}(k)$, $i = \overline{1, n}$, и $u_j^{\max}(k)$, $i = \overline{1, n+1}$, на практике часто зависят от величины общего капитала ИП, что можно учесть, положив $u_i^{\min}(k) = \gamma_i' V(k)$, $u_j^{\max}(k) = \gamma_j'' V(k)$, где γ_i' и γ_j'' – постоянные коэффициенты.

Для описания эволюции цен рисковых финансовых активов используем модель вида

$$S_i(k+1) = S_i(k) \left[1 + \mu_i(k) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} [\theta(k), k] w_j(k) \right],$$

где $S_i(k)$ – цена i-й ценной бумаги в момент времени k ($i = \overline{1, n}$), $\mu_i(k)$ – ожидаемая доходность i-й ценной бумаги, $w(k)$ – вектор белых шумов размерности n с нулевым средним и единичной матрицей ковариации, $\sigma_{ij}[\theta(k),k]$ – элементы матрицы волатильности $\|\sigma_{ij}[\theta(k),k]\|$, зависящие от $\theta(k)$ линейно, $\theta(k)$ – последовательность независимых q-мерных случайных векторов с известными первым и вторым моментами: $\mathrm{M}\,\{\theta(\mathrm{k})\} = \bar{\theta}(k)$, $\mathrm{M}\{\theta(k)\,\theta^{\mathrm{T}}(k)\} = \Theta\ \theta\ \mathrm{M}\{\theta^{\mathrm{T}}(k)w^{\mathrm{T}}(k)\ \} = 0$.

Необходимо определить стратегию управления инвестиционным портфелем путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций так, чтобы капитал реального портфеля $V(k)$ с наименьшими отклонениями следовал капиталу $V^0(k)$ некоторого определяемого инвестором эталонного портфеля, эволюция которого описывается уравнением

$$V^0(k+1) = [1 + \mu^0(k)]V^0(k),$$

где $\mu^0(k)$ – заданная желаемая доходность портфеля. В начальный момент $V^0(0) = V(0)$ заданы.

2. Синтез прогнозирующих стратегий управления ИП

Для управления портфелем синтезируем стратегии с прогнозирующей моделью. Критерий качества управления со скользящим горизонтом (функция риска) имеет вид

$$J(k+p/k) = M\left\{\sum_{i=1}^{p-1}\left[V(k+i/k)-V^0(k+i)\right]^2 + \sum_{i=0}^{p-1} u^T(k+i/k)R(k+i)u(k+i/k) + \right.$$

$$\left. +\left[V(k+p/k)-V^0(k+p)\right]^2 \Big/ V(k)\right\}, \tag{6}$$

где $u(k+i/k) = [u_1(k+i/k),\ldots,u_n(k+i/k)]$, $i=\overline{0,\,p-1}$, – векторы прогнозирующих управлений, $V(k+i/k)$ – предсказанное состояние портфеля в момент времени $k+i$, $R(i) > 0$ – матрица весовых коэффициентов управления.

Прогнозирующие управления определяются по следующему правилу: на каждом шаге k минимизируем функционал (6) по последовательности программных управлений $u(k/k),\ldots,u(k+p-1/k)$, зависящих от состояния системы в момент k. В качестве управления в момент k берем $u(k) = u(k/k)$. Тем самым получаем управление $u(k)$ как функцию состояния $V(k)$, т. е. управление с обратной связью. Чтобы получить управления $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для текущего момента $k+1$.

Теорема. Оптимальное управление на шаге k, минимизирующее критерий (6) при фиксированном горизонте прогнозирования p с учетом ограничений на управления (3) – (5), определяется уравнением

$$u(k) = [I_n\ 0_n\ 0_n]U(k/k),$$

где I_n – единичная матрица размерности n; 0_n – квадратная нулевая матрица размерности n; $U(k/k) = [u^{\mathrm{T}}(k/k), u^{\mathrm{T}}(k+1/k), \ldots, u^{\mathrm{T}}(k+p-1/k)]^{\mathrm{T}}$ – вектор прогнозирующих управлений, который определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием

$$Y(k+p/k) = 2z^{\mathrm{T}}(k)G(k)U(k) + U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k)$$

при ограничениях $$u^{\min}(k) \le \bar{S}(k)U(k) \le u^{\max}(k),$$

где $$z(k) = \left[V(k),\ V^0(k)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$u^{\min}(k)=\left[u_1^{\min}(k),\quad \ldots,\quad u_n^{\min}(k),\quad 0,\quad -V(k)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$u^{\max}(k)=\left[u_1^{\max}(k),\quad \ldots,\quad u_{n+1}^{\max}(k),\quad u_0^{\max}(k)-V(k)\right]^{\mathrm{T}},$$

G(k), H(k), $\overline{S}(k)$ – блочные матрицы:

$$G(k)=\left[G_1(k)\quad \ldots \quad G_p(k)\right];\ H(k)=\begin{bmatrix} H_{11}(k) & \ldots & H_{1p}(k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ H_{p1}(k) & \ldots & H_{pp}(k) \end{bmatrix};$$

$$\overline{S}(k)=\left[S(k)\quad 0_{(n+2)\times(n+1)(p-1)}\right],$$

блоки которых определяются следующими соотношениями:

$$G_s(k)=\left\{\prod\nolimits_{j=0}^{s-2} A^{\mathrm{T}}(k+j)\right\} L_{12}(p-s);$$

$$H_{is}(k)=\begin{cases} B_0^{\mathrm{T}}(k+i-1)\left\{\prod\limits_{j=i}^{s-2} A^{\mathrm{T}}(k+j)\right\} L_{12}(p-s), & i<s, \\ L_{22}(p-i)+R(k+i-1), & i=s, \\ H_{si}^{\mathrm{T}}, & i>s; \end{cases}$$

$$S(k)=\begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & \ldots & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$0_{(n+2)\times(n+1)(p-1)}$ – нулевая матрица размерности $(n+2)\times(n+1)(p-1)$;

$$\prod\nolimits_{j=i}^{i-1} A^{\mathrm{T}}(k+j)=1;\ Q(s+1)=L_{11}(s)+C^{\mathrm{T}}\cdot C;\ Q(0)=C^{\mathrm{T}}\cdot C;$$

$$L_{11}(s)=A^{\mathrm{T}}(k+p-1-s)Q(s)A(k+p-1-s);$$
$$L_{12}(s)=A^{\mathrm{T}}(k+p-1-s)Q(s)B_0(k+p-1-s);$$

$$L_{22}(s)=B_0^{\mathrm{T}}(k+p-1-s)Q(s)B_0(k+p-1-s)+$$
$$+M\left\{\sum\nolimits_{j=1}^{n} B_j^{\mathrm{T}}\left[\theta(k+p-1-s),k+p-1-s\right]\times\right.$$
$$\left.\times Q(s)B_j\left[\theta(k+p-1-s),k+p-1-s\right]\right\},$$

где
$$A(k)=\mathrm{diag}\left(1+r_1(k),\quad 1+\mu^0(k)\right);$$

$$B_0(k)=\begin{bmatrix} \mu_1(k)-r_1(k) & \ldots & \mu_n(k)-r_1(k) & -[r_2(k)-r_1(k)] \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_j[\theta(k),k]=\begin{bmatrix} \sigma_{1j}[\theta(k),k] & \ldots & \sigma_{nj}[\theta(k),k] & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix};\ C=[1\quad -1].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Merton R.C.* Continuous-time finance. Cambr.: Ma. Blackwell, 1990.
2. *Bielecki T.R., Pliska S.R.* Risk-sensitive dynamic asset management // Appl. Math. and Opt. 1999. No. 39. P. 337 – 360.
3. *Young M.R.* A Minimax portfolio selection rule with linear programming solution // Management Science. 1998. V. 44. No. 5. P. 673 – 683.
4. *Browne S.* Risk-constrained dynamic active portfolio management // Management Science. 2000. V. 46. No. 9. P. 1188 – 1199.
5. *Домбровский В.В., Ляшенко Е.А.* Линейно-квадратичное управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами с применением к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2003. № 10. С. 50 – 65.
6. *Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А.* Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 84 – 97.

Статья представлена кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике экономического факультета и кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 8 июня 2007 г.