УДК 681.5

Е.А. Перепелкин

ЗАДАЧА ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА МНОГОСВЯЗНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КАК ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачу параметрического синтеза многосвязной динамической системы по критерию минимума нормы системы предлагается решать как задачу нелинейного программирования. Приводятся результаты расчетов и численного моделирования для системы активного управления подвеской транспортного средства.

Ключевые слова: *параметрический синтез, норма системы, активное управление.*

В современной теории автоматического управление значительное внимание уделяется задачам синтеза динамических регуляторов по критериям H_2, H_∞ [1]. Система с регулятором рассматривается как линейный оператор, действующий из линейного векторного пространства входных сигналов в линейное векторное пространство выходных сигналов $S:U\to Y$. Соответственно вводят нормы сигналов и нормы систем. Наиболее изучены нормы H_2, H_∞. Например, если известна матричная передаточная функция системы $G(s)$, то нормы H_2, H_∞ равны:

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{tr}\, G^T(-j\omega) G(j\omega) d\omega \right)^{1/2},$$

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega \sigma(G(j\omega)),$$

где $\mathrm{tr}(\cdot)$ след матрицы, $\sigma(\cdot)$ – максимальное сингулярное число матрицы. Динамические регуляторы, обеспечивающие минимум данных норм, рассчитываются на основе решения двух уравнений Риккати [1]. При этом размер регулятора равен размеру объекта управления.

В данной работе предлагается подход к решению задач параметрического синтеза многосвязных динамических систем, близкий к методу оптимизации по критерию H_2. Задача параметрической оптимизации формулируется как задача нелинейного программирования. При этом можно учитывать ограничения на параметры объекта управления и регулятора, осуществлять синтез статической и динамической обратной связи по вектору измерений, выполнять одновременно параметрический синтез объекта управления и регулятора.

1. Норма системы

Рассмотрим линейную стационарную систему, поведение которой в пространстве состояний описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx, \tag{1}$$

где x – вектор состояния, y – вектор выхода. Будем считать, что система (1) является асимптотически устойчивой и полностью наблюдаемой [2].

Систему (1) можно рассматривать как линейный оператор, действующий из линейного векторного пространства X начальных состояний в линейное векторное пространство Y функций выхода $S : X \to Y$. Введем нормы в пространствах X и Y. В пространстве начальных состояний – евклидову норму

$$\|x(0)\| = \sqrt{x^{\mathrm{T}}(0)x(0)} .$$

В пространстве функций выхода – норму пространства $L_2(R_+)$

$$\|y\| = \sqrt{\int_0^\infty y^{\mathrm{T}}(t)y(t)dt} .$$

Соответственно норма системы как норма линейного оператора определяется соотношением

$$\|S\| = \sup_{x(0)\neq 0} \frac{\|y\|}{\|x(0)\|} .$$

Утверждение. Норма системы (1)

$$\|S\| = \sqrt{\lambda_{\max}(L)} ,$$

где L – единственное симметричное положительно определенное решение уравнения Ляпунова

$$LA + A^{\mathrm{T}}L = -C^{\mathrm{T}}C ,$$

$\lambda_{\max}(L)$ – максимальное собственное число L.

Доказательство данного утверждения является достаточно простым и близко к выводу хорошо известной формулы для нормы $\|G\|_2$. Из асимптотической устойчивости и наблюдаемости системы (1) следует, что уравнение (2) имеет единственное симметричное положительно определенное решение [2]. В силу асимптотической устойчивости справедливо равенство

$$\|S\|^2 = \int_0^\infty y^{\mathrm{T}}(t)y(t)dt = x^{\mathrm{T}}(0)Lx(0) .$$

Для любого начального состояния выполняется неравенство

$$x^{\mathrm{T}}(0)Lx(0) \le \lambda_{\max}(L)\|x(0)\|^2 .$$

Пусть $x(0)$ есть собственный вектор L, отвечающий собственному числу $\lambda_{\max}(L)$. Тогда

$$x^{\mathrm{T}}(0)Lx(0) = \lambda_{\max}(L)\|x(0)\|^2 .$$

Следовательно, $\|S\|^2 = \lambda_{\max}(L)$.

2. Задача параметрического синтеза

Предположим, что поведение проектируемой динамической системы описывается уравнением

$$\dot{x} = A(p)x , \tag{2}$$

где x – вектор состояния, p – вектор параметров, значения которых надлежит выбрать. Если уравнение (2) описывает замкнутый статической или динамической обратной связью объект управления, то вектор p может состоять из параметров объекта управления и регулятора. Система должна быть асимптотически устойчивой и обладать приемлемой реакцией на изменения начального состояния.

Будем считать, что задана область допустимых значений параметров П, например в виде неравенств

$$p_{\min} \le p \le p_{\max}\,.$$

Уравнение (2) дополним уравнением выхода

$$y = C(p)x \tag{3}$$

так, чтобы система (2), (3) была полностью наблюдаемой. Значение p предлагается определять из условия минимума нормы системы (2), (3). Таким образом, задача параметрического синтеза формулируется как задача оптимизации. Найти

$$\min_{p\in\Pi} \lambda_{\max}(L)$$

при условии

$$LA(p) + A^{\mathrm{T}}(p)L = -C^{\mathrm{T}}(p)C(p), \quad L > 0\,.$$

Заметим, что положительная определенность L гарантирует асимптотическую устойчивость системы (2), единственность и симметричность решения уравнения Ляпунова. Условие положительной определенности L можно записать в виде системы неравенств (критерий Сильвестра):

$$\Delta_1(L) > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n(L) > 0\,,$$

где $\Delta_i(L)$ – главные диагональные миноры L, n – размер вектора x.

Введем новую переменную γ и дополнительное ограничение $\gamma E - L > 0$, где E – единичная матрица. Тогда задача минимизации нормы системы может быть сформулирована как стандартная задача нелинейного программирования. Найти

$$\min_{p\in\Pi} \gamma$$

при условии

$$LA(p) + A^{\mathrm{T}}(p)L = -C^{\mathrm{T}}(p)C(p)\,,\ \Delta_1(L) > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n(L) > 0\,,$$

$$\Delta_1(\gamma E - L) > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n(\gamma E - L) > 0\,.$$

Для решения данной задачи можно применить системы научных и инженерных расчетов, такие, как Matlab, Mathcad. Например, в системе Matlab задачи оптимизации решаются с помощью функций библиотеки Optimization Toolbox. С помощью этих функций можно не только найти минимум целевой функции, но и проверить совместимость ограничений, т.е. фактически проверить существование решения задачи синтеза.

3. Синтез системы активного управления подвеской транспортного средства

Рассмотрим задачу проектирования системы активного управления подвеской транспортного средства как задачу параметрического синтеза линейной многосвязной системы. Объектом управления является механическая система, состоящая из двух масс (колеса и корпуса транспортного средства), соединенных пружиной и демпфером (рис. 1). Динамика системы в отклонениях от положения равновесия описывается уравнениями

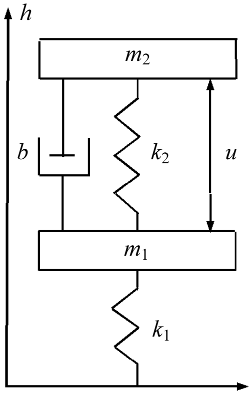

Рис. 1

$$\dot{h}_1 = v_1, \quad m_1\dot{v}_1 = -k_1h_1 + k_2(h_2 - h_1) + b(v_2 - v_1) - u,$$

$$\dot{h}_2 = v_2, \quad m_2\dot{v}_2 = -k_2(h_2 - h_1) - b(v_2 - v_1) + u,$$

где h_1 – вертикальное перемещение колеса (м);
v_1 – скорость перемещения колеса (м/с);
h_2 – вертикальное перемещение корпуса (м);
v_2 – скорость перемещения корпуса (м/с);
u – управляющая сила (Н);
m_1 – масса колеса (кг);
m_2 – масса корпуса в расчете на одно колесо (кг);
k_1, k_2 – коэффициенты жесткости колеса и рессоры (Н/м);
b – коэффициент демпфирования амортизатора (Н·с/м).

В положении равновесия значения переменных состояния и управления равны нулю. Необходимо построить управление в виде обратной связи, которое обеспечивает приемлемую реакцию системы на изменения начального состояния.

Предположим, что измеряется только скорость перемещения корпуса. Управление будем строить в виде стационарной обратной связи $u = pv_2$, где p – коэффициент обратной связи. Матрица замкнутой системы

$$A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & -\dfrac{b}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{b-p}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{b}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{p-b}{m_2} \end{bmatrix}.$$

В качестве переменных выхода возьмем перемещения колеса и корпуса. Следовательно,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Расчеты проводились при следующих значениях параметров объекта управления: $m_1 = 345$; $m_2 = 2300$; $k_1 = 510\,000$; $k_2 = 78\,000$; $b = 320$. На рис. 2 показана зависимость нормы системы от коэффициента обратной связи в области $\Pi = [-50\,000 \quad -10\,000]$. Минимум нормы достигается при $p_{\text{opt}} = -25\,640$.

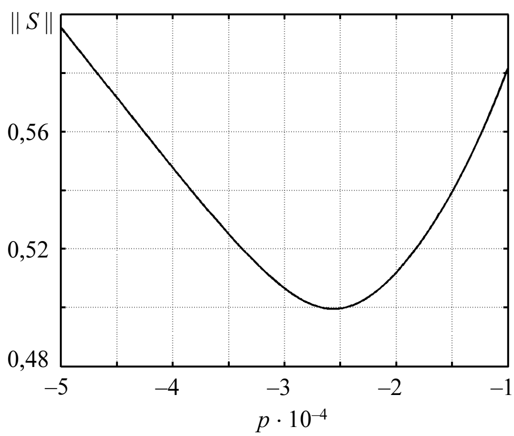

Рис. 2

Рассмотрим реакцию системы на изменение скорости перемещения колеса $v_1(0) = 2$ м/с. На рис. 3 для сравнения приведены графики переходных процессов перемещения корпуса транспортного средства при оптимальной обратной связи $p = p_{\text{opt}}$ (кривая *1*) и при отсутствии обратной связи $p = 0$ (кривая *2*). Результаты моделирования подтверждают улучшение переходных процессов при оптимальном значении p по сравнению с системой без активного управления.

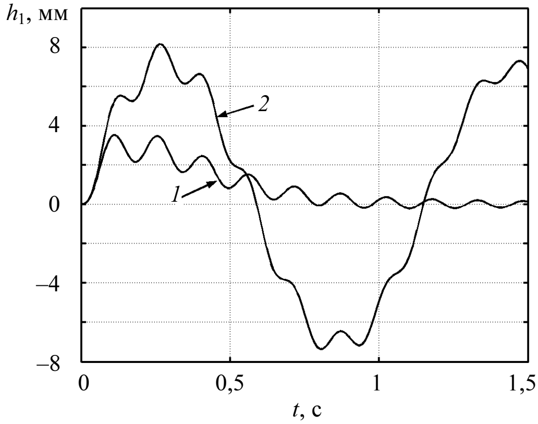

Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. *Методы* робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / Под ред. Н.Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ, 2001.
2. *Параев Ю.И., Перепелкин Е.А.* Линейные матричные уравнения в задачах анализа и синтеза многосвязных динамических систем. Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2000.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 1 октября 2007 г.