

МАТЕМАТИКА

УДК 517.982.22

С.П. Гулько, М.С. Кобылина

ПСЕВДОДЕРЕВЬЯ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМЫ
НА ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрен класс топологических пространств, порожденных псевдодеревьями. Для произвольного псевдодерева построено естественное локально компактное расширение с сохранением структуры псевдодерева. Доказано, что банахово пространство $C_0(T)$ всех непрерывных вещественных функций на локально компактном псевдодереве T допускает локально равномерно выпуклую (LUR) перенормировку при условии, что ее допускает пространство $C_0(P)$ для любого подмножества P в T , являющегося деревом, и начальные сегменты в T являются сепарабельными.

В середине 30-х годов прошлого века Д. Курепа [5] определил понятия дерева и псевдодерева. Частично упорядоченное множество $(T, <)$ называется **деревом** (**псевдодеревом**), если для каждого элемента t из T множество $F_t = \{s \in T; s \leq t\}$ является вполне (линейно) упорядоченным множеством. Понятие дерева получило большое распространение и достаточно часто используется в различных областях математики. В частности, Р.Хейдон [4] нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы банахово пространство $C_0(T)$ всех непрерывных вещественных функций, стремящихся к нулю на бесконечности, имело строго выпуклую норму, локально равномерно выпуклую норму и т.п.

Введем на T топологию порядка. Базу этой топологии будут составлять интервалы $(u, v) = \{s \in T; u < s < v\}$. Выделим в T его подмножество A_T всех тех точек $t \in T$, окрестностями которых являются всевозможные полуинтервалы вида $(u, t]$. Множество A_T содержит в себе совокупность B_T всех **точек ветвления**, которые мы определим как такие точки в $t \in T$, для которых $(F_u \setminus F_t) \cap (F_v \setminus F_t) = \emptyset$ для некоторых элементов u и v , больших t . В самом деле, для таких элементов u и v рассмотрим интервалы (s, u) и (s, v) , где $s < t$. Эти множества открыты, следовательно, и их пересечение $(s, u) \cap (s, v) = (s, t]$ обязано быть открытым, что и требовалось. Пример стрелки Зоргенфрея, т.е. полуинтервала $(0, 1]$, в котором окрестностями точек являются всевозможные полуинтервалы вида $(u, t]$, показывает, что множество A_T состоит не только из точек ветвления, т.е. множества A_T и B_T могут быть различными.

Будем говорить, что псевдодерево **густо ветвится**, если множество $G_t = \{s \in T; s > t\}$ не является линейно упорядоченным для каждого элемента $t \in T$. **Индексом** $i(t)$ элемента $t \in T$ назовем супремум мощностей семейств попарно дизъюнктивных в T интервалов $(t, u)_{u \in L}$. Ясно, что точка t является точкой ветвления тогда и только тогда, когда $i(t) > 1$. Дерево называется конечно ветвящимся, если индекс каждой точки конечен.

Естественные расширения псевдодеревьев

В отличие от деревьев, псевдодеревья не обязаны быть локально компактными пространствами. Тем не менее, существует несложная процедура построения локально компактного расширения, которое также несет структуру псевдодерева. Это возможно осуществить в три этапа.

Этап 1. Добавление минимальных элементов

Вначале опишем естественное расширение псевдодерева, которое получается добавлением минимальных элементов. По определению псевдодерева для произвольного элемента $t \in T$ множество $F_t = \{s \in T; s \leq t\}$ является линейно упорядоченным множеством. Введем обозначение t^0 для минимального элемента в F_t , если он там имеется. Если такого элемента в F_t нет, то определим новый элемент t^0 , который будем считать строго меньшим всех элементов из F_t . Примем следующее соглашение: $t^0 = s^0$ тогда и только тогда, когда существует некоторый элемент $u \in T$, такой, что $u \leq t$ и $u \leq s$. Множество всех таким образом определенных минимальных элементов обозначим через T^0 . На множестве $T \cup T^0$ зададим естественное расширение имеющегося отношения порядка на множестве T правилом: $t^0 \leq t$. Относительно этого порядка множество $T \cup T^0$ также будет псевдодеревом, причем элементы множества T^0 будут попарно несравнимы между собой. Легко понять, что элементы множества $T^0 \setminus T$ не могут попасть в A_T . Далее мы будем предполагать, что $T^0 \subset T$, т.е. что расширение псевдодерева добавлением всех минимальных элементов уже произведено.

Этап 2. Окаймление «дыр»

Лемма 1. Если множества A_T содержит инверсию ординала $\beta+1$, т.е. трансфинитную последовательность, упорядоченную по правилу: $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_\beta$, причем β есть предельный ординал и α_β является точной нижней гранью последовательности α_γ , $1 \leq \gamma < \beta$, в T , то ветвь $\{t; t \leq \alpha_1\}$ не является компактной.

Доказательство. В самом деле, множество $\{t \in T; t \leq \alpha_1\}$ есть объединение своих открыто-замкнутых подмножеств вида $(\alpha_{\gamma+1}, \alpha_\gamma]$, а также еще множества $\{t; t \leq \alpha_\beta\}$. Из этого покрытия нельзя извлечь конечного подпокрытия. ■

Обозначим через A_T^- множество всех точек $t \in A_T$, удовлетворяющих условию $t = \inf \{s \in A_T; s > t\}$ (точная нижняя грань берется в T). Для каждой точки $t \in A_T^-$ определим новую абстрактную точку t^+ , для которой: $t < t^+$ и $t < s \Rightarrow t^+ \leq s$. Точку t^+ будем считать несравнимой с какой-либо точкой множества T , если с ней несравнима точка t . Обозначим $A_T^+ = \{t^+; t \in A_T^-\}$ и $T^+ = T \cup A_T^+$. Нетрудно видеть, что множество T^+ является псевдодеревом для любого псевдодерева T .

Пример 1. Пусть $T = (0, 1]$ является уже упомянутой выше стрелкой Зоргенфрея. Тогда множество T^0 будет состоять из единственного минимального элемента, который можно обозначить через 0. Обозначим $T_1 = \{0\} \cup T$. Тогда $A_{T_1}^- = (0, 1)$. Нетрудно проверить, что пространство T_1^+ совпадает с хорошо известным пространством «две стрелки».

Пример 2. Пусть T – множество всех неотрицательных рациональных чисел, включая 0, упорядоченное естественным образом. Нетрудно видеть, что $A_T = \emptyset$, следовательно, описанное выше расширение не приводит к компактным пространствам.

Этап 3. Сечения по Дедекинду

Последний пример показывает, что для псевдодеревьев имеет смысл рассмотреть некоторые расширения, построенные наподобие «сечений» по Дедекинду.

Определение. Сечением T мы назовем его разбиение на непересекающиеся множества M и L , такие, что

- 1) множество M линейно упорядочено, и вместе с каждым элементом $t \in M$ это множество содержит все элементы s , такие, что $s < t$;
- 2) множество M не имеет наибольшего элемента;
- 3) множество L обязательно содержит верхние грани для M , причем среди этих верхних граней нет минимальных.

Для произвольного сечения псевдодерева T определим новый элемент, который будет строго больше всех элементов из M и, вместе с тем, строго меньше любой верхней грани для M из множества L . Пополнение множества T всеми такими элементами обозначим через $\tilde{T}$. Упорядочим множество $\tilde{T}$ естественным образом. А именно, из определения ясно, какие отношения связывают новый элемент $s \in \tilde{T} \setminus T$ со всеми элементами множества T . Для элементов s_1 и s_2 из $\tilde{T} \setminus T$ мы будем говорить, что $s_1 < s_2$, если $\{t \in T; t < s_1\} \subset \{t \in T; t < s_2\}$.

Теорема 1. Пусть T – произвольное псевдодерево и T^1 – псевдодерево, полученное из него посредством добавления минимальных элементов, окаймления «дыр» и сечений по Дедекинду, т.е. $T^1 = T^{0+}$. Тогда T^1 является локально компактным пространством и, более того, множество $\{t \in T^1; t \leq s\}$ компактно для каждого $s \in T^1$.

Доказательство. Нам достаточно установить только последнее утверждение, т.е. что множества вида $\{t \in T^1; t \leq s\}$ компактны. Согласно этапу 1, это множество должно иметь наименьший элемент a , поэтому $\{t \in T^1; t \leq s\} = [a, s]$. Для того чтобы множество $\{t \in T^1; t \leq s\} = [a, s]$ было компактным, достаточно показать, что любая трансфинитная убывающая последовательность сегментов $\{[u_\alpha, v_\alpha]\}_{1 \leq \alpha < \beta}$ в $[a, s]$ имеет непустое пересечение. В самом деле, предположим, что множество $[a, s]$ не компактно. Выберем открытое покрытие $\mathbf{A}$, из которого нельзя извлечь конечное подпокрытие. Разделим сегмент $[a, s]$ на два подсегмента $[a, u]$ и $[u, s]$. Один из этих подсегментов не имеет конечного подпокрытия, выберем его. Будем последовательно делить возникающие сегменты $[u_\alpha, v_\alpha]$ пополам, пока это возможно. Для предельного ординала γ положим $[u_\gamma, v_\gamma] = \bigcap_{1 \leq \alpha < \gamma} [u_\alpha, v_\alpha]$. Пересечение $\bigcap_{1 \leq \alpha < \beta} [u_\alpha, v_\alpha]$

должно быть одноточечным и потому накрываться одним элементом U данного покрытия $\mathbf{A}$. Отсюда $[u_\alpha, v_\alpha] \subset U$ для некоторого α , $1 \leq \alpha < \beta$. Противоречие.

Имеем $u_\alpha \leq u_{\alpha+1} < v_{\alpha+1} \leq v_\alpha$ для каждого α . Если последовательность u_α стабилизируется, т.е. $u_\alpha = u_{\alpha+1} = \dots$, то эта точка стабилизации должна принадлежать рассматриваемому пересечению. Аналогичный вывод мы делаем при стабилизации правых концов. Если $u_\alpha < u_{\alpha+1}$ и $v_{\alpha+1} < v_\alpha$ для всех α , то для множеств $\bigcup_{1 \leq \alpha < \beta} [u_1, u_\alpha]$

и $\bigcup_{1 \leq \alpha < \beta} [v_\alpha, v_1]$ существует сечение по Дедекинду, т.е. точка $t \in T$, для которой

$$t \in \bigcap_{1 \leq \alpha < \beta} [u_\alpha, v_\alpha]. \blacksquare$$

Локально компактные псевдодеревья и теорема об эквивалентной LUR-норме

Для локально компактного пространства T символом $C_0(T)$ обозначим пространство всех непрерывных вещественных функций f на T , таких, что для каждого $\varepsilon > 0$ множество $\{x \in T; |f(x)| \geq \varepsilon\}$ является компактным. Это пространство является банаховым относительно обычной $\sup$ -нормы.

Напомним, что норма $\|\cdot\|$ на векторном пространстве называется **локально равномерно выпуклой** нормой, или кратко LUR-нормой, если из $\|x_n + x\| \rightarrow 2$ и $\|x_n\| \rightarrow 1$ следует, что $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Главным результатом этой статьи является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть T такое локально компактное псевдодерево, что для каждого $t \in T$ множество $F_t = \{s \in T; s \leq t\}$ является сепарабельным линейно упорядоченным компактом. Пусть, кроме того, для каждого подмножества P в T , являющегося деревом, пространство $C_0(P)$ допускает LUR-норму. Тогда пространство $C_0(T)$ также допускает эквивалентную LUR-норму.

Доказательство. Обозначим через G множество всех точек локальной линейной связности в T , т.е. таких точек, которые являются строго внутренними для некоторых невырожденных связных интервалов в T . Очевидно, что множество G является открытым в T . Представим G в виде объединения максимальных по включению линейно связных его частей (компонент). Каждая такая компонента будет открытым множеством в G . Тогда G распадается на открыто-замкнутые в G попарно непересекающиеся связные множества V_i , $i \in I$. Обозначим $F = T \setminus G$.

Построим линейный ограниченный оператор продолжения $S: C_0(F) \rightarrow C_0(T)$ следующим образом:

$$S(f)(x) = f(x), \text{ если } x \in F;$$

$$S(f)(x) = 0, \text{ если } x \in V_i \text{ и множество } V_i \text{ открыто-замкнуто в } T;$$

$$S(f)(x) = f(c), \text{ если интервал } V_i \text{ имеет только одну концевую точку } c \in F \text{ и } x \in V_i.$$

Наконец, пусть $x \in V_i$ и пусть обе концевые точки интервала V_i , скажем, a_i и b_i , принадлежат F . Тогда отрезок $[a_i, b_i]$ гомеоморфен обычному отрезку вещественной оси $[2]$, будем считать его таковым и положим

$$S(f)(x) = f(a_i) + \frac{x - a_i}{b_i - a_i} \cdot (f(b_i) - f(a_i)), \quad x \in [a_i, b_i],$$

т.е. «линейно» продолжим функцию f с концевых точек внутрь рассматриваемого отрезка. Легко видеть, что оператор $S: C_0(F) \rightarrow C_0(T)$ линейен и его норма равна 2.

Оператор $Uf = (f|_{T \setminus G}, f - S(f|_{T \setminus G}))$ является линейным гомеоморфизмом пространства $C_0(T)$ на декартово произведение $C_0(T \setminus G) \times C_0(G)$.

Обратный оператор задан формулой

$$U^{-1}(g, h) = S(g) + \tilde{h},$$

где

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & x \in G; \\ 0, & x \notin G. \end{cases}$$

Согласно свойству трех пространств для LUR-норм [3], нам достаточно построить LUR-нормы в пространствах $C_0(G)$ и $C_0(T \setminus G)$.

1) Построение эквивалентной LUR-нормы в пространстве $C_0(G)$.

Мы уже отмечали выше, что G является объединением открыто-замкнутых попарно непересекающихся линейно связных множеств V_i , $i \in I$. Следовательно, $C_0(G)$ равно c_0 -произведению семейства пространств $C_0(V_i)$, $i \in I$. По теореме Зизлера [7] нам достаточно доказать, что каждое пространство $C_0(V_i)$ имеет эквивалентную LUR-норму. Если пространство V_i сепарабельно, то данное утверждение верно согласно основному результату статьи [1]. Предположим, что оно не сепарабельно. Покажем, что в этом случае пространство V_i совпадает с так называемой длинной прямой, которая получается из пространства ω_1 всех счетных ординалов, в котором каждая «дыра» заклеена интервалом вещественной оси.

В самом деле, выберем точку x_1 во множестве V_i произвольным образом. Далее построение выполним по индукции. Если для счетного ординала α точка x_α уже выбрана, то отрезок $\{x \in V_i; x \leq x_\alpha\}$ является компактным и сепарабельным по условию теоремы, следовательно, так как V_i не сепарабельно, в нем найдется точка $x_{\alpha+1} > x_\alpha$. Для предельного ординала α положим x_α равным супремуму всех точек x_β при $\beta < \alpha$. По построению ясно, что отображение $\alpha \rightarrow x_\alpha$ является гомеоморфным вложением ординала ω_1 на замкнутое конфинальное подмножество во множестве V_i .

Строить LUR-норму на пространстве $C(V_i)$ (и, значит, на подпространстве $C_0(V_i)$) можно так же, как на лучах ординалов (см. [3], chapter VII). А именно, для каждого ординала α определим линейный ограниченный оператор продолжения $S_\alpha: C(\{t; t \leq x_\alpha\}) \rightarrow C(V_i)$ формулой

$$S_\alpha(f)(\beta) = \begin{cases} f(\beta), & \beta \leq \alpha; \\ f(\alpha), & \beta > \alpha. \end{cases}$$

Далее определим оператор

$$H(f) = (f|_{\{x; x \leq x_1\}}, \dots, S_{\alpha+1}(f|_{\{x; x \leq x_{\alpha+1}\}}) - S_\alpha(f|_{\{x; x \leq x_\alpha\}}), \dots)$$

на пространстве $C(V_i)$. Его сужение на $C_0(V_i)$ является линейным гомеоморфизмом пространства $C_0(V_i)$ и c_0 -произведения:

$$C_0(V_i) = (C_0\{x; x \leq x_1\} \times \dots \times C_0(x_\alpha, x_{\alpha+1}] \times \dots)_{c_0}, \alpha \in \omega_1.$$

Так как полуинтервалы $(x_\alpha, x_{\alpha+1}]$ не содержат «пробелов» и сепарабельны, то по лемме Бурке [2] они могут считаться полуинтервалами вещественной оси. Осталось теперь применить теорему Зизлера и теорему Кадеца о существовании эквивалентной LUR-нормы на сепарабельных банаховых пространствах, чтобы заключить, что пространство $C_0(V_i)$ имеет эквивалентную LUR-норму.

2) Обратимся теперь к построению эквивалентной LUR-нормы в пространстве $C_0(T \setminus G)$.

Удаляя множество G , мы удалили все точки линейной связности. Более того, множество $T \setminus G$ имеет следующее свойство:

в любом интервале (a, b) этого множества есть дыры, т.е. в нем найдутся такие точки x и x^+ , $a < x < x^+ < b$, что $(T \setminus G) \cap (x, x^+) = \emptyset$.

Начнем построение по трансфинитной индукции. Обозначим через M_0 совокупность всех минимальных элементов в $T \setminus G$. По определению нашей топологии это множество дискретно. Нам будет удобно ввести, возможно, несуществующий элемент 0, который строго меньше всех остальных элементов T , и все функции в этой точке будем считать равными 0. Для каждой ненулевой точки $t \in M_0$ зафиксируем максимальное по включению множество (*побег*) в $T \setminus G$. Пусть M_1 – объеди-

нение всех таких фиксированных побегов. Из определения топологии в псевдодеревьях ясно, что это множество является открытым в $T \setminus G$. Но нетрудно видеть, что оно будет также и замкнутым множеством в $T \setminus G$. Для каждой точки ветвления $t \in T \setminus G$ (отсюда и всюду далее мы рассматриваем только «настоящие» точки ветвления, т.е. такие точки, которые имеют более одного последователя) зафиксируем конечное множество t^+ следующим образом. Возьмем произвольный элемент $s > t$. Множество $[0, t]$ является компактным и открытым в $[0, s]$, следовательно, оно открыто-замкнуто в компактном множестве $[0, s]$. Поэтому множество $[0, s] \setminus [0, t]$ компактно, кроме того, оно является линейно упорядоченным и, следовательно, в нем существует минимальный элемент. Это фактически непосредственный последователь элемент t . Включим в t^+ все непосредственные последователи элемента t . Для каждого $s \in t^+$ зафиксируем побег P_s , для которого точка s является наименьшим элементом. Пусть теперь M_2 – объединение множества M_1 и всех зафиксированных побегов P_s для всех $s \in t^+$ и точек ветвления t в M_1 . Аналогично строятся M_3, M_4 и т.д. Аналогичным образом для любого M_α строится $M_{\alpha+1}$. Если α является предельным ординалом, то положим $M_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$.

Покажем, что $T \setminus G = \bigcup_{\alpha < \omega_1} M_\alpha$. В самом деле, пусть $s \in T \setminus G$. Тогда найдется точка $t \in M_0$, для которой $t < s$. Во множестве M_1 найдется $t_1 \in t^+$, сравнимое с s относительно порядка. Через эту точку t_1 по построению проходит некоторый побег. Пересечение отрезка $[t, s]$ с этим побегом не сводится к одной точке, а является некоторым начальным сегментом.

Точно так же, переходя к множеству M_2 , мы еще продвинемся вправо по отрезку $[0, s]$. Таким образом, внутри отрезка $[0, s]$ мы получим строго возрастающую трансфинитную последовательность. Поскольку этот отрезок сепарабелен, то за счетное число шагов этот процесс закончится и, значит, точка s попадет в некоторое множество M_α .

По определению топологии в псевдодеревьях для предельного ординала α множество $P_\alpha = M_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$ является замкнутым и дискретным. Обозначим

$P = \bigcup_{\alpha < \omega_1} P_\alpha$. Это множество является замкнутым в $T \setminus G$ (нетрудно понять, что до-

полнение к этому множеству является открытым). Для любого элемента $p \in P_\alpha$ множество $\{q \in P; q \leq p\}$ гомеоморфно начальному отрезку ординалов, а именно отрезку $[0, \alpha]$. Из условий теоремы пространство $C_0(P)$ имеет эквивалентную локально равномерно выпуклую норму. Теперь воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2. Пусть пространство $C_0(P)$ допускает эквивалентную LUR-норму и $\Phi: C_0(X) \rightarrow C_0(P)$ – ограниченный линейный оператор удовлетворяет условию: для каждого $f \in C_0(X)$ существует сепарабельное подмножество $Z_f \subset C_0(X)$, такое, что если $\Phi(f_n) \rightarrow \Phi(f)$, то

$$f \in \overline{sp \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_{f_n}}. \quad (*)$$

Тогда пространство $C_0(X)$ допускает эквивалентную LUR-норму. ■

Эта лемма есть следствие теорем 1.6 и 1.7 из [6]. Применим ее к пространству $X = T \setminus G$ и введенного выше подмножества P . Определим оператор Φ формулой $\Phi(f) = f|_P$. Покажем, что условия леммы 2 выполнены. Мы уже видели выше, что любые интервалы во множестве $T \setminus G$ имеют «дыры». Отсюда следует, что конечные линейные комбинации характеристических функций вида $\chi_{[0, t]}$, где t – такая точка, что множество $[0, t]$ является открыто-замкнутым в $T \setminus G$, образуют всюду плотное подпространство в $C_0(T \setminus G)$. Более того, для любой функции $f \in C_0(T \setminus G)$ ее носитель $\Lambda_f = \{t \in T; f(t) \neq 0\}$ содержит не более чем счетное множество точек ветвления, а сама функция f является равномерным пределом конечных линейных комбинаций функций вида $\chi_{[0, t]}$. Определим $Z_{\chi_{[0, t]}} = C[0, t]$ (точнее – подпространство всех непрерывных функций, обращающихся в 0 вне $[0, t]$). И положим

$$Z_f = \bigcup_{t \in \Lambda_f} Z_{\chi_{[0, t]}}.$$

Ясно, что множество Z_f является сепарабельным как счетное объединение сепарабельных пространств. Условие (*) очевидно по построению. ■

Пример континуума Суслина, т.е. несепарабельного линейно упорядоченного связного пространства, в котором любая система непересекающихся интервалов не более чем счетна, показывает, что наше условие сепарабельности множеств вида $F_t = \{s \in T; s \leq t\}$ опустить нельзя [3].

Теоремы, которые обеспечивают существование локально равномерно выпуклых норм на деревьях, можно найти в статьях [4, 7] и монографии [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобылина М.С. Локально равномерно выпуклая норма на пространстве вида $C(K)$, где K – линейно упорядоченный сепарабельный компакт // Вестник ТГУ. 2006. № 290. С. 64 – 65.
2. Burke M.R. Borel measurability of separately continuous function // Topology and Its Applications. 2003. V. 129. P. 29 – 65.
3. Deville R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and renorming in Banach spaces. Pitman monographs 64. N.Y.: Pitman, 1993.
4. Haydon R.G. Trees in renorming theory // Proc. London Math. Soc. 1999. V. 78. P. 541 – 584.
5. Kurepa D. Ensembles ordonnés et ramifiés // Publ. Math. Univ. Belgrad. 1935. V. 4. P. 1 – 138.
6. Molto A., Orihuela J., Troyanski S., Valdivia M. A non linear transfer technique for renorming // Pre-Publicaciones del Departamento de Matematicas, Universidad de Murcia 20. 2003.
7. Zizler V. Locally uniformly rotund renorming and decomposition of Banach spaces // Bull. Austr. Math. Soc. 1984. V. 29. P. 259 – 265.

Принята в печать 17.11.07.