УДК 547.54

Л.С. Копанева, И.А. Кужман

О ФОРМУЛЕ ЧИЗОТТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ

Получена формула типа формулы Кристоффеля – Шварца для отображений с симметрией переноса. Дан вариант формулы Чизотти для этих отображений.

В монографии М.А. Лаврентьева и Б.В. Шабата [1. С.227] приведена формула Чизотти, которая дает выражение для конформного отображения $w = f(z)$ из канонической области на односвязную область D, ограниченную кривой Г, если известен угол наклона $\theta = \theta(z)$ касательной к Г в точке w, соответствующей z на границе канонической области.

1. Формула Чизотти для отображения из единичного круга и верхней полуплоскости

Получим формулу Чизотти для конформного отображения $w = f(z)$ из единичного круга $E = \{z\in \mathbf{C}: |z| < 1\}$ на односвязную область D, ограниченную такой кривой Г, что в каждой точке $w = f(e^{it})$, $t\in[0;2\pi]$, известен угол наклона $\theta = \theta(t)$ касательной к Г.

Введем вспомогательную функцию

$$h(z) = -\, i \ln(-i(1-z)^2 f'(z)). \tag{1}$$

Для нее $\operatorname{Re} h(z)\big|_{z=e^{it}} = \arg f'(e^{it}) + \dfrac{\pi}{2} + t = \theta(t)$.

Если функция $\theta(t)$ известна и кусочно-непрерывна, то функция $h(z)$ восстанавливается с помощью интеграла Шварца [1. С.222] по формуле

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt + iA,$$

где $A \in \mathbf{R}$. Зная $h(z)$, из равенства (1) находим искомое отображение $w = f(z)$. Потенцируя (1), получаем

$$f'(z) = i\frac{e^{ih(z)}}{(1-z)^2}.$$

В результате интегрирования получаем

$$w = f(z) = i\int_{z_0}^{z} \frac{e^{ih(\xi)}}{(1-\xi)^2}\,d\xi + c_0.$$

Тем самым доказана теорема.

Теорема 1. Пусть f: $E \to \mathbf{C}$ – конформное отображение, где $E = \{z\in \mathbf{C}: |z| < 1\}$. Пусть $f(E) = D$, D – односвязная область, ограниченная кусочно-гладкой кривой Г. Пусть угол наклона $\theta = \theta(t)$ касательной к Г в точке $w = f(e^{it})$, $t\in[0;2\pi]$, – кусочно-непрерывное отображение. Тогда справедлива формула

$$w = f(z) = i\int\limits_{z_0}^{z} \frac{e^{ih(\xi)}}{(1-\xi)^2}\,d\xi + c_0, c_0 \in \mathbf{C}, \tag{2}$$

где $h(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \theta(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt + iA, A \in \mathbf{R}$.

Формула (2) называется формулой Чизотти.

Получим формулу Чизотти для конформного отображения $w = f(z)$ из верхней полуплоскости $\prod = \{z \in \mathbf{C}\text{: } \operatorname{Im} z > 0\}$ на односвязную область D, ограниченную такой кривой Г, что в каждой точке $w = f(x), x \in \mathbf{R}$, известен угол наклона $\theta = \theta(x)$ касательной к Г.

Введем вспомогательную функцию

$$h(z) = -\,i \ln f'(z). \tag{3}$$

Для нее $\operatorname{Re} h(z)\big|_{\operatorname{Im} z=0} = \arg f'(x) = \theta(x)$.

Если функция $\theta(x)$ известна, кусочно-непрерывна и существует

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\frac{dx}{x-z},$$

то функция $h(z)$ восстанавливается с помощью интеграла Шварца [1. С.224] по формуле

$$h(z) = \frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\frac{dx}{x-z} + iA,$$

где $A \in \mathbf{R}$. Зная $h(z)$, из равенства (3) находим искомое отображение $w = f(z)$. Потенцируя (3), получаем $e^{ih(z)} = f'(z)$.

В результате интегрирования получаем

$$w = f(z) = \int\limits_{z_0}^{z} e^{ih(\xi)}\,d\xi + c_0.$$

Тем самым доказана теорема.

Теорема 2. Пусть $f: \prod \to \mathbf{C}$ – конформное отображение, где $\prod = \{z \in \mathbf{C}\text{: } \operatorname{Im} z > 0\}$. Пусть $f(\prod) = D$, D – односвязная область ограниченная кусочно-гладкой кривой Г. Пусть угол наклона $\theta = \theta(x)$ касательной к Г в точке $w = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – кусочно-непрерывное отображение. Пусть существует

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\frac{dx}{x-z}.$$

Тогда справедлива формула

$$w = f(z) = \int\limits_{z_0}^{z} e^{ih(\xi)}\,d\xi + c_0, c_0 \in \mathbf{C}, \tag{4}$$

где $h(z) = \dfrac{1}{i\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\frac{dx}{x-z} + iA, \quad A \in \mathbf{R}$.

Формулу (4) будем называть формулой Чизотти для отображения из верхней полуплоскости.

2. Формула Чизотти для отображения с симметрией переноса вдоль вещественной оси

Область D, $D \subset \mathbf{C}$, называют областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π, если $D = L(D)$, $L(w) = w + 2\pi$.

Однолистное и голоморфное отображение $f\colon \Pi \to \mathbf{C}$, где $\Pi = \{z\in\mathbf{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, называют отображением с симметрией переноса, если оно удовлетворяет условиям:

1. $f(\Pi) = D$– односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π типа полуплоскости,
2. $f(z + 2\pi k) = f(z) + 2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$,
3. $\lim\limits_{\operatorname{Im} z\to+\infty} (f(z)-z)=0$ и $\lim\limits_{\operatorname{Im} z\to+\infty} f'(z)=1$.

Получим формулу Чизотти для конформного отображения $w = f(x)$ из верхней полуплоскости на область D с симметрией переноса, ограниченную такой кривой Γ, что в каждой точке $w = f(x)$, $x\in\mathbf{R}$, известен угол наклона $\theta = \theta(x)$ касательной к Γ.

Введем вспомогательную функцию

$$h(z) = \ln f'(z)+z. \tag{5}$$

Для нее $\operatorname{Im} h(z)\big|_{\operatorname{Im} z=0} = \arg f'(x) = \theta(x)$.

Отображение (5) является отображением с симметрией переноса и непрерывно продолжается на вещественную ось.

Если функция $\theta(x)$ известна, то функция $h(z)$ восстанавливается с помощью интеграла Шварца [2]

$$h(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\theta(x)\operatorname{ctg}\frac{x-z}{2}\,dx+z\,.$$

Зная $h(z)$, из равенства (5) находим искомое отображение $w = f(z)$. Потенцируя (5), получаем $e^{h(z)-z} = f'(z)$.

В результате интегрирования по гладкой кривой от точки z_0 до z в Π, где $\Pi = \{z\in\mathbf{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, получаем

$$w=f(z)=\int_{z_0}^{z} e^{h(\xi)-\xi}d\xi+c_0\,.$$

Тем самым доказана теорема.

Теорема 3. Пусть $f\colon \Pi \to \mathbf{C}$, где $\Pi = \{z\in\mathbf{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, – конформное отображение с симметрией переноса, непрерывно продолжаемое на вещественную ось и удовлетворяющее условиям:

1. $f(\Pi) = D$ – односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π типа полуплоскости, ограниченная кусочно-гладкой кривой Γ,
2. $f(z + 2\pi k) = f(z) + 2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$,
3. $\lim\limits_{\operatorname{Im} z\to+\infty} (f(z)-z)=0$ и $\lim\limits_{\operatorname{Im} z\to+\infty} f'(z)=1$.

Пусть угол наклона $\theta = \theta(x)$ касательной к Γ в точке $w = f(x)$, $x\in\mathbf{R}$, – кусочно-непрерывное отображение. Тогда справедлива формула

$$w=f(z)=\int_{z_0}^{z} e^{h(\xi)-\xi}d\xi+c_0, c_0\in\mathbf{C}\,, \tag{6}$$

где $h(z)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\theta(x)\operatorname{ctg}\dfrac{x-z}{2}dx+z$.

Формулу (6) будем называть формулой Чизотти для отображения с симметрией переноса.

Вообще, функция $\theta(x)$ неизвестна, и формула Чизотти не дает эффективного решения задачи конформного отображения. В случае отображения на многоугольник $\theta(x)$ равна известной постоянной на каждом отрезке вещественной прямой, соответствующем стороне многоугольника, поэтому формула Кристоффеля – Шварца легко получается из формулы Чизотти.

3. Формула типа Кристоффеля – Шварца для счетноугольника

Односвязную область D с симметрией переноса вдоль вещественной оси типа полуплоскости, граница которой Γ состоит из отрезков прямых и лучей, причем при движении по границе от точки w_0 до $w_0+2\pi$ их должно быть конечное число, называют счетноугольником [3]. Двигаясь по границе счетноугольника от w_0 до $w_0+2\pi$ в положительном направлении (то есть в таком, что счетноугольник остается слева), обозначим последовательно встречающиеся угловые точки границы через $A_1^{(0)},A_2^{(0)},\ldots,A_n^{(0)},A_n^{(0)}\neq A_1^{(0)}+2\pi$, а углы обозначим соответственно через $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi,\ldots,\alpha_n\pi$. Если $A_k^{(0)}\in\mathbf{C}$, то $0<\alpha_k\le 2$, если $A_k^{(0)}=\infty$, то $\alpha_k=0$.

Пусть отображение f является отображением с симметрией переноса. Пусть образом верхней полуплоскости при этом отображении является счетноугольник. Обозначим через $a_k^{(0)}$ прообраз $A_k^{(0)},k=\overline{1,n}$, для отображения f. Можно считать, что $\forall a_k^{(0)}\in(0;2\pi)$.

Запишем отображение f с помощью формулы Чизотти из теоремы 3. Исходя из геометрического смысла аргумента производной, имеем

$$\theta(x)=\arg f'(x)=\begin{cases}\theta_1,\ 0<x<a_1^{(0)},\\ \theta_2,\ a_1^{(0)}<x<a_2^{(0)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \theta_n,\ a_{n-1}^{(0)}<x<a_n^{(0)},\\ \theta_1,\ a_n^{(0)}<x<2\pi.\end{cases}$$

Построим вспомогательное отображение h: $\Pi\to\mathbf{C}$, используя формулу Шварца для отображений с симметрией переноса [2]. Имеем

$$2h(z)=\int\limits_0^{a_1^{(0)}}\theta_1\operatorname{ctg}\frac{x-z}{2}dx+\int\limits_{a_1^{(0)}}^{a_2^{(0)}}\theta_2\operatorname{ctg}\frac{x-z}{2}dx+\ldots+$$

$$+\int\limits_{a_{n-1}^{(0)}}^{a_n^{(0)}}\theta_n\operatorname{ctg}\frac{x-z}{2}dx+\int\limits_{a_n^{(0)}}^{2\pi}\theta_1\operatorname{ctg}\frac{x-z}{2}+z\,.$$

Интегрируя и переставляя соответствующим образом слагаемые, получаем

$$h(z)=\frac{\theta_1-\theta_2}{\pi}\ln\sin\frac{a_1^{(0)}-z}{2}+\frac{\theta_2-\theta_3}{\pi}\ln\sin\frac{a_2^{(0)}-z}{2}+\ldots+$$

$$+\frac{\theta_{n-1}-\theta_n}{\pi}\ln\sin\frac{a_{n-1}^{(0)}-z}{2}+\frac{\theta_n-\theta_1}{\pi}\ln\sin\frac{a_n^{(0)}-z}{2}+z.$$

Зная, что $\theta_k-\theta_{k+1}=(\alpha_k-1)\pi, k=\overline{1,n}$, после простых преобразований получим

$$h(z)=z+\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{a_k^{(0)}-z}{2}\right)^{\alpha_k-1}.$$

Подставив h в формулу (6), получим

$$w=f(z)=\int_{z_0}^{z}\exp\left(\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{a_k^{(0)}-\xi}{2}\right)^{\alpha_k-1}\right)d\xi+c_2\ =\ c_1\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{a_k^{(0)}-\xi}{2}\right)^{\alpha_k-1}d\xi+c_2\ ,$$

где c_1, c_2 – постоянные.

Тем самым доказана теорема.

Теорема 4. Пусть $f:\prod\to\mathbf{C}$, где $\prod=\{z\in\mathbf{C}\colon \operatorname{Im} z>0\}$ – конформное отображение с симметрией переноса, непрерывно продолжаемое на вещественную ось и удовлетворяющее условиям:

1. $f(\prod)=D$ – счетноугольник;
2. $f(z+2\pi k)=f(z)+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$;
3. $\lim\limits_{\operatorname{Im} z\to+\infty}(f(z)-z)=0$ и $\lim\limits_{\operatorname{Im} z\to+\infty}f'(z)=1$.

Тогда справедлива формула типа формулы Кристоффеля – Шварца:

$$f(z)=c_1\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{a_k^{(0)}-\xi}{2}\right)^{\alpha_k-1}d\xi+c_2\ ,$$

где c_1, c_2 – комплексные постоянные, $a_k^{(0)}\in(0;2\pi)$ – прообразы вершин счетноугольника с углами $\alpha_k\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.
2. *Копанева Л.С.* Параметрические представления отображений с симметрией переноса // Исследования по математическому анализу и алгебре. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. – С. 135 – 144.
3. *Копанев С.А., Копанева Л.С.* Формула типа формулы Кристоффеля – Шварца для счетноугольника // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 52 – 54.

Принята в печать 30.11.07.