ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2007 Математика и механика № 1

УДК 512.541

П.А. Крылов

РАДИКАЛЫ КОЛЕЦ ЭНДОМОРФИЗМОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Мы рассматриваем характеризации радикала Джекобсона и ниль-радикала колец эндоморфизмов абелевых групп.

Одной из важных задач теории абелевых групп и их колец эндоморфизмов является исследование радикалов колец эндоморфизмов. Естественно, что в силу исключительно важной роли радикала Джекобсона в структурной теории колец, основное внимание уделялось именно этому радикалу. В своей монографии [1] Р.С. Пирс поставил проблему описания элементов из радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой p-группы в терминах их действия на группе. Он ввел идеал $H(G)$ всех эндоморфизмов абелевой p-группы G, повышающих высоты элементов порядка p группы G, который оказался очень полезен при решении указанной проблемы. Изучение радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов p-группы в последующих статьях других авторов, так или иначе, касается связи между идеалом $H(G)$ и радикалом. Эти статьи освещены в обзорах [2, 3]; укажем только некоторые более поздние работы [4 – 7].

По аналогии с примарным случаем, автор определил в [8] идеал $H(G)$ всех эндоморфизмов абелевой группы без кручения G, повышающих p-высоты ее элементов. С помощью этого идеала в [8] охарактеризован радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов группы без кручения конечного ранга, даны критерии его нильпотентности и равенства нулю. В [9] найдены условия совпадения радикала с идеалом $H(G)$ и условия равенства нулю пересечения степеней радикала. В [8, 9] рассматривалось также строение фактор-кольца кольца эндоморфизмов по радикалу. Для групп бесконечного ранга нет оснований надеяться на описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов в общем случае. В [10] установлено, что радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов алгебраически компактной группы без кручения G совпадает с $H(G)$. В [9] выделены довольно обширные классы групп без кручения с нильпотентным радикалом Джекобсона кольца эндоморфизмов.

В настоящей статье вычисляется радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов вполне разложимой группы без кручения G (теорема 2.3). Для группы G конечного ранга это сделано в [11].

Помимо периодических групп и групп без кручения третьим основным классом абелевых групп является класс смешанных групп. Согласно определению, смешанная группа содержит как ненулевые элементы конечных порядков, так и элементы бесконечного порядка. Автору неизвестны работы, в которых затрагивались бы радикалы колец эндоморфизмов смешанных групп. В п.3 находится радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов группы из одного класса смешанных групп, интенсивно изучающегося в последние годы (теорема 3.2). Рассматривается также фактор-кольцо кольца эндоморфизмов такой группы по радикалу. В частности, выяснено, когда оно регулярно в смысле Неймана (теорема 3.5).

Все встречающиеся в статье группы – абелевы, p обозначает некоторое простое число. Если G – группа, то $E(G)$ – ее кольцо эндоморфизмов (иногда вместо

$E(G)$ пишем R). Для гомоморфизма α через $\alpha|A$ обозначаем сужение α на подгруппе A. $J(K)$ – радикал Джекобсона кольца K, $N(K)$ – ниль-радикал, т.е. сумма всех ниль-идеалов кольца K. Используем без пояснений ряд известных свойств радикала Джекобсона. Групповые термины, примененные к кольцу, как обычно, относятся к его аддитивной группе. $\oplus$ – знак прямой суммы групп, идеалов или конечного числа колец.

1. Вспомогательные результаты

Рангом группы без кручения G называется мощность любой ее максимальной линейно независимой системы элементов. Группа G называется однородной, если все ее ненулевые элементы имеют одинаковый тип [12, § 85]. Пусть $\pi(G) = \{p \mid pG \neq G\}$. Если $\pi(G)$ – конечное множество, то говорят, что G – почти делимая группа. p-высоту элемента $x \in G$ обозначаем $h_p(x)$. Базис окрестностей нуля группы G в Z-адической топологии составляют подгруппы nG, $n \in \mathbf{N}$.

Для группы без кручения G положим

$$H(G) = \left\{ \alpha \in E(G) \,\middle|\, \begin{array}{l} \alpha D = 0, \text{ где } D - \text{делимая часть группы } G; \\ x \in G - D,\ \ h_p(x) < \infty \Rightarrow h_p(x) < h_p(\alpha x), p \in \pi(G). \end{array} \right\}$$

Понятно, что $H(G)$ – идеал кольца $E(G)$. Если G – редуцированная группа, то $H(G) = \{\alpha \in E(G) \mid x \in G,\ h_p(x) < \infty \Rightarrow h_p(x) < h_p(\alpha x),\ p \in \pi(G)\}$.

Для удобства чтения и ссылок приведем главные результаты работы [8]. Напомним, что под псевдоцоколем $SocG$ группы без кручения G понимают сервантную подгруппу, порожденную семейством всех ее минимальных сервантных вполне характеристических подгрупп.

Предложение 1.1. Пусть G – группа без кручения конечного ранга. Тогда

1. $H(G) \subseteq J(E(G))$ и идеал $J(E(G))/H(G)$ нильпотентен;

2. Радикал $J(E(G))$ нильпотентен тогда и только тогда, когда G не имеет ненулевых почти делимых квазислагаемых;

3. $J(E(G)) = 0$ в том и только в том случае, если $G = SocG$ и G не имеет ненулевых почти делимых квазислагаемых.

В общем случае ни один из идеалов $J(E(G))$ и $H(G)$ не содержится в другом. Рассмотрим некоторые соотношения между этими идеалами.

Предложение 1.2. Пусть G – редуцированная группа без кручения. Включение $H(G) \subseteq J(E(G))$ справедливо тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие (*): для любых $a \in G$ и $\alpha \in H(G)$ существует $\lim b_n$ (предел в Z-адической топологии), где $b_n = a + \alpha a + \ldots + \alpha^{n-1} a$.

Доказательство. Пусть $H(G) \subseteq J(E(G))$. В таком случае элемент $1 - \lambda$ обратим в $E(G)$ для любого $\lambda \in H(G)$, или, что то же, $1 - \lambda$ – автоморфизм группы G. Если теперь $a \in G$, $\alpha \in H(G)$, то выберем элемент $b \in G$ так, что $(1 - \alpha)b = a$. Имеем $b_n = a + \alpha a + \ldots + \alpha^{n-1} a = (1 - \alpha)b + (\alpha - \alpha^2)b + \ldots + (\alpha^{n-1} - \alpha^n)b = (1 - \alpha^n)b$. Откуда $b - b_n = \alpha^n b$. Поскольку $\alpha \in H(G)$, то

$$\alpha^n b \in \bigcap_{p \in \pi(G)} p^n G .$$

Следовательно, $b = \lim b_n$ и (*) выполняется.

Обратно, пусть (*) выполняется. Достаточно показать, что элемент $1 - \lambda$ обратим в $E(G)$ для всякого $\lambda \in H(G)$. Если $0 \neq x \in G$, то $h_p(x) < \infty$ для некоторого p. Тогда

$h_p(x) < h_p(\lambda x)$ и $h_p((1-\lambda)x) = h_p(x-\lambda x) = h_p(x) < \infty$. Отсюда $(1-\lambda)x \neq 0$. Возьмем теперь некоторый элемент $a\in G$ и положим $b = \lim b_n$, где $b_n = a + \lambda a + \ldots + \lambda^{n-1}a$. Имеем $(1-\lambda)b = (1-\lambda)(\lim b_n) = \lim (1-\lambda)b_n = \lim (b_n - \lambda b_n) = \lim (a - \lambda^n a) = a - \lim \lambda^n a = a$, так как $\lambda^n a \in \bigcap\limits_{p\in\pi(G)} p^n G$ и, значит, $\lim \lambda^n a = 0$. Таким образом, $(1-\lambda)b = a$. Получили, что $1-\lambda$ – автоморфизм группы G, т.е. обратимый элемент кольца $E(G)$. Предложение доказано.

Если G – группа без кручения, $a\in G$, $\alpha\in E(G)$, то $\langle\alpha^n a \mid n\geq 0\rangle$ и $\langle\alpha^n a \mid n\geq 0\rangle_*$ обозначают соответственно подгруппу и сервантную подгруппу, порожденную элементами a, αa, $\alpha^2 a,\ldots$.

Следствие 1.3. Пусть L – односторонний идеал кольца эндоморфизмов редуцированной группы без кручения G, состоящий из эндоморфизмов α, таких, что подгруппа $\langle\alpha^n a \mid n\geq 0\rangle$ имеет конечный ранг для любых $a\in G$ и $\alpha\in L$. Тогда $H(G)\cap L \subseteq J(E(G))$.

Из доказательства предложения 1.2 видно, что достаточно проверить выполнение условия (*) для идеала $H(G)\cap L$. Пусть $a\in G$, $\alpha\in H(G)\cap L$. Положим $A = \langle\alpha^n a \mid n\geq 0\rangle_*$. Группа A имеет конечный ранг и $\alpha | A\in H(A)$. По предложению 1.1 $H(A) \subseteq J(E(A))$. Ввиду предложения 1.2 условие (*) для идеала $H(A)$ выполняется, т.е. существует $\lim b_n$ в группе A, где $b_n = a + \alpha a + \ldots + \alpha^{n-1}a$. Значит, существует $\lim b_n$ в группе G, что и означает выполнимость условия (*) для $H(G)\cap L$. Следствие доказано.

Выделим один класс групп, для которых справедливо включение

$$J(E(G)) \subseteq H(G).$$

Группа без кручения G называется вполне транзитивной, если для любых ее элементов $a,b \neq 0$, таких, что $h_p(a) \leq h_p(b)$ при всех p, существует $\varphi\in E(G)$, переводящий a в b [13].

Предложение 1.4. Если G – однородная вполне транзитивная группа без кручения, то $J(E(G)) \subseteq H(G)$.

Доказательство. Группу G можно считать редуцированной. В таком случае $H(G) = \bigcap\limits_{p\in\pi(G)} pE(G)$. Радикал равен пересечению всех примитивных идеалов кольца. Поэтому достаточно доказать, что идеал $pE(G)$ примитивен, т.е. существует точный простой $E(G)/pE(G)$-модуль для каждого $p\in\pi(G)$. Зафиксируем некоторое $q\in\pi(G)$ и покажем, что точный $E(G)/qE(G)$-модуль G/qG прост. Для произвольных элементов $x, y \in G - qG$ найдем такой эндоморфизм $\varphi\in E(G)$, что $\varphi x - y \in qG$. Ввиду однородности группы G существует целое число $k \neq 0$, такое, что $h_p(x) \leq h_p(ky)$ для всех $p\in\pi(G)$. При этом можно считать, что $(k, q) = 1$. Следовательно, $ks + qt = 1$, где s, t – целые числа. Далее, поскольку $h_p(x) \leq h_p(ksy)$, $p\in\pi(G)$, то существует $\varphi\in E(G)$ со свойством $\varphi x = ksy$. Теперь имеем $\varphi x - y = ksy - y = -qty\in qG$ и предложение доказано.

Группа без кручения, являющаяся прямой суммой групп ранга 1, называется вполне разложимой. Группа без кручения G называется сепарабельной, если каждое конечное подмножество элементов из G содержится в некотором вполне разложимом прямом слагаемом группы G (теория групп ранга 1, вполне разложимых и сепарабельных групп изложена в [12, §85 – 87]). Однородная сепарабельная группа вполне транзитивна. Поэтому имеет место

Следствие 1.5. Для однородной сепарабельной группы G всегда

$$J(E(G)) \subseteq H(G).$$

Введем в рассмотрение еще один идеал кольца эндоморфизмов. Эндоморфизм α группы G назовем поэлементно нильпотентным, если для всякого $a \in G$ найдется $n \in \mathbf{N}$ (зависящее от a), такое, что $\alpha^n a = 0$. Обозначим через $N(G)$ сумму всех идеалов кольца $E(G)$, состоящих из поэлементно нильпотентных эндоморфизмов группы G. Понятно, что $N(E(G)) \subseteq N(G)$.

Лемма 1.5. $N(G) \subseteq J(E(G))$.

Доказательство. Покажем, что каждый идеал L кольца $E(G)$, состоящий из поэлементно нильпотентных эндоморфизмов, содержится в $J(E(G))$. Для этого проверим, что элемент $1-\alpha$ обратим в $E(G)$ для любого $\alpha \in L$. Допустим, что $(1-\alpha)a = 0$, где $a \in G$. Положим $A = \langle \alpha^n a \mid n \geq 0 \rangle$. Тогда $\alpha A \subseteq A$ и $\alpha|A$ – нильпотентный, а $1-\alpha|A$ – обратимый элементы кольца $E(A)$. Это влечет $a = 0$. Пусть теперь $b \in G$ и $B = \langle \alpha^n b \mid n \geq 0 \rangle$. Тогда $\alpha|B$ – нильпотентный, а $1-\alpha|B$ – обратимый элементы кольца $E(B)$. Откуда $(1-\alpha)c = b$ для какого-то $c \in B$. Следовательно, $1-\alpha$ – автоморфизм группы G и обратимый элемент кольца $E(G)$.

Лемма 1.6 [9]. Пусть группа $G = A \oplus B$, $e\colon G \to A$ – проекция, $i\colon A \to G$ – вложение. Тогда 1) если $f \in J(E(G))$, то $efi \in J(E(A))$; 2) если $g \in J(E(A))$, то $f \in J(E(G))$, где f совпадает с g на A и аннулирует B.

2. Случай вполне разложимой группы без кручения

Общий тип всех ненулевых элементов однородной группы без кручения A называется типом группы A и обозначается $t(A)$ (см. начало п.1). В частности, это касается группы A ранга 1. Напомним, что вполне разложимые и сепарабельные группы без кручения определены в п.1.

Лемма 2.1. Пусть группа без кручения $G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i – группа ранга 1 и $t(A_i) \leq t(A_{i+1})$, $i \geq 1$. Для любого $\alpha \in J(E(G))$ существует такое $m \in \mathbf{N}$, что $\alpha G \subseteq A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\alpha \in J(E(G))$ числа m не существует. Положим $n_0 = 1$. Пусть индекс k_1 таков, что $\alpha \mathrm{A}_1 \subseteq A_1 \oplus \ldots \oplus A_{k_1}$, причем k_1 – минимальное число с указанным свойством. Ввиду предположения существуют индексы n_1 и k_2, для которых $n_1, k_2 > k_1$ и $\alpha \mathrm{A}_{\mathrm{n}_1} \subseteq A_1 \oplus \ldots \oplus A_{k_2}$, причем k_2 – минимальное число с таким свойством. Продолжая этот процесс, получим последовательность групп A_{n_0}, A_{k_1}, A_{n_1}, $A_{k_2}, \ldots$. Определим теперь эндоморфизм $\varphi \in E(G)$, взяв в качестве $\varphi|A_{k_i}$ некоторый ненулевой гомоморфизм $A_{k_i} \to A_{\mathrm{n}_i}$ для всех $i \in \mathbf{N}$ и положив $\varphi A_s = 0$ для $s \neq k_i$. Образуем группу $B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_{k_i}$, и пусть $j\colon B \to G$, $\mathrm{e}\colon G \to B$ – соответственно вложение и проекция. По лемме 1.6 $e\alpha\varphi j \in J(E(B))$. Однако элемент $1 - e\alpha\varphi j$ необратим в кольце $E(B)$, чего не может быть. Действительно, для каждого $i \in \mathbf{N}$ ограничение $e\alpha\varphi j$ на A_{k_i} является гомоморфизмом $\mathrm{A}_{\mathrm{k_i}} \to \bigoplus_{s=1}^{i+1} A_{k_s}$ и $(e\alpha\varphi j) A_{k_i} \not\subset \bigoplus_{s=1}^{i} A_{k_s}$. Это означает, что для ненулевого элемента $a \in A_{k_i}$ элемент $(e\alpha\varphi j)a$ имеет ненулевую компоненту в $A_{k_{i+1}}$. Откуда $A_{k_1} \not\subset (1-e\alpha\varphi j)B$. Противоречие. Следовательно, число m с требуемым свойством существует. Лемма доказана.

Для группы без кручения G определим идеал эндоморфизмов конечного ранга, $F(G) = \{\alpha \in E(G) \mid \alpha G$ имеет конечный ранг$\}$. По следствию 1.3

$$H(G)\cap F(G) \subseteq J(E(G)).$$

Следствие 2.2. Пусть G – однородная вполне разложимая группа без кручения. Тогда $J(E(G)) = H(G)\cap F(G)$.

Доказательство. Одно включение, как только что отмечено, верно всегда. Пусть $\alpha \in J(E(G))$. По следствию 1.5 $\alpha \in H(G)$. Проверим, что $\alpha \in F(G)$. Допустим, что это неверно. Запишем $G = \bigoplus_{i\in J} A_i$, где A_i – группы ранга 1. Можно выбрать попарно различные слагаемые A_{i_1}, A_{i_2},… так, что $\alpha B \subseteq B$, где $B = \bigoplus_{n\geq 1} A_{i_n}$, причем ранг группы αB бесконечен. Поскольку $\alpha \mid B \in J(E(B))$ (лемма 1.6), то это невозможно на основании леммы 2.1. Следовательно, $\alpha \in F(G)$, что завершает доказательство.

Пусть G – вполне разложимая группа без кручения, T – множество типов всех ее прямых слагаемых ранга 1. Для данного типа $t \in T$ обозначим через B_t сумму всех слагаемых ранга 1 и типа t в некотором фиксированном разложении группы G в прямую сумму групп ранга 1. Можно записать каноническое разложение $G = \bigoplus_{t\in T} B_t$. Слагаемые B_t однородны и называются однородными компонентами группы G. Обозначим через $F_1(G)$ левый идеал кольца $E(G)$, образуемый эндоморфизмами α такими, что αB_t имеет конечный ранг для всех t, причем, если компонента B_t не почти делима, то $\alpha B_t = 0$. Идеал $F_1(G)$ удовлетворяет условию, сформулированному в следствии 1.3 для идеала L. Следовательно, $H(G)\cap F_1(\mathrm{G}) \subseteq J(E(G))$. Кроме того, $N(G) \subseteq J(E(G))$ согласно лемме 1.5.

Теорема 2.3. Пусть G – вполне разложимая группа без кручения. Тогда $J(E(G)) = (H(G)\cap F_1(G)) + N(G)$.

Доказательство. Осталось доказать, что левая часть содержится в правой. Запишем каноническое разложение $G = \bigoplus_{t\in T} B_t$, и пусть $e_t\colon G \to B_t$ – проекции. Для произвольного эндоморфизма $\alpha \in J(E(G))$ построим определенные эндоморфизмы μ и ν группы G так, что $\alpha = \mu + \nu$. Укажем, как μ и ν действуют на элементах компонент B_t. Пусть $b \in B_t$ и $\alpha b = \Sigma e_s\alpha b$, где почти все $e_s\alpha b = 0$. Полагаем $\mu b = e_t\alpha b$, а $\nu b = \alpha b - \mu b$. Понятно, что $\mu,\nu \in E(G)$ и $\alpha = \mu + \nu$. По построению, $\mu B_t \subseteq B_t$, откуда $\mu \mid B_t \in J(E(B_t))$ в силу леммы 1.6. Значит, $\mu \mid B_t \in H(B_t)\cap F(B_t)$ для каждого $t \in T$ (следствие 2.2). Отсюда ясно, что $\mu \in H(G)\cap F_1(G)$. Ввиду следствия 1.3 $\mu \in J(E(G))$. Поэтому также $\nu \in J(E(G))$.

Покажем вхождение $\nu \in N(G)$. Достаточно убедиться, что идеал кольца $E(G)$, порожденный ν, состоит из поэлементно нильпотентных эндоморфизмов. Любой элемент β этого идеала равен конечной сумме $\Sigma\varphi_i\nu\psi_i$, где φ_i, $\psi_i \in E(G)$. Заметим, что $\beta \in J(E(G))$. Кроме того, из $e_t\nu b = 0$, где $b \in B_t$, следует $e_t\beta b = 0$. Нужно доказать, что для любого элемента $a \in G$ существует $n \in \mathbf{N}$ со свойством $\beta^n a = 0$. Это достаточно проверить для элементов a из всех компонент B_t. Предположим, напротив, что для некоторого t нашелся элемент $a \in B_t$, такой, что $\beta^n a \neq 0$ при любом $n \geq 1$.

Построим ориентированный граф со счетным числом вершин. Вершинами будут служить некоторые прямые слагаемые ранга 1 группы G.

Для каждой компоненты B_s фиксируем какое-то ее разложение в прямую сумму групп ранга 1. Пусть A_0 – сервантная подгруппа, порожденная элементом a. Считаем, что A_0 является одним из прямых слагаемых в только что фиксированном прямом разложении группы B_t. Все другие прямые слагаемые ранга 1, появляющиеся дальше, это также некоторые из прямых слагаемых групп B_s в выбранных прямых разложениях этих групп. Группу A_0 примем за одну из вершин графа. Пусть $\beta A_0 \subseteq A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, где $A_1, \ldots, A_k$ – некоторые прямые слагаемые группы G ранга 1, причем подгруппа βA_0 имеет ненулевую проекцию на каждое слагаемое A_i. Группы $A_1, \ldots, A_k$ также считаем вершинами графа. Соединяем A_0 стрелкой с каждой вершиной A_i, $i = 1, \ldots, k$. Делаем теперь то же самое со всеми группами $A_1, \ldots, A_k$. Более точно. Пусть $\beta A_i \subseteq A_1^{(i)} \oplus \ldots \oplus A_{m_i}^{(i)}$, где группы $A_1^{(i)}, \ldots, A_{m_i}^{(i)}$ имеют те же свойства, что и группы $A_1, \ldots, A_k$. Соединяем вершину A_i стрелкой с каждой вершиной $A_j^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, m_i$). Некоторые из вершин $A_1, \ldots, A_k$ и $A_1^{(i)}, \ldots, A_{m_i}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$, могут совпасть. Однако в силу свойств эндоморфизма β, если $A_\ell = A_j^{(i)}$, то $\ell \neq i$. Могут также совпадать некоторые из вершин $A_1^{(i)}, \ldots, A_{m_i}^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, k$) при различных i. Поступаем далее с каждой вершиной $A_j^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, m_i$) аналогичным образом. Продолжая бесконечно этот процесс выделения вершин графа, в итоге получим искомый граф.

Из предположений об эндоморфизме β вытекает следующее обстоятельство. Если A_v и A_w – две вершины графа, соединенные стрелкой, то $t(A_v) < t(A_w)$ и группа βA_v обладает ненулевой проекцией на слагаемое A_w. Из $\beta^n a \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, следует, что граф имеет бесконечное число вершин. Выделим теперь из графа некоторый подграф $C_1, C_2, \ldots$. Положим $C_1 = A_0$. Подграф, начинающийся с какой-то из вершин $A_1, \ldots, A_k$, имеет бесконечное число вершин. Пусть это будет вершина A_ℓ (подграф, начинающийся с вершины A_ℓ, состоит из всех вершин A_v таких, что существует путь из A_ℓ в A_v). Полагаем $C_2 = A_\ell$. Аналогично, существует номер m с тем свойством, что подграф, начинающийся с вершины $A_m^{(\ell)}$, имеет бесконечное число вершин. Пусть $C_3 = A_m^{(\ell)}$. Далее выбираем подобным образом $C_4, C_5, \ldots$. По построению графа сумма всех групп C_i, $i \geq 1$ является прямой. Обозначим её буквой C. Группа C служит прямым слагаемым для группы G. Кроме того, $t(C_i) < t(C_{i+1})$ и подгруппа βC_i имеет ненулевую проекцию на слагаемое C_{i+1}, $i \geq 1$. Если e – проекция группы G на слагаемое C, то по лемме 1.6 $e\beta | C \in J(E(C))$. Затем для всякого i справедливо $0 \neq (e\beta)C_i \subset C_{i+1}$. Но существование такого эндоморфизма из радикала $J(E(C))$ невозможно по лемме 2.1. Значит, β действительно есть поэлементно нильпотентный эндоморфизм. Следовательно, $\nu \in N(G)$. Таким образом, $\alpha = \mu + \nu$, где $\mu \in H(G) \cap F_1(G)$, а $\nu \in N(G)$. Этим равенство $J(E(G)) = (H(G) \cap F_1(G)) + N(G)$ установлено.

Эндоморфизм μ из доказательства теоремы на самом деле лежит в произведении идеалов $\prod_{t \in T} J(E(B_t))$, где $J(E(B_t)) = H(B_t) \cap F(B_t)$ согласно следствию 2.2.

Следствие 2.4. Для группы G из теоремы верно равенство

$$J(E(G)) = \prod_{t\in T}(H(B_t)\cap F(B_t))\oplus N(G) \text{ (групповая прямая сумма).}$$

Следствие 2.5. Радикал кольца эндоморфизмов вполне разложимой группы G поэлементно нильпотентен тогда и только тогда, когда G не имеет почти делимых прямых слагаемых ранга 1.

Доказательство. Допустим, что радикал $J(E(G))$ поэлементно нильпотентен, но группа G обладает разложением $G = A\oplus H$, в котором A – почти делимая группа ранга 1. В силу предложения 1.1 и леммы 1.6 эндоморфизм α, действующий как умножение на число $p_1...p_k$ на слагаемом A и аннулирующий H, принадлежит $J(E(G))$, где $\{p_1,..., p_k\} = \pi(A)$. Такой α не является поэлементно нильпотентным эндоморфизмом.

Обратно. Пусть группа G не имеет почти делимых прямых слагаемых ранга 1. Представим эндоморфизм $\alpha\in J(E(G))$ как в теореме 2.3: $\alpha = \mu + \nu$. Из доказательства теоремы видно, что ν является поэлементно нильпотентным эндоморфизмом. Затем $\mu|B_t\in H(B_t)\cap F(B_t)$ для каждого $t\in T$. Но $H(B_t) = 0$, так как B_t не почти делимая группа. Таким образом, $\mu = 0$, $\alpha = \nu$ и α – поэлементно нильпотентный эндоморфизм.

Будем говорить, что множество T типов всех прямых слагаемых ранга 1 сепарабельной (в частности, вполне разложимой) группы без кручения G удовлетворяет условию m-максимальности, где m – фиксированное натуральное число, если длина каждой возрастающей цепи элементов из T не превосходит m, причем m – минимальное число с таким свойством.

Следствие 2.6. Пусть G – вполне разложимая группа и множество T удовлетворяет условию m-максимальности. Тогда $J(E(G)) = (H(G)\cap F_1(G)) + N(E(G))$, причем $N(E(G))^m = 0$, т.е. $N(E(G))$ – нильпотентный идеал.

Доказательство. Сохраняем все обозначения теоремы 2.3. Возьмем некоторый идеал L кольца $E(G)$, состоящий из поэлементно нильпотентных эндоморфизмов, и пусть $\nu\in L$. Можно убедиться, что для любых s, $r\in T$ ($s \neq r$) и $a\in B_r$ справедливо $t(a) < t(e_s\nu a)$ (здесь $t(x)$ обозначает тип элемента $x\in G$). Учитывая условие m-максимальности, получаем $\nu^m = 0$. Следовательно, $\nu^m(a) = 0$ для любого $a\in G$, т.е. $\nu^m = 0$. Значит, $L \subseteq N(E(G))$, $N(G) = N(E(G))$ и искомое равенство идеалов имеет место. Понятно также, что если $\nu_1,...,\nu_m\in N(E(G))$, то $\nu_1...\nu_m = 0$. Это означает $N(E(G))^m = 0$.

В [9] показано, что ниль-радикал $N(E(G))$ для сепарабельной группы G нильпотентен тогда и только тогда, когда T удовлетворяет условию m-максимальности для некоторого $m\in\mathbf{N}$. Это же равносильно нильпотентности идеала $N(G)$.

Следствие 2.7 [11]. Если вполне разложимая группа G имеет конечный ранг, то $J(E(G)) = H(G) + N(E(G))$.

3. Случай смешанной группы

Если G – группа, то G_p обозначает её p-компоненту, т.е. наибольшую подгруппу в G, являющуюся p-группой. Далее, $T(G)$ – периодическая часть группы G – совокупность всех её элементов конечного порядка, $T(G) = \bigoplus_p G_p$.

В последнее время стали детально исследоваться смешанные группы, лежащие между суммой и произведением своих p-компонент (например [14 – 20]). Дадим точное определение таких групп.

sp-группой называется редуцированная смешанная группа G с бесконечным числом ненулевых p-компонент, такая, что естественное вложение $\bigoplus_p G_p \to G$ продолжается до сервантного вложения $G \to \prod_p G_p$ (здесь и далее подразумевается, что p пробегает множество всех простых чисел p с $G_p \neq 0$). Таким образом, для sp-группы G можно считать, что $\bigoplus_p G_p \subset G \subseteq \prod_p G_p$, причем G сервантна в $\prod_p G_p$ (это равносильно делимости фактор-группы $G/T(G)$).

Пусть G – sp-группа. Фиксируем обозначения: $V = G/T(G)$, $R = E(G)$, $R_p = E(G_p)$, $R_t = \mathrm{Hom}(G, T(G))$, $S = R/R_t$. Для каждого p имеем $G = G_p \oplus B_p$, где B_p – дополнительное слагаемое (оно определяется однозначно), $pB_p = B_p$ и $E(G) = E(G_p) \oplus E(B_p)$. Затем, V – Q-пространство, а S – Q-алгебра. Если фактор-группа $G/T(G)$ имеет конечный ранг, то V и S конечномерны.

Наибольшее внимание привлекли самомалые sp-группы G, такие, что ранг фактор-группы $G/T(G)$ конечен. Группа G называется самомалой, если образ всякого гомоморфизма $G \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} G_i$ ($G_i \cong G$, $i \geq 1$) содержится в сумме конечного числа слагаемых G_i. Различные свойства самомалых групп приведены в [21].

Лемма 3.1 [14, 15]. Если G – самомалая sp-группа с фактор-группой $G/T(G)$ конечного ранга, то $R_t = \bigoplus_p R_p$ и каждая p-компонента G_p – конечная p-группа.

Напомним определение идеала Пирса $H(G)$. Именно, если G – p-группа, то $H(G)=\{\alpha \in E(G) \mid h(x)<\infty \Rightarrow h(x)<h(\alpha x)$ для всякого элемента x порядка $p\}$ ($h(x)$ – высота элемента x в G). Всегда $J(E(G)) \subseteq H(G)$ [1].

Введем для sp-группы аналог идеала $H(G)$ для p-группы или группы без кручения G.

Если G – sp-группа, то положим $H(G) = \{\alpha \in E(G) \mid \alpha{\restriction}G_p \in H(G_p)$ для каждого $p\}$, где $H(G_p)$ – идеал Пирса для p-группы G_p. Поскольку $E(G) = E(G_p) \oplus E(B_p)$ и $J(E(G_p)) \subseteq H(G_p)$, то $J(E(G)) \subseteq H(G)$. Заметим, что если G – самомалая sp-группа с фактор-группой $G/T(G)$ конечного ранга, то G_p – конечная группа (лемма 3.1) и $J(E(G_p)) = H(G_p)$ [1].

Теорема 3.2. Если G – самомалая sp-группа, такая, что фактор-группа $G/T(G)$ имеет конечный ранг, то $J(E(G)) = N(E(G)) = H(G)$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in J(R)$ (используем с этого места краткие обозначения, фиксированные выше). Тогда $\alpha + R_t \in J(S)$. Поскольку S – конечномерная Q-алгебра, то $\alpha^k \in R_t$ для некоторого $k \in \mathbf{N}$. По лемме 3.1 $R_t = \bigoplus_p R_p$. Поэтому можно записать $G = B \oplus C$, где B – прямая сумма конечного числа некоторых p-компонент G_p, C – дополнительное слагаемое. Причем, $\alpha^k C = 0$, а $(\alpha{\restriction}B)^k \in J(E(B))$. Учитывая конечность кольца $E(B)$, получаем $\alpha^{km} = 0$, где $m \in \mathbf{N}$, и α – нильпотентный элемент. Следовательно, $J(E(G)) = N(E(G))$.

Как замечено недавно, $J(E(G)) \subseteq H(G)$. Чтобы доказать обратное включение, возьмем некоторый $\alpha \in H(G)$. Для каждого p имеем $\alpha_p \in H(G_p) = J(R_p)$, где α_p – ограничение α на G_p. Откуда $1-\alpha_p$ – обратимый элемент кольца $E(G_p)$ и автоморфизм группы G_p. В таком случае $1-\alpha$ – мономорфизм группы G и левый неделитель нуля в $E(G)$. Обозначим его β. Допустим, что $\overline{\beta}\overline{\delta}=0$ для какого-то $\delta\in R$ (черта обозначает смежный класс относительно R_t). Значит, $\beta\delta\in R_t$. Запишем $G = B\oplus C$, где B – сумма конечного числа p-компонент G_p, C – дополнительное слагаемое и $\beta\delta C = 0$. Можно выбрать δ так, что $\delta B = 0$. Тогда $\beta\delta = 0$, откуда $\delta = 0$ и $\overline{\delta}=0$. Следовательно, $1-\overline{\alpha}$ – левый неделитель нуля в S и таким образом – обратимый элемент ввиду конечномерности S. Существует $\gamma\in R$ со свойством $(1-\overline{\alpha})\overline{\gamma}=\overline{\gamma}(1-\overline{\alpha})=1$ в кольце S. Можно так подобрать разложение $G = B\oplus C$ (B – сумма конечного числа некоторых p-компонент G_p), что $(1–\alpha)\gamma = \gamma(1–\alpha) = 1$ на дополнительном слагаемом C. Тогда сужение $(1–\alpha)\,|\,C$ является автоморфизмом группы C. Поскольку $1–\alpha_p$ – автоморфизм группы G_p для любого p, то понятно, что $1–\alpha$ – автоморфизм группы G и обратимый элемент кольца $E(G)$. Так как $H(G)$ – идеал в $E(G)$, то $H(G)\subseteq J(E(G))$, что дает и равенство этих идеалов. Теорема доказана.

Пусть A – конечная p-группа. Наименьшее натуральное число m со свойством $p^mA = 0$ называется экспонентой группы A. Обозначение: $e(A)$. В [5] доказано, что индекс нильпотентности (в [5] он называется длиной Леви) идеала $J(E(A))$ не превосходит $2e(A)-1$. Опираясь на это, из доказательства теоремы можно вывести такой результат.

Следствие 3.3. Радикал $J(E(G))$ для группы G из теоремы 3.2 нильпотентен тогда и только тогда, когда множество экспонент всех групп G_p имеет точную верхнюю грань.

Получим некоторую информацию о фактор-кольце $E(G)/J(E(G))$. Прежде определим два класса колец, связанных с sp-группами.

Как известно, группа, равная прямой сумме циклических групп простых порядков, называется элементарной. sp-группа G называется элементарной sp-группой, если её периодическая часть – элементарная группа [20]. Пусть K – некоторое кольцо. Кольцо K назовем (элементарным) sp-кольцом, если его аддитивная группа является (элементарной) sp-группой (это несколько уже понятия sp-кольца, введенного в [18]). Если K – sp-кольцо, то имеют место сервантные вложения $\bigoplus_p K_p \subset K \subseteq \prod_p K_p$, где K_p – p-кольцо (т.е. его аддитивная группа является p-группой). Кольцо $E(G)$ для sp-группы G, у которой порядки всех элементов каждой p-компоненты G_p ограничены в совокупности, будет sp-кольцом. Если K – редуцированное регулярное кольцо, то K – элементарное sp-кольцо [12, теорема 124.1].

Лемма 3.4. Редуцированное кольцо K является регулярным тогда и только тогда, когда K – элементарное sp-кольцо, фактор-кольцо $K/T(K)$ и кольца K_p для всех p регулярны.

Доказательство. *Необходимость*. Как указано перед леммой, K – элементарное sp-кольцо. Осталось заметить, что фактор-кольцо регулярного кольца всегда регулярно.

Достаточность. Пусть $x\in K$. Найдутся элементы $a\in K$ и $c\in T(K)$, такие, что $xax = x + c$. Пусть $K = L\oplus M$, где M – сумма конечного числа некоторых p-компонент K_p, причем $c\in M$, L – дополнительное слагаемое. Запишем $x = x_1 + x_2$, $a = a_1 + a_2$, где $x_1,a_1\in L$, x_2, $a_2\in M$. Тогда $x_1a_1x_1 = x_1$ (учесть, что $LM = ML = 0$). Ввиду условия, M – регулярное кольцо, поэтому $x_2bx_2 = x_2$ для какого-то $b\in M$. Теперь легко получить $x(a_1 + b)x = x$, что означает регулярность кольца R и завершает доказательство.

Обозначим через J такой идеал кольца $E(G)$, где G – некоторая sp-группа, что $R_t \subseteq J$ и $J/R_t = J(R/R_t) = J(S)$. Понятно, что $J(R) \subseteq J$ и, следовательно, $J(R) + R_t \subseteq J$.

Теорема 3.5. Пусть G – самомалая sp-группа, такая, что фактор-группа $G/T(G)$ имеет конечный ранг. Тогда $E(G)/J(E(G))$ – элементарное sp-кольцо; оно регулярно в том и только в том случае, если $J(R) + R_t = J$.

Доказательство. Для всякого p имеем $R = R_p \oplus K_p$, где R_p – конечное p-кольцо и $pK_p = K_p$. Следовательно, $J(R) = J(R_p) \oplus J(K_p)$ и $R/J(R) = R_p/J(R_p) \oplus K_p/J(K_p)$, причем $p(K_p/J(K_p)) = K_p/J(K_p)$. Из леммы 1.1 статьи [19] вытекает, что $R/J(R)$ – sp-кольцо. Поскольку $pR_p \subseteq H(A_p) = J(R_p)$ [1], то $R_p/J(R_p)$ – элементарное p-кольцо. Следовательно, $R/J(R)$ – элементарное sp-кольцо.

Прежде чем перейти к вопросу о регулярности, установим равенство $T(R/J(R)) = (J(R) + R_t)/J(R)$. Из $R_t = \bigoplus\limits_p R_p$ (лемма 3.1) заключаем, что правая часть рассматриваемого равенства лежит в левой. Пусть теперь $m\alpha \in J(R)$, где $\alpha \in R$, $m \in \mathbf{N}$. Существует разложение $G = B \oplus C$, в котором B – прямая сумма конечного числа некоторых p-компонент G_p, C – дополнительное слагаемое, причем $mC = C$. Для колец эндоморфизмов получаем $E(G) = E(B) \oplus E(C)$. Если $\alpha = \beta + \gamma$ – представление относительно этого разложения, то $\delta = m\gamma \in J(E(C))$. Ввиду $mC = C$ имеется эндоморфизм $1/m \in E(C)$. Отсюда $\gamma = (1/m)\delta \in J(E(C)) \subseteq J(R)$. Итак, $\alpha = \gamma + \beta \in J(R) + R_t$ и указанное равенство справедливо.

Все кольца R_p конечны, поэтому кольца $R_p/J(R_p)$ регулярны. На основании первой части доказательства и леммы 3.4, регулярность кольца $R/J(R)$ эквивалентна регулярности кольца $(R/J(R))/T(R/J(R))$. Последнее кольцо, учитывая полученное раньше равенство, изоморфно кольцу $R/(J(R) + R_t)$. Это кольцо является конечномерной Q-алгеброй, поэтому его регулярность равносильна его полупростоте. Радикал кольца $R/(J(R) + R_t)$ равен $J/(J(R) + R_t)$, и его полупростота равносильна выполнению равенства $J(R) + R_t = J$. Теорема доказана.

Полупростота кольца $E(A)$, где A – p-группа, равносильна элементарности группы A. Отсюда выводится, что полупростота кольца $E(G)$, где G – sp-группа, равносильна тому, что G – элементарная sp-группа. В [14] (см. также [16]) доказано, что если G – самомалая sp-группа с фактор-группой $G/T(G)$ конечного ранга, то кольцо $E(G)$ регулярно тогда и только тогда, когда G – элементарная sp-группа и S – полупростая алгебра. Теорему 3.5 можно считать обобщением этого результата.

Предложение 3.6. Пусть G – самомалая sp-группа такая, что фактор-группа $G/T(G)$ имеет конечный ранг. Равенство $J(R) + R_t = J$ имеет место в каждом из следующих случаев:

1) S – полупростая алгебра;

2) G – моногенная sp-группа.

Доказательство. В 1) $J = R_t$, и поэтому $J(R) + R_t = J$. Заметим, что здесь $J(R) = \bigoplus\limits_p J(R_p)$. 2) Моногенность группы G означает, что каждая p-компонента G_p – циклическая группа [18]. Кольцо R для такой группы коммутативно. Следовательно, радикал $J(R)$ совпадает с множеством всех нильпотентных элементов кольца R. Если $\alpha \in J$, то $\alpha^k \in R_t$ при некотором k. Пусть $G = B \oplus C$, где B – сумма конечного числа p-компонент G_p, C – дополнительное слагаемое и $\alpha^k \in E(B)$. Запишем $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta \in E(B)$, $\gamma \in E(C)$. Тогда $\gamma^k = 0$ и $\gamma \in J(R)$. Значит, $\alpha = \gamma + \beta \in J(R) + R_t$ и $J = J(R) + R_t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pierce R.S.* Homomorphisms of primary abelian groups // Topics in Abelian groups. Chicago, 1963. P. 215 – 310.
2. *Михалев А.В.* Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. 1974. № 12. С. 51 – 76.
3. *Марков В.Т., Михалев А.В., Скорняков Л.А., Туганбаев А.А.* Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. 1983. № 21. С. 183 – 254.
4. *Dugas M.* On the Jacobson radical of some endomorphism rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 102. No. 4. P. 823 – 826.
5. *Praeger C.E., Schultz P.* The Loewy length of the Jacobson radical of a bounded endomorphism ring // Contem. Math. 1992. V. 130. P. 349 – 360.
6. *Hausen J., Praeger C.E., Schultz P.* Most abelian p-groups are determined by the Jacobson radical of their endomorphism rings // Math. Z. 1994. V. 216. No. 3. P. 431 – 436.
7. *Hausen J., Johnson J.A.* Determining abelian p-groups by the Jacobson radical of their endomorphism rings // J. Algebra. 1995. V. 174. No. 1. P. 217 – 224.
8. *Крылов П.А.* Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Матем. сб. 1974. Т. 95. № 2. С. 214 – 228.
9. *Крылов П.А.* Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы без кручения // Абелевы группы и модули. 1994. № 11, 12. С. 99 – 120.
10. *Крылов П.А.* Суммы автоморфизмов абелевых групп и радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 1976. № 4. С. 56 – 66.
11. *Mader A., Schultz P.* Endomorphism rings and automorphism groups of almost completely decomposable groups // Comm. Algebra. 2000. V. 28. No. 1. P. 51 – 68.
12. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.
13. *Крылов П.А.* Вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 5. С. 549 – 560.
14. *Glaz S., Wickless W.* Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups // Comm. Algebra. 1994. V. 22. P. 1161 – 1176.
15. *Albrecht U.F., Goeters H.P., Wickless W.* The flat dimension of mixed abelian groups as E-modules // Rocky Mountain J. Math. 1995. V. 25. P. 569 – 590.
16. *Albrecht U.* Mixed abelian groups with artinian quasi-endomorphism ring // Comm. Algebra. 1997. V. 25. P. 3497 – 3511.
17. *Fomin A., Wickless W.* Self-small mixed abelian groups G with G/T(G) finite rank divisible // Comm. Algebra. 1998. V. 26. P. 3563 – 3580.
18. *Крылов П.А.* Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Фунд. и прикл. математика. 2000. Т. 6. № 3. С. 793 – 812.
19. *Крылов П.А., Пахомова Е.Г., Подберезина Е.И.* Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 29 – 34.
20. *Крылов П.А., Пахомова Е.Г.* Абелевы группы и регулярные модули // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 3. С. 402 – 411.
21. *Arnold D.M., Murley C.E.* Abelian groups A, such that Hom(A,-) preserves direct sums of copies of A // Pacific J. Math. 1975. V. 56. No. 1. P. 7 – 20.

Принята в печать 30.11.07.