УДК 517.95

В.М. Миклюков

**ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ РАЗНОСТИ ПОЧТИ-РЕШЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Доказывается принцип максимума для разности почти-решений p -гармонического уравнения, уравнения минимальной поверхности и уравнения газовой динамики.

1. p -Гармонические уравнения

1.1. Условимся в обозначениях. Пусть $\mathbf{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство, $n \geq 1$, со стандартным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и модулем $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – область и пусть $k(x):D \rightarrow \mathbf{R}^1$ – измеримая по Лебегу, неотрицательная и почти всюду конечная функция.

Пусть $A:D \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее следующим предположениям:

- (i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbf{R}^n \rightarrow A(x, \xi)$ определено и непрерывно;
- (ii) отображение $x \in D \rightarrow A(x, \xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbf{R}^n$;
- (iii) для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbf{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения:

$$\mu_1 k(x) |\xi|^\alpha \leq \langle \xi, A(x, \xi) \rangle; \tag{1}$$

$$|A(x, \xi)| \leq \mu_2 k(x) |\xi|^{\alpha-1}, \tag{2}$$

где $\alpha > 1$ и $\mu_1, \mu_2 > 0$ – некоторые постоянные.

Удобно обозначить $\mu = \mu_2 / \mu_1$. Ясно, что всегда $\mu \geq 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = 0. \tag{3}$$

Уравнения описанного вида называются A -гармоническими [1]. Следует отметить, однако, что в монографии [1] предполагаются более жесткие ограничения на весовую функцию $k(x)$. В частности, предполагается, например, чтобы $k(x)$ была ограничена сверху и отграничена от нуля в существенном на компактных подмножествах области D и др. [1. С. 7].

На наш взгляд, подобные ограничения при описании класса уравнений излишни, поскольку носят во многом технический характер.

Простой пример A -гармонического уравнения составляет уравнение

$$\operatorname{div} (|\nabla h|^{p-2} \nabla h) = 0, p > 1. \tag{4}$$

Решения h уравнения (4) называются p -гармоническими функциями, а само уравнение – p -гармоническим [1, глава 6].

1.2. Символом $C(E)$ ниже обозначается класс функций, непрерывных на множестве E , символом $C^k(D)$ – множество функций, имеющих производные порядка $k, k=1,2,\dots$, в области D , символом $C^{1,1}(D)$ – множество функций класса $C^1(D)$ с производными первого порядка, удовлетворяющими условию Липшица локально в D .

Функция h принадлежит классу $W^{1,\alpha}(D)$, $\alpha \geq 1$, если она имеет обобщенные в смысле С.Л. Соболева частные производные $\partial h/\partial x_i$, ($i=1, \dots, n$), суммируемые по D со степенью α . Функция h принадлежит классу $W_{\text{loc}}^{1,\alpha}(D)$, если она принадлежит классу $W^{1,\alpha}(D')$ на всякой подобласти $D' \subset D$. Последнее означает, что замыкание D' компактно и содержится в D .

Определение 1. Непрерывная функция $h: D \rightarrow \mathbf{R}^1$ класса $W_{\text{loc}}^{1,\alpha}(D)$ является почти-решением уравнения (3), если для всякой функции

$$\phi \in W_{\text{loc}}^{1,\alpha}(D) \cap C(D), \quad 0 \leq \phi \leq 1, \quad \text{supp } \phi \subset D, \quad (5)$$

$$\text{выполнено} \quad \left| \int_D \langle \nabla \phi, A(x, \nabla h) \rangle dH^n \right| \leq \varepsilon \quad (6)$$

где dH^n – элемент n -мерной меры Лебега.

Величина $\varepsilon \geq 0$ называется *уклонением* почти-решения h [2].

Поясним введенное понятие в случае, когда $\varepsilon = 0$. Если множество ∂D является счетно $(H^{n-1}, n-1)$ -спрямляемым, то оно имеет локально конечный периметр в смысле Де-Джорджи и H^{n-1} – почти всюду на ∂D существует единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ [3, §3.2]. Простые соображения, опирающиеся на обобщенную формулу Остроградского – Гаусса для $C^{1,1}$ -функций в областях с $(H^{n-1}, n-1)$ -спрямляемыми границами (см. [4, теорема 2.6.2]), показывают, что принадлежность h классу $C^{1,1}(\bar{D})$ и выполнение (6) с указанным произволом на функцию ϕ влекут выполнение соотношения (3) в стандартном смысле.

1.3. Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – область и

$$\tilde{A}(x, \xi): D \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

– измеримая в смысле Лебега вектор-функция.

Пусть $h: D \rightarrow \mathbf{R}$ – непрерывная функция класса $W_{\text{loc}}^{1,\alpha}(D)$, являющаяся почти-решением уравнения

$$\text{div } \tilde{A}(x, \nabla h) = 0. \quad (7)$$

Определение 2. Будем говорить, что вектор-функция $\tilde{A}(x, \xi)$ удовлетворяет условиям (1), (2) на почти-решении h , если вектор-функция $\tilde{A}(x, \nabla h(x)): D \rightarrow \mathbf{R}^n$ обладает свойствами (1), (2), т.е. почти всюду в D выполнены

$$\mu_1 k(x) |\nabla h(x)|^\alpha \leq \langle \nabla h(x), \tilde{A}(x, \nabla h(x)) \rangle; \quad (8)$$

$$|\tilde{A}(x, \nabla h(x))| \leq \mu_2 k(x) |\nabla h(x)|^{\alpha-1}. \quad (9)$$

Ключевым в нашем подходе является следующее утверждение:

Лемма 1. Пусть $h_1, h_2: D \rightarrow \mathbf{R}^1$ – почти-решения уравнения (4). Тогда функция $h = h_2 - h_1$ является почти-решением уравнения (7), где

$$\tilde{A}(x, \xi) = |\nabla h_2(x)|^{p-2} (\nabla h_1(x) + \xi) - |\nabla h_1(x)|^{p-2} (\nabla h_2(x) - \xi), \quad (10)$$

удовлетворяющего условиям (1) – (2) на почти-решении h с $\alpha=2$.

При этом можно положить

$$k(x) = \int_0^1 |\lambda \nabla h_2(x) + (1-\lambda) \nabla h_1(x)|^{p-2} d\lambda,$$

$$\mu_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } p \geq 2, \\ p-1 & \text{при } 1 < p < 2, \end{cases} \quad \mu_2 = 1 + |p-2| \text{ при } p > 1,$$

и если отклонения h_1, h_2 суть $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ соответственно, то отклонение почти-решения h равно $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Доказательство. Так как h_i ($i=1,2$) суть почти-решения уравнения (4), то для всякой функции φ со свойствами (5) выполнено

$$\left| \int_D \langle \nabla \varphi, |\nabla h_i|^{p-2} \nabla h_i \rangle dH^n \right| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда для всякой функции φ указанного вида имеет место соотношение

$$\left| \int_D \langle \nabla \varphi, |\nabla h_2|^{p-2} \nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2} \nabla h_1 \rangle dH^n \right| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (11)$$

Выполнение (11) означает, что функция $h = h_2 - h_1$ является почти-решением уравнения (7) с $\tilde{A}$ вида (10) и отклонением $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Нам необходимо проверить, что $\tilde{A}(x, \xi)$ удовлетворяет условиям (8) – (9) при $h = h_2 - h_1$ с $\alpha = 2$.

Мы воспользуемся подходом, использованным в [5] при доказательстве теоремы 1.1. Положим

$$\Phi(\lambda) = |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2} \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1), \quad \lambda \in [0;1].$$

Мы имеем

$$\Phi(0) = |\nabla h_1|^{p-2} \nabla h_1, \quad \Phi(1) = |\nabla h_2|^{p-2} \nabla h_2.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} |\nabla h_2|^{p-2} \nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2} \nabla h_1 &= \Phi(0) - \Phi(1) = \int_0^1 \Phi'(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_0^1 [(\nabla h_2 - \nabla h_1) |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2} + (p-2) \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1) \times \\ &\quad \times |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-4} \langle \nabla h_2 - \nabla h_1, \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1) \rangle] d\lambda \end{aligned} \quad (12)$$

и

$$\begin{aligned} &\langle \nabla h_2 - \nabla h_1, |\nabla h_2|^{p-2} \nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2} \nabla h_1 \rangle = \\ &= |\nabla h_2 - \nabla h_1|^2 \int_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2} d\lambda + \\ &+ (p-2) \int_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-4} \langle \nabla h_2 - \nabla h_1, \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1) \rangle^2 d\lambda. \end{aligned} \quad (13)$$

Если $p \geq 2$, то

$$\begin{aligned} &\langle \nabla h_2 - \nabla h_1, |\nabla h_2|^{p-2} \nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2} \nabla h_1 \rangle \geq \\ &\geq |\nabla h_2 - \nabla h_1|^2 \int_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2} d\lambda = |\nabla h_2 - \nabla h_1|^2 k(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $1 < p \leq 2$. Заметим сначала, что

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-4} \langle \nabla h_2 - \nabla h_1, \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1) \rangle^2 d\lambda \leq \\ &\leq |\nabla h_2 - \nabla h_1|^2 \int_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2} d\lambda. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{и} \quad |\nabla h_2 - \nabla h_1|^2 \int_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2} d\lambda + \\
& + (p-2) \int_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-4} \langle \nabla h_2 - \nabla h_1, \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1) \rangle^2 d\lambda \geq \\
& \geq (p-1) |\nabla h_2 - \nabla h_1|^2 \int_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2} d\lambda .
\end{aligned}$$

Тем самым, соотношение (13) при $1 < p \leq 2$ влечет

$$\langle \nabla h_2 - \nabla h_1, |\nabla h_2|^{p-2} \nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2} \nabla h_1 \rangle \geq (p-1) |\nabla h_2 - \nabla h_1|^2 k(x). \quad (15)$$

Соотношения (14) и (15) означают справедливость (8).

Проверим выполнение неравенства (9) при $h = h_2 - h_1$ и $\alpha = 2$. Предположим сначала, что $p \geq 2$. Здесь (12) приводит к оценке

$$\begin{aligned}
& \|\nabla h_2|^{p-2} \nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2} \nabla h_1\| \leq \left| \int_0^1 (\nabla h_2 - \nabla h_1) |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2} d\lambda \right| + \\
& + (p-2) \left| \int_0^1 \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1) |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-4} \langle \nabla h_2 - \nabla h_1, \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1) \rangle d\lambda \right| \\
& \text{и} \quad \|\nabla h_2|^{p-2} \nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2} \nabla h_1\| \leq (p-1) |\nabla h_2 - \nabla h_1| \int_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2} d\lambda = \\
& = (p-1) |\nabla h_2 - \nabla h_1| k(x). \quad (16)
\end{aligned}$$

В случае $1 < p \leq 2$ имеем

$$\begin{aligned}
& \|\nabla h_2|^{p-2} \nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2} \nabla h_1\| \leq \left| \int_0^1 (\nabla h_2 - \nabla h_1) |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2} d\lambda \right| + \\
& + (2-p) \left| \int_0^1 \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1) |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-4} \langle \nabla h_2 - \nabla h_1, \nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1) \rangle d\lambda \right| \\
& \text{и} \quad \|\nabla h_2|^{p-2} \nabla h_2 - |\nabla h_1|^{p-2} \nabla h_1\| \leq \\
& \leq (1+|p-2|) |\nabla h_2 - \nabla h_1| \int_0^1 |\nabla(\lambda h_2 + (1-\lambda)h_1)|^{p-2} d\lambda = \\
& = (1+|p-2|) |\nabla h_2 - \nabla h_1| k(x). \quad (17)
\end{aligned}$$

Оценки (16) и (17) обеспечивают выполнение (9) с $\alpha = 2$ и заявленной постоянной μ_2 . ■

1.4. Если положить

$$I_p(\xi, \eta) = \int_0^1 |\lambda \xi + (1-\lambda)\eta|^{p-2} d\lambda,$$

то определенная в лемме 1 функция $k(x)$ имеет вид

$$k(x) = I_p(\nabla h_1(x), \nabla h_2(x)). \quad (18)$$

Укажем некоторые свойства функции $I_p(\xi, \eta)$. Прежде всего, заметим, что для любого $\lambda \in [0, 1]$ выполнено

$$|\lambda|\xi| - (1 - \lambda)|\eta| \leq |\lambda\xi - (1 - \lambda)\eta| \leq \lambda|\xi| + (1 - \lambda)|\eta|. \quad (19)$$

Пусть $p \geq 2$. Предположим, что $|\xi| > |\eta|$. Пользуясь (19), имеем

$$\begin{aligned} I_p(\xi, \eta) &\leq \int_0^1 (\lambda(|\xi| - |\eta|) + |\eta|)^{p-2} d\lambda = \\ &= \frac{1}{|\xi| - |\eta|} \int_{|\eta|}^{|\xi|} \tau^{p-2} d\tau = \frac{1}{p-1} \frac{|\xi|^{p-1} - |\eta|^{p-1}}{|\xi| - |\eta|}. \end{aligned} \quad (20)$$

С другой стороны, на основании (19) находим

$$\begin{aligned} I_p(\xi, \eta) &\geq \int_0^1 \lambda|\xi| - (1 - \lambda)|\eta|^{p-2} = \int_0^1 \lambda(|\xi| + |\eta|) - |\eta|^{p-2} d\lambda = \\ &= \int_s^1 \lambda(|\xi| + |\eta|) - |\eta|^{p-2} d\lambda + \int_0^s |\eta| - \lambda(|\xi| + |\eta|)^{p-2} d\lambda, \end{aligned}$$

где
$$s = \frac{|\eta|}{|\xi| + |\eta|}. \quad (21)$$

Вычисляя последние два интеграла, получаем

$$I_p(\xi, \eta) \geq \frac{1}{p-1} \frac{|\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1}}{|\xi| + |\eta|}, \quad p \geq 2. \quad (22)$$

Пусть $1 < p < 2$. Как и выше, предположим, что $|\xi| > |\eta|$. В соответствии с (19) можем записать

$$\begin{aligned} I_p(\xi, \eta) &\leq \int_0^1 \lambda|\xi| - (1 - \lambda)|\eta|^{p-2} = \int_0^1 \lambda(|\xi| + |\eta|) - |\eta|^{p-2} d\lambda = \\ &= \int_0^s |\eta| - \lambda(|\xi| + |\eta|)^{p-2} d\lambda + \int_s^1 \lambda(|\xi| + |\eta|) - |\eta|^{p-2} d\lambda, \end{aligned}$$

где величина $s > 0$ определена равенством (21). Таким образом, находим

$$I_p(\xi, \eta) \leq \frac{1}{p-1} \frac{|\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1}}{|\xi| + |\eta|}, \quad 1 < p < 2. \quad (23)$$

Наконец, вычисляя как в (20), получаем

$$I_p(\xi, \eta) \geq \frac{1}{p-1} \frac{|\xi|^{p-1} - |\eta|^{p-1}}{|\xi| - |\eta|}, \quad 1 < p < 2. \quad (24)$$

Лемма 2. *Имеют место соотношения:*

$$c_1(p) \frac{|\xi|^{p-1} - |\eta|^{p-1}}{|\xi| - |\eta|} \leq \frac{|\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1}}{|\xi| + |\eta|} \leq c_2(p) \frac{|\xi|^{p-1} - |\eta|^{p-1}}{|\xi| - |\eta|}, \quad p > 1; \quad (25)$$

$$c_3(p) (|\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2}) \leq \frac{|\xi|^{p-1} - |\eta|^{p-1}}{|\xi| - |\eta|} \leq c_4(p) (|\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2}), \quad p \geq 2; \quad (26)$$

$$\frac{c_5(p)}{|\xi|^{2-p} + |\eta|^{2-p}} \leq \frac{|\xi|^{p-1} - |\eta|^{p-1}}{|\xi| - |\eta|} \leq \frac{c_6(p)}{|\xi|^{2-p} + |\eta|^{2-p}}, \quad 1 < p < 2, \quad (27)$$

где

$$c_1(p) = \inf_{1 < x < \infty} \lambda_1(x), \quad c_2(p) = \sup_{1 < x < \infty} \lambda_1(x),$$

$$c_3(p) = \inf_{1 < x < \infty} \lambda_2(x), \quad c_4(p) = \sup_{1 < x < \infty} \lambda_2(x),$$

$$c_5(p) = \inf_{1 < x < \infty} \lambda_3(x), \quad c_6(p) = \sup_{1 < x < \infty} \lambda_3(x),$$

и

$$\lambda_1(x) = \frac{(x^{p-1} + 1)(x-1)}{(x^{p-1} - 1)(x+1)},$$

$$\lambda_2(x) = \frac{(x^{p-1} - 1)}{(x-1)(x^{p-2} + 1)},$$

$$\lambda_3(x) = \frac{1}{x-1} (x^{p-1} - 1)(x^{2-p} + 1).$$

Доказательство. В случае (25) имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \lambda_1(x) = \frac{1}{p-1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \lambda_1(x) = 1.$$

Функция $\lambda_1(x)$ непрерывна на $(1, \infty)$ и не обращается в нуль. Тем самым

$$0 < c_1(p) \leq c_2(p) < \infty$$

и

$$c_1(p) \frac{x^{p-1} - 1}{x-1} \leq \frac{x^{p-1} + 1}{x+1} \leq c_2(p) \frac{x^{p-1} - 1}{x-1}$$

при всех $x \in (1, \infty)$.

Это влечет справедливость (25).

В точности так же проверяются оценки (26) и (27).

Подробности см. в [6], леммы 3.5 и 3.6. ■

Замечание. В общем случае постоянные $c_1(p) - c_6(p)$ присутствуют в оценках весовой функции $k(x)$ (см. соотношение (18) и лемму 3 ниже) и потому было бы желательно знать их точные значения, как это сделано в [7].

Объединяя найденные выше оценки (22) – (24) для $I_p(\xi, \eta)$ и (25) – (27), приходим к высказыванию:

Лемма 3. *Имеют место оценки*

$$c_8(p)(|\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2}) \leq I_p(\xi, \eta) \leq c_9(p)(|\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2}), \quad p \geq 2, \quad (28)$$

и

$$c_{10}(p)(|\xi|^{2-p} + |\eta|^{2-p})^{-1} \leq I_p(\xi, \eta) \leq c_{11}(p)(|\xi|^{2-p} + |\eta|^{2-p})^{-1}, \quad 1 < p < 2, \quad (29)$$

где

$$c_8(p) = \frac{1}{p-1} c_1(p) c_3(p), \quad c_9(p) = \frac{1}{p-1} c_4(p),$$

$$c_{10}(p) = \frac{1}{p-1} c_5(p), \quad c_{11}(p) = \frac{1}{p-1} c_{12}(p) c_6(p),$$

1.5. Напомним необходимые понятия из [2]. Пусть D – область в $\mathbf{R}^n$ и A, B – непустые, замкнутые относительно D , непересекающиеся подмножества. Обозначим через

$$\text{cap}_k(A, B) = \inf_u \int_D k(x) |\nabla u|^2 dH^n, u \in C^1(D), u|_A \equiv 0, u|_B \equiv 1,$$

взвешенную k -емкость конденсатора $(A, B; D)$ и через

$$\lambda_k(O) = \inf_u \frac{\int_O k(x) |\nabla u|^2 dH^n}{\int_O k(x) u^2 dH^n}, u \in C^1(O) \cap C^0(\bar{O}), u|_{\partial O} = 0, \quad (30)$$

взвешенную основную частоту открытого множества $O \subset \mathbf{R}^n$.

Будем говорить, что неограниченная область $D \subset \mathbf{R}^n$ является k -узкой в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbf{R}^n$, если при всяком $r > 0$ выполнено

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \text{cap}_k(D_r, D \setminus D_R) = 0,$$

где $D_t = \{x \mid |x| < t\} \cap D$.

Теорема 7.1.1 из [8] и лемма 1 влекут справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть h_1, h_2 – почти-решения с уклонениями $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ в области $D \subset \mathbf{R}^n$ p -гармонического уравнения (4), удовлетворяющие предположению

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} (h_1(x) - h_2(x)) \leq 0, x \in D, x_0 \in \partial D. \quad (31)$$

Тогда либо $h_1(x) \leq h_2(x)$ всюду в D , либо открытое множество

$$O = \{x \in D: (h_1(x) - h_2(x)) > 0\}$$

не пусто и

$$\frac{1}{2} \int_{\{|x| < r\} \cap O} k(x) |\nabla(h_1 - h_2)|^2 dH^n \leq \frac{M}{\mu_1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 2\mu^2 M^2 \text{cap}_k(O_r, O \setminus O_R), \quad (32)$$

где $M = \sup_D |h_2(x) - h_1(x)|$.

В частности, если D ограничена или является k -узкой на бесконечности, то для любого $r > 0$ выполнено

$$\int_{\{|x| < r\} \cap O} k(x) (h_2(x) - h_1(x))^2 dH^n \leq \frac{2M}{\mu_1 \lambda_k(O)} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

1.6. Мы ограничимся иллюстрацией разрабатываемых методов на примере p -гармонических функций в цилиндрических областях. В конических и других, достаточно «правильных» областях $\mathbf{R}^n$ могут быть использованы близкие конструкции. Рассмотрение же общего случая требует техники, достаточно далеко отстоящей от развиваемой в этой работе (см., например, [8, разделы 1.1 и 1.2]) и требует самостоятельного исследования.

Пусть Δ – ограниченная область в $\mathbf{R}^{n-1}$ и $D = \Delta \times (0, +\infty)$ – полуцилиндр. Выясним условия, при которых область D является k -узкой.

Будем предполагать, что Δ лежит в гиперплоскости $x_n = 0$ так, что $x = (x', x_n) \in D$ тогда и только тогда, когда $x' \in \Delta$ и $x_n > 0$. Положим

$$x_n(r) = \max \{x_n : x \in D \cap \Sigma(0, r)\}, \Sigma(0, r) = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| = r\}.$$

Пусть

$$D(t) = \{x = (x', x_n) \in D: x_n = t\}, t > 0,$$

и пусть $D^-(t)$, $D^+(t)$ означают соответственно ограниченную и неограниченную компоненты связности множества $D \setminus D(t)$. Зафиксируем $0 < r < R < \infty$ так, чтобы цилиндрическая область $D_{r,R}$, заключенная между плоскими сечениями $D(x_n(r))$ и $D(x_n(R))$, была непустой. Так как область $D_{r,R}$ лежит в D между D_r и $D \setminus D_R$, то имеет место следующее соотношение между k -емкостями:

$$\text{cap}_k(D_r, D \setminus D_R) \leq \text{cap}_k(D^-(x_n(r)), D^+(x_n(R))). \quad (33)$$

Обозначим через $\tilde{k}(t)$ величину $\text{ess sup}_{x \in D(t)} k(x)$. Нетрудно видеть, что

$$\text{cap}_k(D^-(x_n(r)), D^+(x_n(R))) \leq \text{cap}_{\tilde{k}}(D^-(x_n(r)), D^+(x_n(R))). \quad (34)$$

Пусть $u(x)$ – произвольная функция, допустимая при вычислении $\tilde{k}$ -емкости конденсатора $(D^-(x_n(r)), D^+(x_n(R)))$. В силу интегрального неравенства Коши при любом $x' \in \Delta$ имеем

$$1 \leq \left(\int_{x_n(r)}^{x_n(R)} |\nabla \varphi(x', x_n)| dx_n \right)^2 \leq \int_{x_n(r)}^{x_n(R)} \tilde{k}(x_n) |\nabla \varphi(x', x_n)|^2 dx_n \int_{x_n(r)}^{x_n(R)} \frac{dx_n}{\tilde{k}(x_n)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\Delta) \left(\int_{x_n(r)}^{x_n(R)} \frac{dx_n}{\tilde{k}(x_n)} \right)^{-1} &\leq \int_{\Delta} dH^{n-1} \int_{x_n(r)}^{x_n(R)} \tilde{k}(x_n) |\nabla \varphi(x', x_n)|^2 dx_n = \\ &= \int_{D_{r,R}} \tilde{k}(x_n) |\nabla \varphi(x', x_n)|^2 dH^n \end{aligned}$$

и, переходя в правой части к точной нижней грани по всем допустимым функциям φ , находим

$$H^{n-1}(\Delta) \left(\int_{x_n(r)}^{x_n(R)} \frac{dx_n}{\tilde{k}(x_n)} \right)^{-1} \leq \text{cap}_{\tilde{k}}(D^-(x_n(r)), D^+(x_n(R))).$$

Найденная оценка является точной и достигается на функции

$$\varphi(x', x_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_n \leq x_n(r), \\ \int_{x_n}^{x_n(R)} \frac{dx_n}{\tilde{k}(x_n)} \left(\int_{x_n(r)}^{x_n(R)} \frac{dx_n}{\tilde{k}(x_n)} \right)^{-1} & \text{при } x_n(r) < x_n < x_n(R), \\ 0 & \text{при } x_n \geq x_n(R). \end{cases}$$

Тем самым, мы получаем

$$H^{n-1}(\Delta) \left(\int_{x_n(r)}^{x_n(R)} \frac{dx_n}{\tilde{k}(x_n)} \right)^{-1} = \text{cap}_{\tilde{k}}(D^-(x_n(r)), D^+(x_n(R))). \quad (35)$$

Сопоставляя (33), (34) и (35), приходим к высказыванию:

Лемма 4. Если весовая функция k удовлетворяет условию

$$\int \frac{dt}{\tilde{k}(t)} = +\infty, \quad \tilde{k}(t) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in D(t)} k(x), \tag{36}$$

то цилиндрическая область D является k -узкой в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbf{R}^n$.

Пусть h_1, h_2 – почти-решения в $D = \Delta \times (0, +\infty)$ некоторого p -гармонического уравнения. Положим

$$q(x) = \begin{cases} |\nabla h_1(x)|^{p-2} + |\nabla h_2(x)|^{p-2} & \text{при } p \geq 2, \\ \left(|\nabla h_1(x)|^{2-p} + |\nabla h_2(x)|^{2-p} \right)^{-1} & \text{при } 1 < p < 2 \end{cases}$$

и, далее,
$$\tilde{q}(t) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in D(t)} q(x), t > 0.$$

Заметим, что в силу соотношений (28) – (30) имеем

$$c_{12}(p) \lambda_q(O) \leq \lambda_k(O) \leq c_{13}(p) \lambda_q(O),$$

где
$$c_{12}(p) = \begin{cases} \frac{c_8}{c_9} & \text{при } p \geq 2, \\ \frac{c_{10}}{c_{11}} & \text{при } 1 < p < 2; \end{cases} \quad c_{13}(p) = \begin{cases} \frac{c_9}{c_8} & \text{при } p \geq 2, \\ \frac{c_{11}}{c_{10}} & \text{при } 1 < p < 2. \end{cases}$$

Пользуясь леммами 3 и 4, на основании теоремы 1 получаем

Теорема 2. Пусть h_1, h_2 – ограниченные почти-решения с уклонениями $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ в цилиндрической области $D = \Delta \times (0, +\infty)$ некоторого p -гармонического уравнения (4), причем

$$\int \frac{dt}{\tilde{q}(t)} = +\infty. \tag{37}$$

Предположим, что всюду на границе D имеет место (31).

Тогда либо $h_1(x) \leq h_2(x)$ всюду в D , либо открытое множество

$$O = \{x \in D: (h_1(x) - h_2(x)) > 0\}$$

не пусто и для любого $r > 0$ выполнено

$$\int_{\{|x| < r\} \cap O} q(x)(h_2(x) - h_1(x))^2 dH^n \leq \frac{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)M}{c_{14}(p)\lambda_q(O)}, \tag{38}$$

где
$$c_{14}(p) = \begin{cases} c_8 & \text{при } p \geq 2, \\ c_{10} & \text{при } 1 < p < 2. \end{cases}$$

2. Уравнения минимальной поверхности и газовой динамики

2.1. Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – область. Пусть $A: D \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее предположениям (i), (ii) раздела 1.1. Вместо (iii) мы будем предполагать, что имеет место свойство:

(iv) для почти всех $x \in D$ и любых $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ выполнено

$$v k(x) |A(x, \xi) - A(x, \eta)|^2 \leq \langle \xi - \eta, A(x, \xi) - A(x, \eta) \rangle, \tag{39}$$

где $v > 0$ – постоянная и $k(x) \geq 0$ – измеримая функция.

В некоторых случаях имеет смысл предполагать, что символ $A(x, \xi)$ подчинен условию

$$A(x, \xi) = A(x, \eta) \text{ тогда и только тогда, когда } \xi = \eta. \quad (40)$$

Условиям (39) с $v = 1$, $k(x) \equiv 1$ и (40) удовлетворяет уравнение минимальной поверхности

$$\operatorname{div} \frac{\nabla h(x)}{\sqrt{1 + |\nabla h(x)|^2}} = 0 \quad (41)$$

(см. [9] – [13]).

Другой пример доставляет одно уравнение газовой динамики

$$\operatorname{div} (\sigma(|\nabla h(x)|)\nabla h(x)) = 0, \quad \sigma(t) = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} t^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (42)$$

где γ – постоянная, характеризующая поток субстанции [14, §2; 15, §2].

В [16] установлено, что в случае постоянной $-\infty < \gamma \leq -1$ уравнение (42) удовлетворяет (39) с $v = 1$, $k(x) \equiv 1$ и (40). При $\gamma > -1$ в [16] указаны некоторые оценки множества, на котором выполнено (39).

2.2. Пусть h_1 и h_2 – произвольная пара почти-решений уравнения (3) в области $D \subset \mathbf{R}^n$, такие, что в каждой граничной точке $x_0 \in \partial D$ выполнено

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} (h_1(x) - h_2(x)) \leq 0. \quad (43)$$

Предположим, что в некоторой точке $a \in D$ выполнено $h_1(a) > h_2(a)$. Обозначим через O открытое множество

$$\{x \in D: h_1(x) - h_2(x) > 0\},$$

содержащее точку a .

Всюду на границе ∂O имеем $h_1(x) - h_2(x) = 0$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} h_1(x) - h_2(x) & \text{при } x \in O, \\ 0 & \text{при } x \in D \setminus O. \end{cases}$$

Данная функция непрерывна, неотрицательна и принадлежит классу $W^{1,p}(D)$.

Зафиксируем $r > 0$ так, чтобы пересечение шара

$$B(0, r) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < r\}$$

с областью O было непусто и $R > r$. Пусть $\psi(|x|): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ – непрерывная функция, равная 1 на $B(0, r)$, обращающаяся в 0 на $\mathbf{R}^n \setminus B(0, R)$, принадлежащая классу $W^{1,2}(\mathbf{R}^n)$ и такая, что $0 \leq \psi(x) \leq 1$.

Не ограничивая общности, можем считать, что функция $\varphi(x) = \psi^2(x)f(x)$ финитна в области D . Если уклонения почти-решений h_1 и h_2 суть $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, то, в силу (5), имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_D \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla h_1) \rangle dH^n - \int_D \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla h_2) \rangle dH^n \right| \leq \\ & \leq \left| \int_D \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla h_1) - A(x, \nabla h_2) \rangle dH^n \right| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) M, \end{aligned}$$

где

$$M = \max_O (h_1(x) - h_2(x)).$$

Отсюда находим

$$\left| \int_{O \cap B(0,R)} \psi^2 \langle \nabla h_1 - \nabla h_2, A(x, \nabla h_1) - A(x, \nabla h_2) \rangle dH^n \right| \leq \\ \leq \left| 2 \int_{O \cap B(0,R)} f \psi \langle \nabla \psi, A(x, \nabla h_1) - A(x, \nabla h_2) \rangle dH^n \right| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) M.$$

Тем самым, пользуясь (39), приходим к неравенству

$$v \int_{O \cap B(0,R)} \psi^2 k(x) |A(x, \nabla h_1) - A(x, \nabla h_2)|^2 dH^n \leq \\ \leq 2 \int_{O \cap B(0,R)} f \psi |\nabla \psi| |A(x, \nabla h_1) - A(x, \nabla h_2)| dH^n + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) M.$$

Так как

$$|ab| \leq \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2, \quad p > 1,$$

то для любого $s > 0$ выполнено

$$f \psi |\nabla \psi| |A(x, \nabla h_1) - A(x, \nabla h_2)| \leq \frac{1}{2s^2} f^2 k^{-1}(x) |\nabla \psi|^2 + \\ + s^2 \frac{1}{2} \psi^2 k(x) |A(x, \nabla h_1) - A(x, \nabla h_2)|^2.$$

Выберем $s > 0$ так, чтобы

$$v > s^2. \tag{44}$$

Тогда

$$\int_{O \cap B(0,R)} \psi^2 k(x) |A(x, \nabla h_1) - A(x, \nabla h_2)|^2 dH^n \leq C_1(s)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \\ + C_2(s) \int_{O \cap B(0,R)} k^{-1}(x) |\nabla \psi|^2 dH^n,$$

где

$$C_1(s) = M/(v - s^2), \quad C_2(s) = \frac{M^2}{s^2}/(v - s^2).$$

Учитывая теперь, что $\psi \equiv 1$ при $x \in B(0,r)$, приходим к соотношению

$$\int_{O \cap B(0,r)} k(x) |A(x, \nabla h_1) - A(x, \nabla h_2)|^2 dH^n \leq C_1(s)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \\ + C_2(s) \int_{O \cap \{r < |x| < R\}} k^{-1}(x) |\nabla \psi|^2 dH^n.$$

Обозначим через

$$\text{cap}_{k^{-1}}(P, Q; D) = \inf_{\psi} \int_D k^{-1}(x) |\nabla \psi|^2 dH^n, \quad \psi|_P \equiv 0, \quad \psi|_Q \equiv 1,$$

взвешенную емкость конденсатора $(P, Q; D)$. Тогда для любого $s > 0$, удовлетворяющего (44), выполнено

$$\int_{O \cap B(0,r)} k(x) |A(x, \nabla h_1) - A(x, \nabla h_2)|^2 dH^n \leq C_1(s)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + C_2(s) \text{cap}_{k^{-1}}(O_r, O_R; D), \quad (45)$$

где $O_r = \{|x| < r\} \cap O$.

Будем говорить, что неограниченная область $D \subset \mathbf{R}^n$ является k^{-1} -узкой в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbf{R}^n$, если при всяком $r > 0$ выполнено

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \text{cap}_{k^{-1}}(D_r, D \setminus D_R) = 0.$$

Имеет место следующая форма принципа максимума разности для почти-решений.

Теорема 3. Пусть h_1, h_2 – почти-решения в области $D \subset \mathbf{R}^n$ уравнения (3) с ограничениями (i), (ii) и (iv). Предположим, что h_1, h_2 удовлетворяют условию

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} (h_1(x) - h_2(x)) \leq 0, \quad x \in D, \quad x_0 \in \partial D$$

и имеют уклонения $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ соответственно.

Тогда либо $h_1 \leq h_2$ всюду в D , либо множество $O = \{x \in D: h_1(x) > h_2(x)\}$ пусто и имеет место (45). В частности, если область D ограничена или является k^{-1} -узкой на бесконечности, то для любого $r > 0$ выполнено

$$\int_{O \cap \{|x| < r\}} k(x) |A(x, \nabla h_1) - A(x, \nabla h_2)|^2 dH^n \leq \frac{M}{v} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (46)$$

Для разности решений уравнения газовой динамики близкое утверждение получено в [17], для почти-решений A -гармонических уравнений – в [8, разд. 7.1.2].

2.3. Положим

$$\lambda_k(O) = \inf_{u_1, u_2} \frac{\int_O k(x) |A(x, \nabla u_1) - A(x, \nabla u_2)|^2 dH^n}{\int_O k(x) |u_1 - u_2|^2 dH^n} \quad (47)$$

и $u_1, u_2 \in C^1(O) \cap C^0(\bar{O}), (u_1 - u_2)|_{\partial O} = 0$.

В описанных обозначениях имеем

$$\lambda_k(O) \int_O k(x) |h_1(x) - h_2(x)|^2 dH^n \leq \int_O k(x) |A(x, \nabla h_1) - A(x, \nabla h_2)|^2 dH^n$$

и неравенство (45) принимает вид

$$\lambda_k(O) \int_{O \cap B(0,r)} k(x) |h_1 - h_2|^2 dH^n \leq C_1(s)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + C_2(s) \text{cap}_{k^{-1}}(O_r, O_R; D).$$

Если же область D ограничена либо является k^{-1} -узкой в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbf{R}^n$, то

$$\int_{O \cap B(0,r)} k(x) |h_1 - h_2|^2 dH^n \leq \frac{M}{v} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) / \lambda_k(O).$$

В случае, когда h_1, h_2 суть решения, т.е. уклонения $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0$, мы имеем

$$\int_O k(x) |h_1(x) - h_2(x)|^2 dH^n = 0.$$

Отсюда, если $k(x) > 0$ почти всюду, то $h_1(x) \equiv h_2(x)$, и мы приходим к стандартной форме принципа максимума. Другими словами, свойство (46) для почти-решений представляет собой некоторую специальную форму принципа максимума.

Эффективные оценки снизу для величины (47) представляют собой весьма нетривиальную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford etc.: Clarendon Press, 1993. 363 p.
2. *Миклюков В.М.* А-решения с особенностями как почти-решения // Матем. сб. 2006. Т. 197. Вып. 11. С. 31 – 50.
3. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1969. 760 с.
4. *Миклюков В.М.* Введение в негладкий анализ. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2006. 284с.
5. *Miklyukov V.M., Vuorinen M.K.* A generalized maximum principle for the differences of p -harmonic functions on Riemannian manifolds // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 401 – 413.
6. *Miklyukov V.M., Rasila A., Vuorinen M.K.* Three spheres theorem for p -harmonic functions // Houston J. Math. 2007. V. 33. No. 4. P. 1215 – 1230.
7. *Byström J.* Sharp constants for some inequalities connected to the p -Laplace operator // J. Inequalities in Pure and Appl. Math. 2005. V. 6. No. 2. P. 1 – 8.
8. *Миклюков В.М.* Геометрический анализ. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2007. 532 с.
9. *Миклюков В.М.* Об одном новом подходе к теории Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности // Матем. сб. 1979. Т. 108(150). С. 268 – 289; См. также: Научные школы Волгоградского государственного ун-та. Геометрический анализ и его приложения: Сб. статей. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 1999. С. 22 – 51.
10. *Hwang J.F.* Comparison principles and theorems for prescribed mean curvature equation in unbounded domains // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1988. V. 15. P. 341 – 355.
11. *Hwang J.F.* A uniqueness theorem for the minimal surface equation // Pacific J. Math. 1996. V. 176. P. 357 – 364.
12. *Collin P., Krust R.* Le problème de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales sur des domaines non bornés // Bull. Soc. Math. France. 1991. V. 119. P. 443 – 458.
13. *Pigola S., Rigoli M., Setti A.G.* Some remarks on the prescribed mean curvature equation on complete manifolds // Pacific J. Math. 2002. V. 206. No. 1. P. 195 – 217.
14. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961. 208 с.
15. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
16. *Klyachin V.A., Kochetov A.V., Miklyukov V.M.* Some elementary inequalities in gas dynamics equation // Reports of the Department of Mathematics, University of Helsinki, Preprint 402. 2004. 26 p.; J. Inequal. and Appl. 2006. Article ID 21693. 29 p.
17. *Кочетов А.В., Миклюков В.М.* «Слабая» теорема типа Фрагмена – Линделефа для разности решений уравнения газовой динамики // Сибирск. журн. промышленной математики. 2006. Т. IX. №. 3. С. 90 – 101.

Принята в печать 29.11.07.