УДК 519.48

Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина

КОНСТРУКЦИЯ БЕСКОНЕЧНО УЗКОГО ДВУМЕРНО УПОРЯДОЧЕННОГО ПОЛЯ

Исходя из заданного линейно упорядоченного поля строится двумерно упорядоченное бесконечно узкое поле.

1. Постановка задачи

Пусть $\langle P_0, \leq\rangle$ есть линейно упорядоченное поле. Построим такое двумерно упорядоченное расширение K поля P_0, которое состоит из элементов, бесконечно близких к P_0, и элементов самого поля P_0.

Пусть (A,B) есть трансцендентное фундаментальное сечение в поле $\overset{\circ}{P}{}^u$. В топологическом замыкании $\tilde{P}_0$ поля P_0 сечение (A,B) порождает некоторый элемент. Обозначим его через a. Итак, $A < a < B$.

В поле $P_0(a)$ требуется задать двумерный порядок, такой, что $a \in \overset{\circ}{P}{}^u$.

2. Эвристические соображения

Пусть задача выполнена, в поле $P_0(a)$ задан двумерный порядок $\zeta(x, y, z)$, согласованный с алгебраическими операциями поля и такой, что $a \in \overset{\circ}{P}{}^u$.

Дадим краткую сводку сведении о функциях φ, ϕ в двумерно упорядоченном поле. Пусть $x \in P_0[a]$. Положим

$$\psi_a^-(x) = \{r \in P_0 \,|\, ra <_u x\},\ \psi_a^+(x) = \{r \in P_0 \,|\, x <_u ra\}.$$

Если ($\psi_a^-(x), \psi_a^+(x)$) есть фундаментальное сечение в P_0, то элемент из $\tilde{P}_0$, который производит это сечение, обозначим через $\psi_a(x)$.

Заметим, что если $p \in P_0$, то $\psi_a(p) = 0$.

Кроме этого, ψ_a – линейная функция, т.е.

$$\psi_a\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_a(c_k).$$

Отображение ϕ.

Пусть $x \in P_0[a]$. Положим

$$\phi^-(x) = \{r \in P_0 \,|\, r < x\},\ \phi^+(x) = \{r \in P_0 \,|\, x < r\}.$$

Если ($\phi^-(x), \phi^+(x)$) есть фундаментальное сечение в P, то элемент из $\tilde{P}_0$, который производит это сечение, обозначим через $\phi(x)$.

Имеет место следующая

Теорема [2]. Пусть P есть 2-упорядоченное поле без бесконечно малых относительно базы P_0. Если $a \in P$ есть предел последовательности элементов базы, a трансцендентно над P_0, $F(x) \in P_0[x]$, то имеет место равенство

$$\psi_a(F(a)) = F'(\phi(a)) = \phi(F'(a)). \qquad (1)$$

Равенство (1) позволяет задать верхний конус в кольце $P_0[a]$. В самом деле, если $x \in P_0[a]$, то $x = F(a)$ для некоторого $F(x) \in P_0[x]$.

Поэтому $\phi_u(x) = \psi_a(F(a)) = F'(\phi(a)) = \phi(F'(a))$. Отсюда заключаем: $x \in \overset{\circ}{P}{}^u$, если и только если $F'(a) > 0$. Так же $x \in (-\overset{\circ}{P}{}^u)$, если и только если $F'(a) < 0$. Случай $F'(a) = 0$ невозможен, так как a трансцендентно над P_0 по условию.

К сожалению, описанный метод позволяет построить верхний конус двумерного порядка только в кольце $P_0[a]$, но не во всём поле $P_0(a)$.

3. Конструкция двумерного порядка в поле $P_0(a)$

1) Тем не менее, удаётся задать двумерный порядок и на поле $P_0(a)$. Обозначим, краткости ради, $K = P_0(a)$ Пусть $x \in K$. Тогда $x = F_1(a)F_2^{-1}(a)$, где $F_i(x) \in P_0[x]$.

Обозначим через K^u множество тех и только тех $x \in K$, для которых имеет место неравенство

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F_1(x)}{F_2(x)}\right) \geq 0 \text{ при } x = a.$$

Обозначим через $-K^u$ множество тех и только тех $x \in K$, для которых имеет место неравенство

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F_1(x)}{F_2(x)}\right) \geq 0 \text{ при } x = a.$$

Иначе, K^u есть множество тех и только тех $x \in K$, для которых выполнено неравенство

$$\frac{F_1'(a)}{F_1\ (a)} \geq \frac{F_2'(a)}{F_2(a)}. \tag{3}$$

Обозначим, как ранее, $\overset{\circ}{K}{}^u = K^u \setminus (-K^u)$. Легко видеть, что $x \in \overset{\circ}{K}{}^u$, если и только если

$$\frac{F_1'(a)}{F_1\ (a)} > \frac{F_2'(a)}{F_2(a)}.$$

Так же $x \in (-\overset{\circ}{K}{}^u)$, если и только если

$$\frac{F_1'(a)}{F_1\ (a)} < \frac{F_2'(a)}{F_2(a)}.$$

2) В [1] доказан следующий критерий верхнего конуса двумерного порядка в поле.

Теорема. Пусть P есть поле характеристики нуль, P^u – его подмножество. Обозначим $P_0 = P^u \cap (-P^u)$, $\overset{\circ}{P}{}^u = P^u \setminus (-P^u)$. Для того чтобы P^u было верхним конусом 2-порядка на поле P, необходимо и достаточно выполнение следующих 4 условий.

(a) $P^u + P^u = P^u$;

(b) $P^u \bigcup -P^u = P$;

(c) $(P^u \setminus \{0\})^{-1} = -P^u \setminus \{0\}$;

(d) если $a, c \in P^u$, $b \in \overset{\circ}{P}{}^u$, $ba^{-1}, cb^{-1} \in P^u$, то $ca^{-1} \in P^u$.

Задание верхнего конуса единственным образом определяет 2-порядок в поле P [1].

Убедимся, что K^u есть верхний конус 2-порядка в поле K.

3) Проверим замкнутость множества K^u относительно сложения. Пусть $x, y \in K^u$. Тогда

$$x = \frac{F_1(a)}{F_2(a)}, \quad \frac{d}{dx}\frac{F_1(x)}{F_2(x)} \geq 0 \quad \text{при } x = a.$$

Точно так же

$$y = \frac{G_1(a)}{G_2(a)}, \ \frac{d}{dx}\frac{G_1(x)}{G_2(x)} \geq 0 \text{ при } x = a,$$

где $F_i(x)$, $G_i(x) \in P_0[x]$. Но тогда имеем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F_1(x)}{F_2(x)} + \frac{G_1(x)}{G_2(x)}\right) \geq 0 \ \text{ при } x = a.$$

Значит, $(x + y) \in K^u$.

Условие (b) выполнено. В самом деле, пусть

$$x \in K, x = \frac{F_1\ (a)}{F_2\ (a)}.$$

Если $\dfrac{F_1'(a)}{F_1\ (a)} \geq \dfrac{F_2'(a)}{F_2(a)}$, то $x \in K^u$. Если же $\dfrac{F_1'(a)}{F_1\ (a)} \leq \dfrac{F_2'(a)}{F_2(a)}$, то $x \in (-K^u)$.

Точно так же проверяется и условие (c).

Докажем, что условие (d) для K^u также выполнено. Пусть $x, z \in K^u$, $y \in \overset{\circ}{K^u}$, $yx^{-1}, zy^{-1} \in K^u$. Тогда

$$x = \frac{F_1(a)}{F_2(a)}, \ y = \frac{G_1(a)}{G_2(a)}, \ z = \frac{H_1(a)}{H_2(a)}.$$

Так как $x, z \in K^u$, $y \in \overset{\circ}{K^u}$, то

$$\frac{F_1'(a)F_2(a) - F_1(a)F'_2(a)}{F_2^2(a)} \geq 0.$$

Отсюда

$$\frac{F_1\ '(a)}{F_1(a)} \geq \frac{F_2\ '(a)}{F_2(a)}, \quad \frac{G_1\ '(a)}{G_1(a)} > \frac{G_2\ '(a)}{G_2(a)}, \quad \frac{H_1\ '(a)}{H_1(a)} \geq \frac{H_2\ '(a)}{H_2(a)}. \tag{4}$$

Не уменьшая общности, будем считать, что выполнены неравенства

$$F_i(a) > 0, \quad G_i(a) > 0, \quad H_i(a) > 0. \tag{5}$$

Далее, из условий yx^{-1}, $zy^{-1} \in K^u$, следует

$$\frac{(H_1G_2)'}{H_1G_2} \geq \frac{(H_2G_1)'}{H_2G_1}, \quad \frac{(G_1F_2)'}{G_1F_2} \geq \frac{(G_2F_1)'}{G_2F_1}, \tag{6}$$

где производные вычисляются при $x = a$.

Из неравенств (4) – (6) следует неравенство $\frac{d}{dx}\frac{H_1F_2}{H_2F_1} \geq 0$ при $x = a$ (мы опускаем здесь технически сложный вывод). Но последнее неравенство означает, что $xz^{-1} \in P^u$. Итак, свойство (в) выполнено. Таким образом, в поле $P_0(a)$ эффективно задан нетривиальный двумерный порядок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пестов Г.Г.* Двумерно упорядоченные поля. Томск, 2003.
2. *Пестов Г.Г., Фомина Е.А.* Отображения ψ и φ // Вестник ТГУ. 2007. № 301. С. 94 – 96.

Принята в печать 04.12.07.