ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2007 Математика и механика № 1

УДК 517.54

Г.Д. Садритдинова

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ МОДУЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ НА КЛАССЕ *p*-СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе продолжается исследование задачи о границе областей значений функционалов на классах однолистных функций. Прослеживается путь нахождения экстремальных управляющих функций в уравнении Левнера для модуля производной на классе p-симметричных функций.

Экстремальная задача о границе областей значений функционалов на классах однолистных функций продолжает оставаться актуальной. Одним из эффективных инструментов решения вопросов, связанных с этой задачей, является параметрический метод.

Рассматривается функционал $I\left(f_p, z_0\right) = \left|f_p'(z_0)\right|$, где z_0 – фиксированная точка круга $E = \{z: |z| < 1\}$, не равная нулю, f_p принадлежит классу S_p, p=1,2,…, голоморфных в E функций $f_p(z) = z+...$, однолистно отображающих E на области, имеющие p-кратную симметрию вращения относительно начала, то есть таких, что

$$f_p\left(e^{i\frac{2\pi k}{p}} z\right) = e^{i\frac{2\pi k}{p}} f_p(z), \quad k = 1,2,\ldots, p-1.$$

Известно, что функции, на которых этот функционал принимает граничные значения, принадлежат плотному подклассу класса S_p функций вида

$$f_p(z) = \lim_{\tau\to\infty} e^{\tau}\varsigma(z,\tau),$$

где $\varsigma(z, \tau)$ – решение уравнения Левнера

$$\frac{d\varsigma}{d\tau} = -\varsigma\frac{\mu^p(\tau)+\varsigma^p}{\mu^p(\tau)-\varsigma^p}, \quad 0 \le \tau \le \infty, \quad \varsigma(z, 0) = z\in E, \tag{1}$$

в котором управляющая функция $\mu(\tau)$ является гладкой, $|\mu(\tau)| = 1$.

Управляющие функции, приводящие к граничным функциям функционала, мы называем экстремальными управляющими функциями. Задача о нахождении таких функций для $\arg f'(z)$ решена И.А. Александровым и А.И. Александровым на классе S [1], Г.Д. Садритдиновой на классе S_p [2].

В работе прослеживается путь нахождения экстремальных управлений для функционала $I(f_p, z_0)$. Поскольку граничные значения этого функционала не зависят от $\arg z_0$, возьмем $z_0 = r$, $0 < r < 1$.

Выполняя некоторые преобразования над уравнением (1), приводим его к виду

$$\frac{d\ln\left(e^{\tau}\varsigma\right)}{d\tau} = -\frac{2\varsigma^p}{\mu^p-\varsigma^p}. \tag{2}$$

Дифференцируя (2) по z, получим

$$\frac{d}{d\tau}\ln\frac{\varsigma'}{\varsigma} = -\frac{2p\mu^p\varsigma^p}{(\mu^p-\varsigma^p)^2}. \tag{3}$$

Интегрируя (2) и (3) по τ, $0 < \tau < \infty$, приходим к равенствам

$$\ln\frac{f_p(z)}{z} = -2\int_0^\infty \frac{\varsigma^p(z,\tau)}{\mu^p(\tau)-\varsigma^p(z,\tau)}d\tau$$

и

$$\ln\frac{zf_p'(z)}{f_p(z)} = -2p\int_0^\infty \frac{\mu^p(\tau)\varsigma^p(z,\tau)}{\left[\mu^p(\tau)-\varsigma^p(z,\tau)\right]^2}d\tau, \ f_p \in S_p,$$

из которых при $z = r$ следует, что

$$\ln f_p'(r) = -2\int_0^\infty \left[\frac{\varsigma^p}{\mu^p-\varsigma^p} + \frac{p\mu^p\varsigma^p}{\left(\mu^p-\varsigma^p\right)^2}\right]d\tau.$$

Обозначив

$$|\varsigma(r,\tau)| = \rho(r,\tau),$$

$$\varsigma(r,\tau)\overline{\mu}(\tau) = \rho(r,\tau)\,y(r,\tau), \tag{4}$$

будем иметь

$$\ln f_p'(r) = -2\int_0^\infty \left[\frac{\rho^p y^p}{1-\rho^p y^p} + \frac{p\rho^p y^p}{\left(1-\rho^p y^p\right)^2}\right]d\tau.$$

В полученном интегральном представлении $\ln f_p'(r)$ заменим переменную τ на ρ по формуле

$$d\tau = -\frac{\left|1-\rho^p y^p\right|^2}{\rho\left(1-\rho^{2p}\right)}d\rho,$$

которая следует из уравнения (1) и указывает на монотонную зависимость ρ от τ, причем $\rho(r, 0) = r$, $\lim\limits_{\tau\to\infty}\rho(r,\tau) = 0$. Придем к равенству

$$\ln f_p'(r) = -2\int_0^r \left[y^p + \frac{p\left(y^p-\rho^p\right)}{1-\rho^p y^p}\right]\frac{\rho^{p-1}d\rho}{1-\rho^{2p}} + 2\int_0^r \frac{\rho^{2p-1}d\rho}{1-\rho^{2p}}. \tag{5}$$

Здесь по формуле $y = \left(\dfrac{i+t}{i-t}\right)^{\frac{1}{p}}$ вводим вещественнозначную функцию $t(r, \rho)$, делаем замену $\rho = \left(\dfrac{1-s}{1+s}\right)^{\frac{1}{p}}$ и получаем

$$\ln f_p'(r) = \int_\sigma^1 \left(\frac{1}{p}\frac{t+i}{t-i} + \frac{t+is}{t-is}\right)\frac{ds}{s} - \frac{1}{p}\ln\left(1-r^{2p}\right),$$

где $\sigma = \dfrac{1-r^p}{1+r^p}$. В этом равенстве легко выделяются вещественная и мнимая части.

Таким образом,

$$\ln\left[\left|f_p'(r)\right|\left(1-r^{2p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]=\int_{\sigma}^{1}g(s,t)\frac{ds}{s},$$

где $g(s,t)=\frac{1}{p}\frac{t^2-1}{t^2+1}+\frac{t^2-s^2}{t^2+s^2}$.

Уравнение $g_t'(s,t)=0$ имеет единственный вещественный корень $t = t_0(s) = 0$. Найденное значение t таково, что $g(s,t_0(s))=\min g(s,t)=-1-\frac{1}{p}$. Тогда при $t = 0$ функционал $I(f_p, r)$ принимает свое минимальное значение.

Для того чтобы подойти к максимуму данного функционала, введем в (5) вместо функции $y(r, \rho)$ вещественнозначную функцию $u(r, \rho)$ по формуле

$$y=\left(\frac{u-i}{u+i}\right)^{\frac{1}{p}}$$

и, заменив ρ на s, получим

$$\ln f_p'(r)=\int_{\sigma}^{1}\left[\frac{1}{p}\frac{i-u}{i+u}+\frac{i-su}{i+su}\right]\frac{ds}{s}-\frac{1}{p}\ln\left(1-r^{2p}\right).$$

Выделяя здесь вещественную и мнимую части, будем иметь

$$\ln\left[\left|f_p'(r)\right|\left(1-r^{2p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]=\int_{\sigma}^{1}\varphi(s,u)\frac{ds}{s},$$

где

$$\varphi(s,u)=\frac{1}{p}\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{1-s^2u^2}{1+s^2u^2}.$$

Уравнение $\varphi_t'(s,u)=0$ имеет единственный вещественный корень $u=u_0(s)=0$, причем

$$\varphi(s,u_0(s))=\max\varphi(s,u)=1+\frac{1}{p}.$$

Таким образом, при $u = 0$ функционал $I(f_p, r)$ принимает свое максимальное значение.

Укажем минимум и максимум функционала $I(f_p, r)$. Так как

$$\int_{\sigma}^{1}\left(-1-\frac{1}{p}\right)\frac{ds}{s}\le\ln\left[\left|f_p'(r)\right|\left(1-r^{2p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\le\int_{\sigma}^{1}\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{ds}{s},$$

то

$$\frac{1-r^p}{\left(1+r^p\right)^{1+\frac{2}{p}}}\le\left|f_p'(r)\right|\le\frac{1+r^p}{\left(1-r^p\right)^{1+\frac{2}{p}}}.$$

Поскольку $y = 1$ при $t = 0$, то, проинтегрировав уравнения

$$\frac{d\ln\rho}{d\tau}=-\frac{1-\rho^{2p}}{\left|1-\rho^p y^p\right|^2},\quad \rho(r,0)=r, \tag{6}$$

и
$$i\frac{d\arg f(r,\tau)}{d\tau}=-\frac{\rho^p\left(y^p-\overline{y}^p\right)}{\left|1-\rho^p y^p\right|^2},\quad \arg f(r,0)=0, \tag{7}$$

следующие из уравнения Левнера (1), при $y = 1$ с учетом формулы (4) находим $\mu(\tau) = 1$.

Решение уравнения (1) с найденной $\mu(\tau)$ имеет вид

$$\varsigma=\left[\frac{\left(1-\sqrt{1-4K_1(z)e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_1(z)e^{-p\tau}}\right]^{\frac{1}{p}},$$

где $K_1(z)=\dfrac{z^p}{\left(1+z^p\right)^2}$. Однозначная ветвь функции ς выбирается в соответствии с условием $\varsigma(z, \tau) = e^{-\tau}z +\ldots$. Таким образом,

$$f_p(z)=\lim_{\tau\to\infty}e^{\tau}\varsigma(z,\tau)=\left(K_1(z)\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{z}{\left(1+z^p\right)^{\frac{2}{p}}}\in S_p$$

– экстремальная функция для $I(f_p, z_0)$, на которой функционал достигает минимума.

При $u = 0$ получаем $y=(-1)^{\frac{1}{p}}$. Интегрируя уравнения (6) и (7) с $y=(-1)^{\frac{1}{p}}$, из формулы (4) находим $\mu(\tau)=(-1)^{\frac{1}{p}}$.

Уравнение Левнера (1) с такой $\mu(\tau)$ имеет решение вида

$$\varsigma=\left[\frac{\left(1-\sqrt{1+4K_2(z)e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_2(z)e^{-p\tau}}\right]^{\frac{1}{p}},\quad K_2(z)=\frac{z^p}{\left(1-z^p\right)^2},$$

однозначная ветвь которого выбирается в соответствии с условием

$$\varsigma(z, \tau) = e^{-\tau}z +\ldots$$

Тогда
$$f_p(z)=\lim_{\tau\to\infty}e^{\tau}\varsigma(z,\tau)=\left(K_2(z)\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{z}{\left(1-z^p\right)^{\frac{2}{p}}}$$

– функция класса S_p, дающая максимальное значение функционалу $I(f_p, z_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И.А., Александров А.И.* Экстремальные управляющие функции в уравнении Левнера в теореме вращения // ДАН. 2000. Т. 371. № 1. С. 7 – 9.
2. *Садритдинова Г.Д.* Управляющие функции и аргумент производной // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 78 – 80.

Принята в печать 11.09.07.