

УДК 514.76

Я.В. Славолюбова

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ПЯТИМЕРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ

В данной статье рассмотрены контактные метрические структуры на одной из пятимерных разрешимых групп Ли. Изучено шестипараметрическое семейство контактных метрических структур и исследованы их геометрические характеристики.

Ключевые слова: контактные многообразия, группы Ли, алгебры Ли, контактные структуры, контактные метрические структуры, структура Сасаки, К-контактные структуры.

1. Предварительные сведения

Напомним основные понятия о контактных многообразиях [1].

Определение 1. Дифференцируемое $(2n+1)$ -мерное многообразие M класса C^∞ называется контактным многообразием, если на нем задана дифференциальная 1-форма η , такая, что

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

всюду на M^{2n+1} .

Форма η называется контактной формой. Она определяет на многообразии M^{2n+1} распределение $D = \{X \in TM^{2n+1} \mid \eta(X) = 0\}$ размерности $2n$, которое называется контактным распределением. Кроме того, контактное многообразие M^{2n+1} имеет всюду ненулевое векторное поле, обозначаемое ξ , которое определяется следующими свойствами: $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$, для всех векторных полей X на M^{2n+1} . Векторное поле ξ определяет 1-мерное распределение, дополнительное к D . Векторное поле ξ называется *полем Рибба*, или характеристическим векторным полем контактной структуры.

Определение 2. Если M^{2n+1} – контактное многообразие с контактной формой η , то контактной метрической структурой называется четверка (η, ξ, φ, g) , где ξ – поле Рибба, g – риманова метрика и φ – аффином на M^{2n+1} , для которой имеют место следующие свойства:

- 1) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$,
- 2) $d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$,
- 3) $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$,

где I – тождественный эндоморфизм касательного расслоения.

Риманова метрика g контактной метрической структуры называется ассоциированной. Из третьего свойства сразу следует, что ассоциированная метрика для контактной структуры η полностью определяется аффином φ :

$$g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Поэтому мы ассоциированные метрики будем задавать аффином φ . Отметим также, что аффином φ действует как почти комплексная структура на контактном распределении D .

Контактная метрическая структура называется структурой Сасаки, если интегрируема почти комплексная структура J , определенная формулой $J(X, fd/dt) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)d/dt)$, где $X \in TM^{2n+1}$ и f – функция класса C^∞ на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$.

На контактом многообразии определены следующими выражениями четыре тензора [1] $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)}$:

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X, Y) &= [\varphi, \varphi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi, \quad N^{(2)}(X, Y) = (L_{\varphi X}\eta)(Y) - (L_{\varphi Y}\eta)(X), \\ N^{(3)}(X) &= (L_\xi \varphi)X, \quad N^{(4)}(X) = (L_\xi \eta)(X). \end{aligned}$$

Как известно [1], $N^{(3)}$ обращается в нуль, если и только если характеристическое векторное поле ξ является киллинговым относительно метрики g .

Пусть (η, ξ, φ, g) – контактная метрическая структура на контактном многообразии M^{2n+1} . Если характеристическое векторное поле ξ порождает группу изометрий, то есть ξ – векторное поле Киллинга относительно g , то такую контактную метрическую структуру называют K -контактной структурой [1].

Замечание. Контактная метрическая структура является K -контактной, если и только если $L_\xi \varphi = N^{(3)} = 0$ [1].

2. Пятимерные контактные группы Ли

Если в качестве многообразия рассматривается группа Ли G , то естественно рассматривать левоинвариантную контактную структуру. В этом случае контактная форма η , векторное поле Рибба ξ , аффинор φ и ассоциированная метрика g задаются своими значениями в единице $e \in G$, т.е. на алгебре Ли $L(G)$. Тогда линейная форма η на $L(G)$, вектор $\xi \in L(G)$, оператор φ на $L(G)$ и скалярное произведение g на $L(G)$ образуют контактную метрическую структуру (η, ξ, φ, g) на алгебре Ли $L(G)$. Аналогично определяется симплектическая алгебра Ли. Если ω – левоинвариантная симплектическая структура на группе Ли H , то значение 2-формы ω на алгебре Ли $L(H)$ представляет кососимметричную 2-форму на $L(H)$. Тогда пара $(L(H), \omega)$ называется симплектической алгеброй Ли.

Левинвариантные контактные структуры на группах Ли в настоящее время активно изучаются [2, 4]. Получены классификационные теоремы для групп Ли малой размерности. В работе [2] дана классификация всех пятимерных контактных групп Ли. Левинвариантные контактные структуры на группах Ли могут быть получены из левоинвариантных симплектических структур на группах Ли меньшей размерности. Напомним два классических метода контактизации.

Пусть $(L(H), \omega)$ – симплектическая алгебра Ли. Тогда пятимерная контактная алгебра Ли получается как центральное расширение $L(H) \times_{\mathbf{R}} \mathbf{R}\zeta_0$ алгебры $L(H)$ при помощи симплектической формы ω на $L(H)$. Скобки Ли задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} [x, \zeta_0]_{L(G)} &= 0 \text{ для любого } x \in L(H), \quad \zeta_0 \in Z(L(H)) = \mathbf{R}\zeta_0, \\ [x, y]_{L(G)} &= [x, y]_{L(H)} + \omega(x, y)\zeta_0 \text{ для любых } x, y \in L(H). \end{aligned}$$

Другой метод контактизации применяется для симплектических алгебр Ли $(L(H), \omega)$, у которых 2-форма ω является точной, $\omega = d\alpha$. Тогда пятимерная контактная алгебра Ли получается как прямое произведение $L(H) \oplus \mathbf{R}e_0$. Контактная форма η определяется следующим равенством: $\eta = \alpha + se_0^*$, где параметр $s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ и e_0^* – ковектор, дуальный к e_0 . Это случай, когда контактная алгебра Ли $(L(G), \eta)$ содержит симплектическую подалгебру Ли $(L(H), d\alpha)$ коразмерности 1.

Известно [2], что среди всех неразрешимых пятимерных групп Ли контактными являются только такие, у которых алгебра Ли является одной из следующих: 1) разложимые: $\text{aff}(\mathbf{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2)$, $\text{aff}(\mathbf{R}) \oplus \mathfrak{so}(3)$, 2) неразложимая: $\mathbf{R}^2 \times_{\rho} \mathfrak{sl}(2)$. В работе [5] построены контактные и контактные метрические структуры на данных алгебрах Ли и изучены их свойства.

Показано, что алгебра Ли $\mathbf{R}^2 \times_{\rho} \mathfrak{sl}(2)$ допускает K -контактную структуру Сасаки. В работе [6] построена K -контактная структура Сасаки на пятимерной группе Гейзенберга.

В работе [2] приведен полный список пятимерных разрешимых неразложимых алгебр Ли. Он насчитывает 24 различные группы Ли. Представляет интерес изучение контактных метрических структур на пятимерных группах Ли этого списка. В данной работе рассматриваются контактные метрические структуры на одной из неразложимых пятимерных групп Ли G_{14} классификационного списка [2]. Эта группа интересна тем, что ее контактная структура не получается классическими методами контактизации.

3. Контактные метрические структуры на группе Ли G_{14}

Рассмотрим алгебру Ли группы G_{14} , которая определяется следующими коммутационными соотношениями:

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_5] = e_1, \quad [e_2, e_5] = e_2, \quad [e_3, e_5] = e_4.$$

Контактная структура задается 1-формой

$$\eta = e_1^* + s e_4^* + \lambda e_2^* + \mu e_3^*,$$

где $s \neq 0$; λ, μ – любые действительные числа. Алгебра Ли $L(G_{14})$ группы Ли G_{14} имеет одномерный центр $Z(L(G_{14})) = \mathbf{R}e_4$. Данная алгебра Ли разрешимая, не является нильпотентной. Первый производный идеал $DL(G) = [L(G), L(G)]$ имеет базис e_1, e_2, e_4 . Второй производный идеал $D^2L(G) = [DL(G), DL(G)] = 0$. Алгебра Ли $L(G_{14})$ интересна тем, что она не содержит симплектических подалгебр коразмерности 1 и не является центральным расширением какой-либо четырехмерной симплектической подалгебры. Данная алгебра Ли $L(G_{14})$ содержит две двумерные симплектических подалгебры:

$$L(H)_1 = (\mathbf{R}\langle e_1, e_5 \rangle, \omega = de_1^*), \quad L(H)_2 = (\mathbf{R}\langle e_2, e_5 \rangle, \omega = de_2^*).$$

Для задания контактной структуры на $L(G_{14})$ используем построение трехмерной контактной алгебры Ли N из двумерной симплектической подалгебры Ли $L(H)_1$. Для алгебры Ли $L(H)_1$ контактной формой на N , например, является 1-форма $\eta = e_1^* + s e_4^*$, где $s \neq 0$, а для $L(H)_2$ – форма $\eta = e_2^* + s e_4^*$, где $s \neq 0$. За основу возьмем первый случай.

На двумерном дополнении алгебры N зададим двухпараметрическое семейство 1-форм вида $\lambda e_2^* + \mu e_3^*$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. В результате контактная структура на всей пятимерной алгебре Ли $L(G_{14})$ задается левоинвариантной 1-формой $\eta = e_1^* + s e_4^* + \lambda e_2^* + \mu e_3^*$, где $s \neq 0$, λ, μ – любые действительные числа (соответственно 1-формой $\eta = e_2^* + s e_4^* + \lambda e_1^* + \mu e_3^*$, где $s \neq 0$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, в случае построения на основе алгебры Ли $L(H)_2$). Это легко видеть из условия $\eta \wedge (d\eta)^2 = -2s e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_5^* \neq 0$.

Пусть $\lambda = \mu = 0$, тогда $\eta = e_1^* + s e_4^*$. Дифференциал 1-формы η имеет вид $d\eta = -e_2^* \wedge e_3^* - e_1^* \wedge e_5^* - s e_3^* \wedge e_5^*$. Поле Рибба ξ имеет вид $\xi = e_4/s$. Легко видеть, что поле Рибба ξ лежит в центре алгебры Ли $\xi \in Z(L(G_{14}))$. Контактное распределение D порождают следующие векторы: $e_2, e_3, s e_2 + e_5, e_1 - e_4/s$.

Замечание. Любая 1-форма η вида $\eta = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \alpha_3 e_3^* + \alpha_4 e_4^* + \alpha_5 e_5^*$ является контактной, если $\alpha_1, \alpha_4 \neq 0$. Действительно, $\eta \wedge (d\eta)^2 = -\alpha_1^2 \alpha_4 e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_5^* \neq 0$.

Если мы выберем левоинвариантную риманову метрику g , относительно которой базис $e_1, \dots, e_5$ является ортонормированным, то мы не получим контактную метрическую структуру. Выберем другую левоинвариантную метрику g_0 на G_{14} , считая базис

$$E_1 = -e_2, E_2 = e_3, E_3 = se_2 + e_5, E_4 = e_1 - e_4/s, E_5 = e_4/s$$

ортонормированным, и вычислим ее различные характеристики. Базис контактного распределения составляют следующие векторы: E_1, E_2, E_3, E_4 . Скобки Ли имеют вид: $[E_1, E_2] = -E_4 - E_5$, $[E_1, E_3] = E_1$, $[E_2, E_3] = -sE_4$, $[E_3, E_4] = -E_4 - E_5$. Структурные константы: $C_{12}^4 = -1, C_{12}^5 = -1, C_{13}^1 = 1, C_{23}^4 = -s, C_{34}^4 = -1, C_{34}^5 = -1$. Контактная форма η и ее дифференциал $d\eta$ в новом базисе принимают следующий вид: $\eta = E_5^*, d\eta = E_1^* \wedge E_2^* + E_3^* \wedge E_4^*$. Очевидно, что поле Рибба $\xi = E_5$.

На контактной алгебре Ли можно определить аффинор ϕ , который обладает свойствами: $\phi^2|_D = -I$, $\phi\xi = 0$ и $\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$. Отметим, что такой аффинор задается неоднозначно. Аффинор ϕ_0 действует на базисных векторах E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 следующим образом: $\phi_0(E_1) = E_2, \phi_0(E_2) = -E_1, \phi_0(E_3) = E_4, \phi_0(E_4) = -E_3, \phi_0(E_5) = 0$. В результате получилась контактная метрическая структура $(\eta = E_5^*, \xi = E_5, \phi_0, g_0)$.

Теорема 1. Контактная метрическая структура $(\eta = E_5^*, \xi = E_5, \phi_0, g_0)$ является K -контактной структурой, но не является структурой Сасаки при любом значении параметра $s \neq 0$. Ассоциированная метрика g_0 имеет следующие характеристики: главные кривизны Риччи имеют значения: $\lambda_1 = -5/2, \lambda_2 = -(s^2/2 + 3), \lambda_3 = (-3 + (s^4 + 7s^2 + 1)^{1/2})/2, \lambda_4 = -(3 + (s^4 + 7s^2 + 1)^{1/2})/2, \lambda_5 = 1$; квадраты норм тензоров $N^{(1)}$, Риччи и Римана принимают значения: $\|N^{(1)}\|^2 = 8(s^2 + 1); \|Riem\|^2 = (11s^4 + 56s^2 + 175)/4; \|Ric\|^2 = (3s^4 + 26s^2 + 85)/4$. Скалярная кривизна имеет значение $S = -(s^2 + 15)/2$ и меняется в пределах от $-15/2$ до $-\infty$.

Секционные кривизны $K_{\{ij\}}$ метрики g_0 в направлении координатных площадок базиса $\{E_i\}$ имеют значения

$$\begin{aligned} K_{\{1,2\}} &= -3/2, \quad K_{\{1,3\}} = -1, \quad K_{\{1,4\}} = -3/4, \\ K_{\{2,3\}} &= -3s^2/4, \quad K_{\{2,4\}} = (s^2 + 1)/4, \quad K_{\{3,4\}} = (s^2 - 7)/4, \\ K_{\{1,5\}} &= 1/4, \quad K_{\{2,5\}} = 1/4, \quad K_{\{3,5\}} = 1/4, \quad K_{\{4,5\}} = 1/4. \end{aligned}$$

Матрица оператора тензора Риччи в базисе $\{E_i\}$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & \frac{s}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{s^2}{2} - 1 & 0 & \frac{3s}{2} & 0 \\ \frac{s}{2} & 0 & -\frac{s^2}{2} - \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3s}{2} & 0 & \frac{s^2}{2} - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все вычисления проведены в системе Maple. Файлы с программами вычислений можно найти на Web-сайте кафедры математического анализа КемГУ: <http://www.math.kemsu.ru/faculty/kma/>.

4. Ассоциированные пятимерные контактные группы Ли

Как уже отмечалось, для контактной формы η аффинов φ определяет ассоциированную метрику g по формуле $g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$. Мы будем рассматривать риманову метрику вида

$$g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y). \quad (1)$$

Зафиксируем метрику $g_0 = E_1^{*2} + E_2^{*2} + E_3^{*2} + E_4^{*2} + E_5^{*2}$.

Известно [3], что при выбранной ассоциированной метрике g_0 и аффиноре φ_0 каждый новый аффинов φ задается эндоморфизмом P , который обладает следующими свойствами:

- 1) P антикоммутирует с аффинором φ_0 , $P\varphi_0 = -\varphi_0 P$;
 - 2) P симметричен относительно метрики g_0 , соответствующей φ_0 , то есть матрица $P\varphi_0$ – симметричная;
 - 3) $I - P^2$ – невырожден.
- Тогда

$$\varphi = \varphi_0(I + P)(I - P)^{-1}.$$

Из свойств оператора P следует, что он имеет блочный вид $P = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix}$, где A, B, D – симметричные матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сначала несколько частных классов ассоциированных метрик, для которых аффинов φ задается матрицей P вида $P = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Тогда ассоциированные метрики и контактные метрические структуры могут быть найдены в явном виде и доступны для исследования.

Случай 1. Пусть оператор P имеет вид $P = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$, где $B = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}$. Тогда аффинов φ определяется тем, что $\varphi(E_5) = 0$, а на контактном распределении D он вычисляется на основе формулы $\varphi|_D = \varphi_0|_D(I + P)(I - P)^{-1}$ и задается матрицей

$$\varphi|_D = -\frac{1}{1 - u^2 - v^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 + u^2 + v^2 & 2v & -2u \\ -(1 + u^2 + v^2) & 0 & -2u & -2v \\ 2v & -2u & 0 & 1 + u^2 + v^2 \\ -2u & -2v & -(1 + u^2 + v^2) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Условие невырожденности $\det(I - P^2) = (1 - u^2 - v^2)^4 \neq 0$ принимает вид $u^2 + v^2 \neq 1$. Будем считать, что параметры u и v достаточно малые, сумма их квадратов меньше единицы. Соответствующая ассоциированная метрика определяется из (1). Получим выражение матрицы ассоциированной метрики в выбранном базисе $\{E_i\}$:

$$g_{ij} = d\eta_{ik} \varphi_j^k + \eta_i \eta_j.$$

Нетрудно заметить, что компоненты метрического тензора g на контактном распределении определяются равенством $g_{ij}|_D = (d\eta)_{ik} \varphi_j^k$.

В результате вычислений в системе Maple компоненты блока $g|_D$ ассоциированной метрики $g = \begin{pmatrix} g|_D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, соответствующей вышеприведенному аффинору $\varphi(2)$, получились следующие:

$$g|_D = \frac{1}{1-u^2-v^2} \begin{pmatrix} 1+u^2+v^2 & 0 & 2u & 2v \\ 0 & 1+u^2+v^2 & 2v & -2u \\ 2u & 2v & 1+u^2+v^2 & 0 \\ 2v & -2u & 0 & 1+u^2+v^2 \end{pmatrix}.$$

Вычислены секционные кривизны $K_{\{ij\}}$ в направлении координатных площадей векторов базиса $\{E_i\}$.

Случай 2. Пусть оператор P имеет вид $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$. Тогда аффинор φ , ассоциированная метрика g задаются матрицами

$$\varphi|_D = \begin{pmatrix} \frac{-2b}{1-a^2-b^2} & \frac{-((1-a)^2+b^2)}{1-a^2-b^2} & 0 & 0 \\ \frac{(1+a)^2+b^2}{1-a^2-b^2} & \frac{2b}{1-a^2-b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2y}{1-x^2-y^2} & \frac{-((1-x)^2+y^2)}{1-x^2-y^2} \\ 0 & 0 & \frac{(1+x)^2+y^2}{1-x^2-y^2} & \frac{2y}{1-x^2-y^2} \end{pmatrix},$$

$$g_{ij}|_D = \begin{pmatrix} \frac{(1+a)^2+b^2}{1-a^2-b^2} & \frac{2b}{1-a^2-b^2} & 0 & 0 \\ \frac{2b}{1-a^2-b^2} & \frac{(1-a)^2+b^2}{1-a^2-b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+x)^2+y^2}{1-x^2-y^2} & \frac{2y}{1-x^2-y^2} \\ 0 & 0 & \frac{2y}{1-x^2-y^2} & \frac{(1-x)^2+y^2}{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим также отдельно два частных случая.

Случай 2.1. Пусть оператор P имеет вид $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Тогда аффинор φ задается матрицей

$$\varphi|_D = -\frac{1}{1-a^2-b^2} \begin{pmatrix} 2b & b^2+(1-a)^2 & 0 & 0 \\ -b^2-(1+a)^2 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2-b^2 \\ 0 & 0 & -(1-a^2-b^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие невырожденности: $\det(I-P^2) = (1-a^2-b^2)^2 \neq 0$, $a^2+b^2 \neq 1$, где параметры a и b достаточно малые, сумма их квадратов меньше единицы.

Ассоциированная метрика g задается матрицей следующего вида:

$$g_{ij}|_D = \frac{1}{1-a^2-b^2} \begin{pmatrix} b^2 + (1+a)^2 & 2b & 0 & 0 \\ 2b & b^2 + (1-a)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2-b^2 \end{pmatrix}.$$

Секционные кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении координатных площадок векторов базиса $\{E_i\}$ принимают следующие значения:

$$K_{\{1,2\}} = -\frac{3w^2 - 6w - 2b^2 + 3}{2(w-1)^2}, \quad K_{\{1,3\}} = -\frac{w^2 - 3w + a^2 + 1}{(w-1)^2},$$

$$K_{\{1,4\}} = -\frac{3}{4}, \quad K_{\{1,3\}} = -\frac{(w+b-1)(w-b-1)}{(w-1)^2},$$

$$K_{\{2,3\}} = -\frac{-3s^2w^3 + 9s^2w^2 - w(4b^2 + 9s^2) + 3s^2 + 8ab^3 - 4b^2}{4(w-1)^2(w-2a+1)},$$

$$K_{\{2,4\}} = -\frac{w(s^2-1)-s^2+2a-1}{4(w-2a+1)}, \quad K_{\{3,4\}} = -\frac{w(s^2+7)+2s^2a+s^2-7}{4(w-1)},$$

где $w = a^2 + b^2$.

Скалярная кривизна

$$S = \frac{w^2(s^2-15) + w(2s^2a+30) - 4b^2 - 2s^2a - s^2 - 15}{2(w-1)^2},$$

где $w = a^2 + b^2$.

Случай 2.2. Пусть оператор P имеет вид $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, где $D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$. Тогда

аффинор Φ задается матрицей

$$\Phi|_D = -\frac{1}{1-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 0 & 1-x^2-y^2 & 0 & 0 \\ -(1-x^2-y^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y & y^2+(1-x)^2 \\ 0 & 0 & -(y^2+(1+x)^2) & -2y \end{pmatrix}.$$

Условие невырожденности: $\det(I - P^2) = (1 - x^2 - y^2)^2 \neq 0$, $x^2 + y^2 \neq 1$. Предполагаем, что параметры x и y достаточно малые, сумма их квадратов меньше единицы.

Ассоциированная метрика g задается следующей матрицей:

$$g|_D = \frac{1}{1-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1-x^2-y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x^2-y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y^2+(1+x)^2 & 2y \\ 0 & 0 & 2y & y^2+(1-x)^2 \end{pmatrix}.$$

Секционные кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении координатных площадок векторов базиса $\{E_i\}$ принимают следующие значения:

$$K_{\{1,2\}} = -\frac{3(x-1)}{2(w-1)}, \quad K_{\{1,3\}} = \frac{w^2 - 2w + 3y^2 + 1}{(w-1)(w+2x+1)}, \quad K_{\{1,4\}} = \frac{3(w-2x+1)}{4(w-1)},$$

$$K_{\{2,3\}} = - \frac{\left(3s^2 w^3 + w^2(-6s^2 x - 3s^2) + w(-4s^2 y^2 + 12s^2 x + 4y^2 - 3s^2) + \right. \\ \left. + 8y^2 xs - 6s^2 x - 4s^2 y^2 - 8s^2 x^3 + 3s^2 - 4y^2 \right)}{4(w-1)^2(w+2x+1)},$$

$$K_{\{2,4\}} = - \frac{w^2(1-s^2) + w(4s^2 x - 2x - 6s^2) + 4y^2 s^2 + 4s^2 x - s^2 + 2x - 1}{4(w-1)^2},$$

$$K_{\{3,4\}} = \frac{w^2(s^2+1) + w(-4s^2 x - 8x + 6s^2 + 6) + 8x + s^2 - 4s^2 y^2 - 7 - 4s^2 x}{4(w-1)^2},$$

где $w = x^2 + y^2$.

Скалярная кривизна

$$S = - \frac{w^2(s^2 - 1) + w(-4s^2 x + 6s^2 + 26x - 4) + 15 + s^2 - 4s^2 y^2 - 26x - 4s^2 x}{2(w-1)^2},$$

где $w = x^2 + y^2$.

В общем случае для любой ассоциированной метрики вида

$$g(X, Y) = d\eta(\phi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

имеет место

Теорема 2. Любая контактная метрическая структура $(\eta = E_5^*, \xi = E_5, \phi, g)$ является K -контактной, но не является структурой Сасаки при любом значении параметра $s \neq 0$ и при любых значениях параметров a, b, u, v, x, y .

Все вычисления проведены в системе Maple. Файлы с программами вычислений можно найти на Web-сайте кафедры математического анализа КемГУ: <http://www.math.kemsu.ru/faculty/kma/>. В этих файлах приведены также выражения для тензоров Риччи ассоциированных метрик и другие характеристики ассоциированных метрик.

Аналогичные формулировки теорем получены и для остальных пятимерных разрешимых групп Ли классификационного списка [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Blair D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry // Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1976.
2. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups // arXiv: math. DG/0403555. V2. 24 Sep., 2004.
3. Смоленцев Н.К. Пространства римановых метрик // Математические известия. 2007. Т. 142. № 5. С. 2436 – 2519.
4. Khakimdjano Yu, Goze M., Medina A. Symplectic or contact structures on lie groups // arXiv: math. DG/0205290. V1. 28 May, 2002.
5. Славолубова Я.В. // Труды Международной научно-практической конференции «Математическое образование в регионах России». Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2007. С. 44 – 50.
6. Славолубова Я.В. Левинвариантные контактные метрические структуры на пятимерной группе Ли Гейзенберга // Вестник КемГУ. 2006. № 4(28). С. 24 – 30.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

СЛАВОЛЮБОВА Ярославна Викторовна, аспирантка кафедры математического анализа Кемеровского государственного университета. E-mail: jar1984@mail.ru

Статья принята в печать 25.04.2009 г.