

УДК 512.541

А.Р. Чехлов

ОБ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ, ВСЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ИДЕАЛАМИ

Описаны абелевы группы, все подгруппы которых являются идеалами в каждом кольце, заданном на группе. Найдены условия на типы прямых слагаемых ранга 1 сепарабельных и векторных групп без кручения, при которых эти группы являются нильгруппами.

Ключевые слова: аддитивные группы колец, нильгруппы.

Описанию подгрупп абелевой группы A , являющихся идеалами в каждом кольце, заданном на A , посвящена статья [1]. Под кольцом подразумевается не обязательно ассоциативное кольцо с 1, но умножение всегда считается дистрибутивным с двух сторон. Положим $I(A) = \langle \varphi A \mid \varphi \in \text{Hom}(A, E(A)^+) \rangle$, т.е. $I(A)$ – подгруппа, порожденная всеми гомоморфными образами группы A в аддитивную группу $E(A)^+$ кольца эндоморфизмов $E(A)$ группы A . Несложно проверить, что $I(A)$ – идеал кольца $E(A)$ [1, лемма 1].

Теорема 1 [1, теорема 1]. Подгруппа C группы A служит идеалом в каждом кольце на группе A тогда и только тогда, когда C является $I(A)$ -допустимой подгруппой, т.е. $I(A)C \subseteq C$.

Результаты статьи [1] отражены в [2, § 117]. Отметим также, что аддитивным группам колец посвящена книга [3].

В данной заметке рассматриваются абелевы группы A , все подгруппы которых являются идеалами в каждом кольце, заданном на A . Обозначим класс таких групп через M . Терминология и обозначения соответствуют [2]. Напомним, что подгруппа H группы A называется *вполне инвариантной* (или *вполне характеристической*), если $fH \subseteq H$ для каждого $f \in E(A)$. Через $\mathbf{Z}$ обозначается аддитивная группа (а также кольцо) целых чисел, $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел.

Напомним, что функция $\mu: A \times A \rightarrow A$ называется *умножением* на группе A , если

$$\mu(a, b+c) = \mu(a, b) + \mu(a, c) \text{ и } \mu(b+c, a) = \mu(b, a) + \mu(c, a) \text{ для всех } a, b, c \in A.$$

Всякое кольцо на группе A задает некоторое умножение μ , а именно $\mu(a, b) = ab$, и это соответствие между кольцевыми структурами и умножениями на группе A биективно. Если μ и ν – умножения на группе A , то их сумма $\mu + \nu$ определяется по правилу

$$(\mu + \nu)(a, b) = \mu(a, b) + \nu(a, b) \text{ для всех } a, b \in A.$$

Относительно введенной операции сложения умножения на группе A образуют абелеву группу, *группу умножений* на A , $\text{Mult } A$. Всякая группа A может быть тривиальным образом снабжена кольцевой структурой, если все произведения ее элементов положить равными 0. Такое кольцо называется *нуль-кольцом*. Нуль группы $\text{Mult } A$ – это умножение, соответствующее нуль-кольцу на A . Группа A называется *нильгруппой* [2, § 120], если на A не существует никаких колец, отлич-

ных от нуля-кольца, т.е. $\text{Mult } A = 0$. Всякая периодическая делимая группа является нильгруппой [2, теорема 120.3]. Всякая нильгруппа не содержит ненулевых делимых подгрупп без кручения.

Непосредственно из теоремы 1 следует, что $A \in M$ в точности тогда, когда каждая ее подгруппа $I(A)$ -допустима. Ясно, что нильгруппы лежат в M . Поскольку группа без кручения ранга 1 не является нильгруппой тогда и только тогда, когда ее тип идемпотентен [2, теорема 121.1], то все группы без кручения ранга 1 неидемпотентного типа принадлежат M . Если $pA = A$ для некоторого простого числа p и группа $A \in M$ имеет подгруппы H со свойством $p^{\omega}H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n H = 0$, то H содержится в аннуляторе всякого кольца на A . В частности, группа без кручения ранга 1 идемпотентного типа принадлежит M тогда и только тогда, когда $A \cong \mathbb{Z}$. Ясно, что прямые слагаемые группы из M также принадлежат классу M . Из вышесказанного следует, что группа из класса M не содержит ненулевых делимых подгрупп без кручения; в частности, делимая группа принадлежит M тогда и только тогда, когда она периодическая, а всякая группа без кручения из M является редуцированной. Отметим еще, что для каждой группы A имеют место изоморфизмы:

$$\text{Mult } A \cong \text{Hom}(A \otimes A, A) \cong \text{Hom}(A, E(A)^+) [2, \text{теорема 118.1}].$$

Теорема 2. 1) Периодическая группа $A \in M$ тогда и только тогда, когда каждая ее p -компонента A_p является либо циклической группой, либо делимой группой.

2) Группа без кручения $A \in M$ тогда и только тогда, когда она является либо нильгруппой, либо изоморфна группе $\mathbb{Z}$.

3) Всякая смешанная группа не принадлежит классу M .

Доказательство. Достаточность 1) и 2) очевидна.

1) Ясно, что можно ограничиться случаем p -группы A . Если A неделима, то в ней найдется циклическое прямое слагаемое $\langle a \rangle$, являющееся аддитивной группой кольца $\mathbb{Z}_{p^k}$ для некоторого натурального k . Имеем $A = \langle a \rangle \oplus B$. Определим кольцо

на A как сумму колец на $\langle a \rangle$ и нуля-кольца на B . Тогда для каждого $0 \neq b \in B$ имеем $a(ab) = a^2 + ab = a \notin \langle a+b \rangle$, это доказывает необходимость 1).

2) Допустим, что $ab \neq 0$ для некоторых $a, b \in A$. Так как $A \in M$, то $ab \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$. Следовательно, a и b – зависимые элементы в группе A . Если же $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 0$ для некоторого $0 \neq c \in A$, то $a(a+c) = a^2 + ac = a^2 \notin \langle a+c \rangle$. Это доказывает, что A – группа ранга 1. Согласно абзацу перед теоремой, $A \cong \mathbb{Z}$.

3) Так же, как в 1), доказывается, что всякая p -компонента группы A не содержит циклических прямых слагаемых. Поэтому допустим, что периодическая часть T группы A является делимой группой, $A = T \oplus B$. Как прямое слагаемое группы из класса M группа B также принадлежит M . Поэтому по 2) либо $B \cong \mathbb{Z}$, либо B является нильгруппой. Если $B \cong \mathbb{Z}$, то $b^2 = b$ для некоторого $0 \neq b \in B$. Определяя кольцо на A как сумму нуля-кольца на T и кольца на B , изоморфного $\mathbb{Z}$, для каждого $0 \neq a \in T$ получим $b(a+b) = b \notin \langle a+b \rangle$. Допустим теперь, что B – нильгруппа. Поскольку для смешанной группы G всегда $\text{Hom}(G \otimes G, G) \neq 0$, то $\text{Mult } G \neq 0$, т.е. всякая смешанная группа G не является нильгруппой [2, теорема 120.3]. Следовательно, для некоторых элементов $t_1, t_2 \in T$ и $b_1, b_2 \in B$ имеем $(t_1 + b_1)(t_2 + b_2) = t_1 t_2 + t_1 b_2 + b_1 t_2 + b_1 b_2 \neq 0$. Здесь $t_1 t_2 = 0$ (так как группа T делима), $t_1 b_2, b_1 t_2 \in T \cap B = 0$, а $b_1 b_2 \in \langle b_1 \rangle \cap \langle b_2 \rangle \subseteq B$. Поэтому $b_1 b_2 = 0$. Полученное противоречие заканчивает доказательство.

Напомним, что если t_1, t_2 – типы, содержащие характеристики $\chi_1 = (k_1, \dots, k_n, \dots)$ и $\chi_2 = (l_1, \dots, l_n, \dots)$ соответственно, то под *произведением* $t_1 t_2$ понимается тип, содержащий характеристику $\chi_1 \chi_2 = (k_1 + l_1, \dots, k_n + l_n, \dots)$ (здесь ∞ плюс нечто есть ∞). *Частное* $\chi_1 : \chi_2$ двух характеристик χ_1, χ_2 , где $\chi_1 \geq \chi_2$, определяют как наибольшую характеристику χ со свойством $\chi \chi_2 \leq \chi_1$. Если теперь $\chi_1 \in t_1$, $\chi_2 \in t_2$ и $\chi_1 \geq \chi_2$, то *частное* типов $t_1 : t_2$ определяется как тип, содержащий характеристику $\chi_1 : \chi_2$. Если A – сепарабельная группа без кручения, то через $\Omega(A)$ обозначим множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы A . Если $A = \prod_{i \in I} A_i$ – векторная группа, где A_i – группы без кручения ранга 1, то положим $\Omega(A) = \{t(A_i) \mid i \in I\}$. Приведем следующий результат.

Теорема 3. 1) Сепарабельная группа без кручения A является нильгруппой тогда и только тогда, когда $t_1 t_2 \not\leq \tau$ для любых $t_1, t_2, \tau \in \Omega(A)$.

2) Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$ – такая векторная группа, где A_i – группы без кручения ранга 1, что для каждого $i \in I$ множество $J_i = \{j \in I \mid t(A_j) \leq t(A_i)\}$ неизмеримо. Группа A является нильгруппой тогда и только тогда, когда $t_1 t_2 \not\leq \tau$ для любых $t_1, t_2, \tau \in \Omega(A)$.

Доказательство. Воспользуемся изоморфизмом $\text{Mult } A \cong \text{Hom}(A \otimes A, A) \cong \text{Hom}(A, E(A)^+)$ (см. абзац перед теоремой 2). Если A – группа из 1) или 2) с указанным свойством на $\Omega(A)$, то $t^2 \neq t$ для любого $t \in \Omega(A)$. Поэтому соответствующие подгруппы A_i ранга 1 являются нильгруппами, в частности всякая группа A в 1) и 2) редуцированная.

Пусть $a \in A \otimes A$, элемент a представим в виде конечной суммы $a = \sum (a_i \otimes b_i)$, где $a_i, b_i \in A$. Если A – сепарабельная группа, то элементы a_i и b_i можно вложить в прямую сумму $A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ групп ранга 1, являющуюся прямым слагаемым в A , $A = (A_1 \oplus \dots \oplus A_n) \oplus B$. Имеем

$$A \otimes A \cong (\oplus_{i,j=1}^n (A_i \otimes A_j)) \oplus (\oplus_{i=1}^n (A_i \otimes B) \oplus (B \otimes B)).$$

Переходя к изоморфной группе, считаем, что $a \in \oplus_{i,j=1}^n (A_i \otimes A_j)$. Здесь каждая $A_i \otimes A_j$ является группой без кручения ранга 1 типа $t(A_i)t(A_j)$. Из проведенных рассуждений следует, что $\text{Hom}(A \otimes A, A) = 0$ (и, значит, $\text{Mult } A = 0$) тогда и только тогда, когда $t(A_i)t(A_j) \not\leq t(A_s)$ для любых (в том числе и одинаковых) прямых слагаемых A_i, A_j, A_s ранга 1 группы A . Это доказывает 1).

Пусть теперь $A = \prod_{i \in I} A_i$ – векторная группа. Имеем $E(A)^+ = \text{Hom}(A, A) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(A, A_i)$ [2, теорема 43.2]. Запишем A в виде

$$A = (\prod_{j \in J_i} A_j) \oplus (\prod_{s \in I \setminus J_i} A_s), \text{ где } J_i = \{j \in I \mid t(A_j) \leq t(A_i)\}.$$

По лемме 96.1 из [2] $\text{Hom}(\prod_{s \in I \setminus J_i} A_s, A_i) = 0$. Поэтому $\text{Hom}(A, A_i) \cong \text{Hom}(\prod_{j \in J_i} A_j, A_i)$. А так как A – редуцированная группа, то все A_i – узкие группы, следовательно, $\text{Hom}(\prod_{j \in J_i} A_j, A_i) \cong \oplus_{j \in J_i} \text{Hom}(A_j, A_i)$ [2, следствие 94.5]. Здесь все $\text{Hom}(A_j, A_i)$ – группы ранга 1 типа $t(A_i) : t(A_j)$. Из вышесказанного следует, что $E(A)^+$ можно рассматривать как подгруппу такой векторной группы G , что $\Omega(G) = \{t(A_i) : t(A_j) \mid t(A_i) \leq t(A_j) \text{ и } i, j \in I\}$. Поэтому вновь по лемме 96.1 из [2] $\text{Hom}(A, E(A)^+) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $t(A_s) \leq t(A_i) : t(A_j)$ или, эквивалентно, $t(A_s)t(A_j) \leq t(A_i)$ для некоторых $i, j, s \in I$. Это доказывает 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fried E.* On the subgroups of an abelian group that are ideals in every ring // Proc. Colloq. Abelian Groups. Budapest, 1964. P. 51 – 55.
2. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
3. *Feigelstock S.* Additive Groups of Rings. Boston-London: Pitman, 1983.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Статья принята в печать 09.04.2009 г.