

УДК 612.13

А.М. Бубенчиков, Д.Б. Федин, А.С. Конончук

ТЕЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В СКРЕЩЕННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ¹

Произведены расчеты течения электропроводящей жидкости в прямоугольном канале, реализующегося под воздействием градиента давления и скрещенного электромагнитного поля. Описана математическая модель и представлена вычислительная технология. Выполнены расчеты с различным воздействием внешнего электрического поля.

Ключевые слова: *электропроводящая жидкость, электрическое поле, магнитная индукция, ламинарное течение.*

В ряде областей физики, механики и техники возникает необходимость изучения движений электропроводных жидкостей. К таким областям относится разработка магнитогидродинамических генераторов электрической энергии, электромагнитных насосов, используемых для перекачки жидких металлов, плазменных ускорителей. Течения в трубах являются наиболее распространенным классом движений, наблюдаемых в проточных трактах МГД-устройств. Важное прикладное значение, а также возможность получения точных и приближенных аналитических решений объясняют продолжающийся интерес к изучению магнитогидродинамических течений в трубах и каналах.

Физическая постановка задачи

Будем рассматривать течение вязкой электропроводящей жидкости на участке стабилизированного движения в канале прямоугольного сечения с непроводящими стенками, находящемся в поперечном электромагнитном поле (рис. 1).

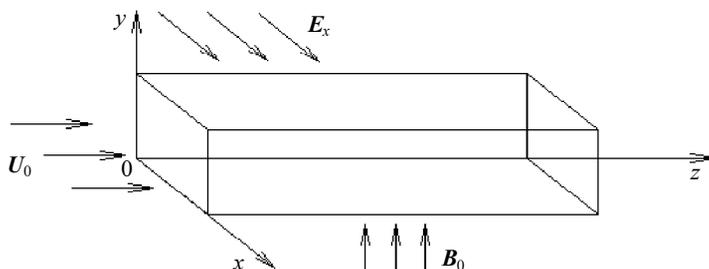


Рис. 1. Физическая область с гидроэлектромагнитными воздействиями (показано стрелками)

Здесь B_0 – вектор напряженности внешнего магнитного поля – задан и является постоянной величиной при переходе от точки к точке во внешности канала,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 08-01-00484-а).

U_0 – вектор скорости на входе в канал, E_x – постоянный вектор напряженности внешнего электрического поля.

Математическая модель

Теоретической основой для изучения установившихся МГД-течений являются векторные уравнения Навье – Стокса, неразрывности и стационарные уравнения Максвелла [1]:

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}; \quad \text{div } \mathbf{V} = 0; \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0; \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0; \quad \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, μ – ее вязкость, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, p – давление; \mathbf{V} , \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{j} – векторы скорости магнитной индукции, электрического напряжения и плотности электрического тока. Для замыкания системы (1), (2) необходимо добавить закон Ома, который обычно записывают в виде

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (3)$$

где σ – электропроводность жидкости. Взаимодействие электромагнитных и гидродинамических полей осуществляется через последнее слагаемое уравнения Навье – Стокса ($\mathbf{j} \times \mathbf{B}$), которое представляет собой пондеромоторную силу, или силу Лоренца.

Первое уравнение (2) представляет собой закон Ампера; второе – означает условие отсутствия магнитных зарядов в любой точке рассматриваемой среды; третье – условие потенциальности электрического поля; последнее – условие отсутствия электрических зарядов в рассматриваемой жидкой среде.

Выполнение третьего условия в (2) означает, что существует такая функция φ , что

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (4)$$

Другими словами, электрическое поле имеет скалярный потенциал φ .

Подставляя (4) в (3), найдем

$$\mathbf{j} = \sigma(-\text{grad } \varphi + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (3')$$

Теперь заменим векторную величину \vec{j} , стоящую в левой части последнего соотношения, используя закона Ампера, тогда получим

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = \sigma(-\text{grad } \varphi + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (5)$$

Взяв операцию div от обеих частей (5), найдем

$$\nabla^2 \varphi = \text{div}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (6)$$

При получении последнего уравнения использовано, что

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{a}) = 0, \quad \forall \mathbf{a},$$

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) \equiv \nabla^2 \varphi, \quad \forall \varphi.$$

Теперь вернемся к векторному уравнению Навье – Стокса и найдем проекцию этого уравнения на направление, параллельное вектору входной скорости, т.е. на направление оси Oz . Для этого, прежде всего, вычислим векторные произведения $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ и $(-\text{grad } \varphi + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$. Пусть вектор напряженности внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0 = \text{const}$ направлен по оси Oy , тогда в автомодельном потоке вектор индуцированного магнитного поля будет направлен вдоль оси Oz . А вектор магнитной индукции, входящий в уравнения магнитной гидродинамики (1), будет определяться компонентами $\mathbf{B} = (0, B_0, B)$, вектор же скорости в автомодельном течении есть $\mathbf{V} = (0, 0, U)$. Пусть также $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты стационарной декартовой системы отсчета, тогда

$$\mathbf{V} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & U \\ 0 & B_0 & B \end{vmatrix} = -iU \cdot B_0,$$

а также

$$\begin{aligned} (-\text{grad } \varphi + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\left(UB_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) & -\frac{\partial \varphi}{\partial y} & -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ 0 & B_0 & B \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} B_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} B \right) + \mathbf{j} \left(UB_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) B + \mathbf{k} \left(-UB_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \cdot B_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда проекция первого уравнения (1) на ось Oz с учетом (7) запишется следующим образом:

$$\mu \nabla^2 U = \frac{\partial p}{\partial z} + \sigma \left(UB_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \cdot B_0. \quad (8)$$

Как упоминалось выше, градиент давления в автомодельном течении в трубе определяется постоянной величиной. Выберем эту константу следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const} = \frac{-\Delta p}{l_0}.$$

Здесь Δp – перепад давления на длине l_0 , тогда вместо (8) получим

$$\mu \nabla^2 U = -\frac{\Delta p}{l_0} + \sigma \left(UB_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \cdot B_0. \quad (9)$$

Для заданной конфигурации векторных полей $\mathbf{V} = (0, 0, U)$, $\mathbf{B} = (0, B_0, B)$, $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ уравнение (6) перепишется в виде

$$\nabla^2 \varphi = -B_0 \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (10)$$

Уравнения (9) и (10) составляют основу математической модели рассматриваемых ниже процессов.

Обезразмеривание определяющих уравнений

Если в качестве масштабов скорости и электрического потенциала выбрать следующие величины [2]:

$$U_* = \frac{l_0 \Delta p}{\mu}, \quad \Phi_* = \frac{l_0 \Delta p}{(\mu \sigma)^{1/2}}, \quad (11)$$

а в качестве геометрического масштаба взять $x_* = y_* = z_* = l_0$ и перейти в уравнениях (9), (10) к безразмерным искомым величинам $\bar{U}, \bar{\Phi}$ по формулам

$$U = U_* \cdot \bar{U}, \quad \Phi = \Phi_* \cdot \bar{\Phi}, \quad (12)$$

то в безразмерной форме определяющие уравнения будут иметь вид

$$\nabla^2 U = -1 + \text{Ha}^2 U + \text{Ha} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \nabla^2 \Phi = -\text{Ha} \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (13)$$

Здесь и в дальнейшем по соображениям простоты черта над знаками функций скорости и электрического потенциала будет опущена; U – продольная компонента вектора скорости, Φ – потенциал индуцированного электрического поля; $\text{Ha} = l_0 B_0 (\sigma / \mu)^{1/2}$ – число Гартмана, определяющее порядок отношения электромагнитной силы (силы Лоренца) к силе вязкого трения.

Таким образом, мы получим систему двух уравнений, определяющих автомодельное МГД-течение, в котором неизвестными являются U и Φ . Можно получить иную систему, эквивалентную вышепостроенной, но неизвестными в ней будут U и B . Для этого возьмем операцию rot от обеих частей (5), спроецируем результат на ось Oz и обезразмерим полученное уравнение, приняв $B = B_* \bar{B}$, $B_* = \Delta p l_0 \mu_0 (\sigma / \mu)^{1/2}$. Тогда диффузионное уравнение для скорости, в источниковой части которого будет B , а также уравнение индукции (уравнение для B) будут иметь вид

$$\nabla^2 U = -\text{Ha} \frac{\partial B}{\partial y} - 1, \quad \nabla^2 B = -\text{Ha} \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (14)$$

Системы (13) и (14) являются самодостаточными на уровне уравнений и эквивалентными друг другу. Результаты сопоставления данных по скорости, найденной сначала по (13), а затем по (14) представлены ниже на рис. 6. Уравнения (13) удобны тем, что позволяют легко реализовать принцип суперпозиции электрических полей [3].

Граничные условия для решения этих уравнений будут следующие:

$$U|_{\gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\gamma} = 0, \quad B|_{\gamma} = 0. \quad (15)$$

Метод решения

Для аппроксимации всех производных, входящих в математическую постановку задачи, используем однородную регулярную ортогональную сетку (рис. 2) и двухсторонние симметричные разности второго порядка точности, выполненные на симметричном шаблоне (рис. 3). Далее подставляем их в МГД-уравнения и выражаем значения искомым функций в центральном узле шаблона. Используем эти формулы как основные рекуррентные соотношения метода простой итерации.

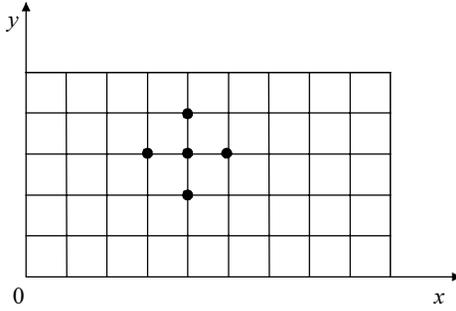


Рис. 2. Разностная сетка

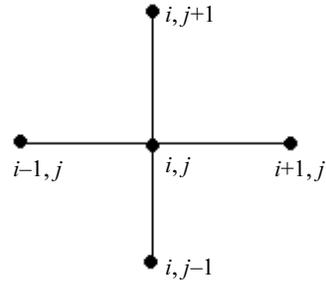


Рис. 3. Пятиточечный шаблон

Все дифференциальные уравнения математической модели имеют вид уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \Phi = b. \tag{16}$$

Здесь ∇^2 – плоский оператор Лапласа, $\Phi = U, B, \varphi$. В декартовых координатах

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}.$$

Таким образом, значения производных искомых функций в центральном узле шаблона могут быть аппроксимированы следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2); \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} + o(\Delta y^2); \tag{18}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2); \tag{19}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1}}{2\Delta y} + o(\Delta y^2). \tag{20}$$

Подставим полученные формулы в безразмерные определяющие уравнения (13), получим

$$U_{i,j} = \frac{\frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{\Delta y^2} - \text{Ha} \left(\frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2\Delta x} - E_x^{i,j} \right) + 1}{\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \text{Ha}^2}; \tag{21}$$

$$\varphi_{i,j} = \frac{\frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \text{Ha} \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta x}}{\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}}. \tag{22}$$

Для системы (14) будем иметь

$$U_{i,j} = \frac{\frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{\Delta y^2} - \text{Ha} \left(\frac{B_{i,j+1} - B_{i,j-1}}{2\Delta y} \right)}{\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}}; \quad (23)$$

$$B_{i,j} = \frac{\frac{B_{i+1,j} + B_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{B_{i,j+1} + B_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \text{Ha} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2\Delta y}}{\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}}. \quad (24)$$

Результаты решения уравнений

Предварительно было рассчитано течение непроводящей жидкости, т.е. случай $\text{Ha} = 0$, при этом получено (как результат вычислений) $|\varphi| < 10^{-4}$, $|B| < 10^{-4}$, а профили скорости U хорошо соответствуют аналитическим распределениям, представленным в [1].

Далее рассчитано собственно МГД-течение проводящей жидкости. На рис. 4 и 5 представлены поверхности скоростей и изолинии продольной компоненты скорости. Ниже на рис. 6 представлены результаты сопоставления скоростей, найденных с использованием двух различных форм уравнений.

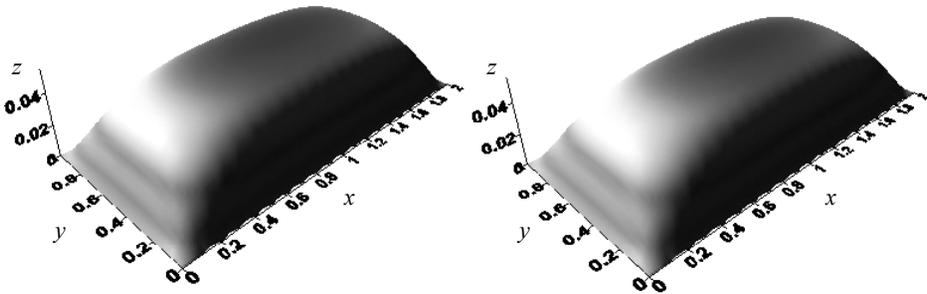


Рис. 4. Поверхность скорости при $\text{Ha} = 9$.

Слева – расчет по уравнениям (13), справа – по уравнениям (14)

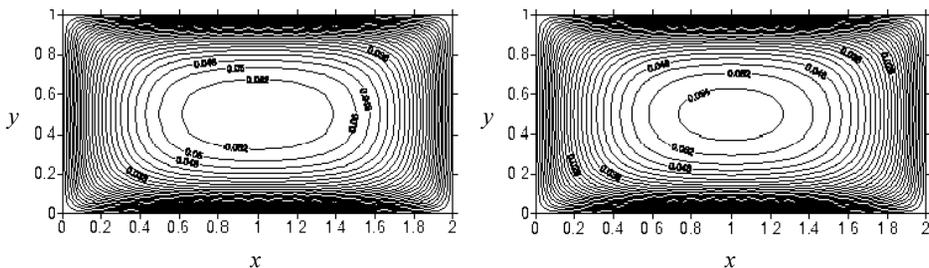


Рис. 5. Изолинии скорости при $\text{Ha} = 9$.

Слева – расчет по уравнениям (13), справа – по уравнениям (14)

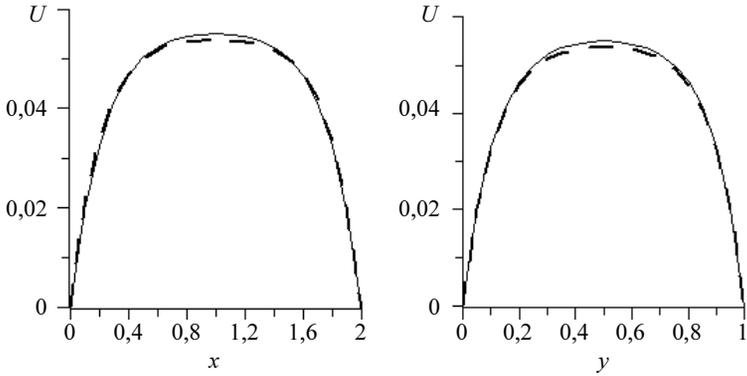


Рис. 6. Профили скоростей в сечениях, проходящих через центр канала параллельно осям Ox и Oy соответственно. Сплошная линия – расчет по уравнениям (13), пунктир – по уравнениям (14)

На рис. 7 – 10 представлена электромагнитная составляющая рассматриваемой МГД-задачи. Так, на рис. 7 и 8 – поверхность и изолинии потенциала индуцированного электрического поля; на рис. 9 и 10 – поверхность и изолинии магнитной индукции.

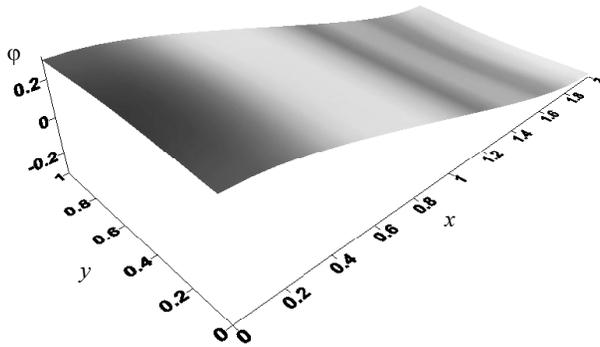


Рис. 7. Поверхность потенциала индуцированного электрического поля

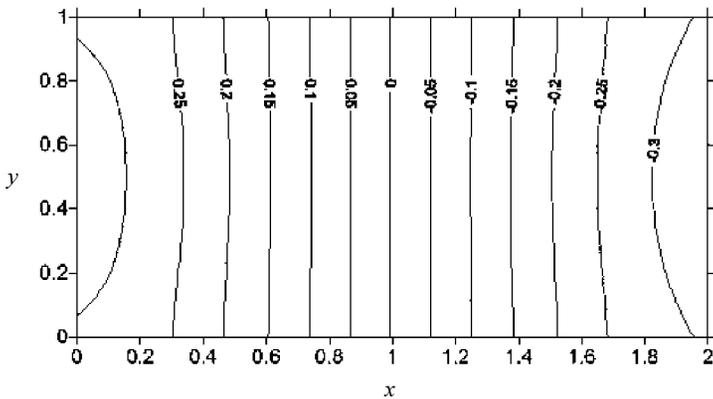


Рис. 8. Изолинии потенциала индуцированного электрического поля

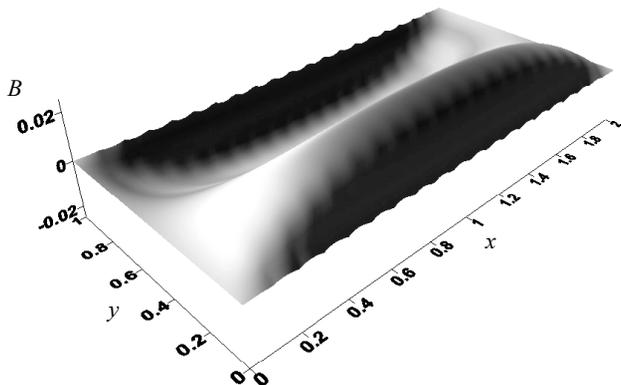


Рис. 9. Рассчитываемая компонента вектора магнитной индукции

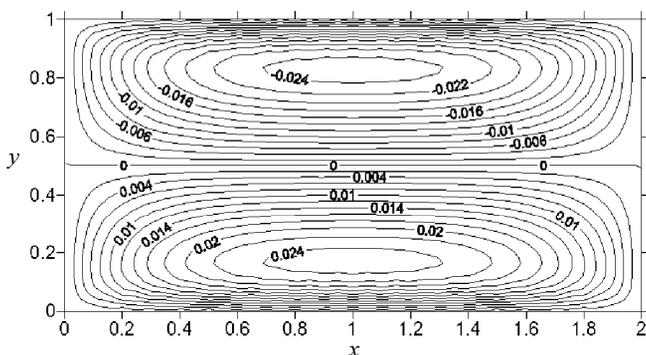


Рис. 10. Изолинии индуцированной магнитной индукции

Теперь покажем воздействие внешнего электрического поля на скорость и направление движения жидкости. Возьмем значения внешнего электрического поля, равные $-0,04, 0,04, 0,2$.

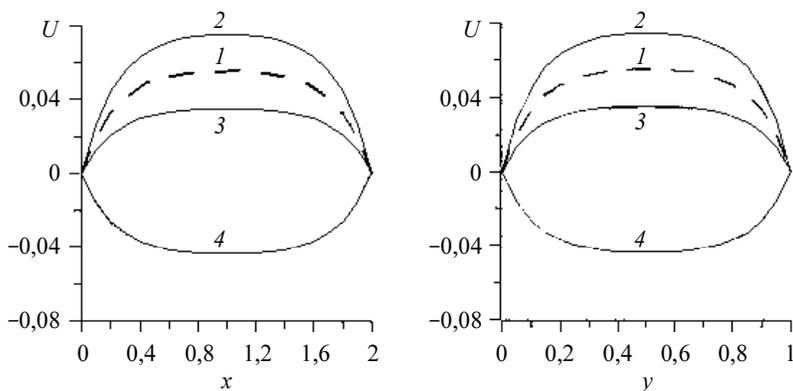


Рис. 11. Воздействие внешнего электрического поля на направление и скорость движения жидкости. На = 9. 1 - $E_x = 0$; 2 - $E_x = -0,04$; 3 - $E_x = 0,04$; 4 - $E_x = 0,2$

Из рис. 11 видно, что, воздействуя на электропроводящую жидкость внешним электромагнитным полем, можно управлять как величиной ее скорости, так и направлением ее движения.

Далее покажем, что полный ток в канале равен нулю. Формула для вычисления полного тока [2]:

$$I(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + U \right) dy = \text{const} = 0. \quad (25)$$

Интеграл находим численно при помощи формулы трапеций. В результате этого был получен следующий график (рис. 12).

Как видно на рис. 12, значения полного тока приближенно можно считать нулевыми. С увеличением количества точек повышается и точность решения, а абсолютные значения полного тока еще более уменьшаются.

Заключение

Таким образом, в работе построена математическая модель автомодельного МГД-течения проводящей жидкости в скрещенном электромагнитном поле. Предложен простейший вычислительный алгоритм решения данной задачи. Расчетами продемонстрирована возможность управления потоком вязкой, проводящей жидкости целенаправленным воздействием внешнего электромагнитного поля.

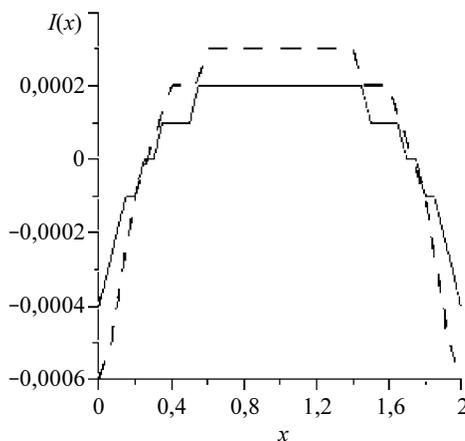


Рис. 12. Значения полного тока найденного по (25), при $Na = 9$. Пунктирная линия – расчет на сетке 30×30 . Сплошная линия – на сетке 40×40

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 607 с.
2. Тананаев А.В. Течения в каналах МГД-устройств. М.: Атомиздат, 1979. 368 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

БУБЕНЧИКОВ Алексей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической механики Томского государственного университета. E-mail: bubenchikov@mail.tomsknet.ru

ФЕДИН Дмитрий Борисович, аспирант кафедры теоретической механики Томского государственного университета. E-mail: dfedin@list.ru

КОНОЧУК Алексей Сергеевич, аспирант кафедры теоретической механики Томского государственного университета. E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

Статья принята в печать 04.09.2009 г.