

УДК 612.13

М.А. Бубенчиков, А.А. Бугаенко

**ТЕЧЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ
ЗАРЯЖЕННОГО ЦИЛИНДРА¹**

В работе построено аналитическое решение электростатической задачи о распределении электрического напряжения от заряженного кругового цилиндра. С использованием этого распределения численно решена магнито-гидродинамическая задача о течении вязкой электропроводящей жидкости в скрещенном электромагнитном поле с электрической составляющей, определенной однородно заряженным цилиндром.

Ключевые слова: магнитное поле, электрическое поле заряженного цилиндра, электропроводящая жидкость, автомодельное течение, канал прямоугольного сечения.

Основным результатом настоящей работы авторы считают аналитическое определение электрического напряжения во внутренних точках однородно заряженного бесконечного кругового цилиндра. Обычно электрическое напряжение вычисляется через градиент электрического потенциала, а для последнего имеется уравнение Пуассона, правая часть которого зависит от плотности объемного распределения зарядов в пространстве. Аналитическое решение задачи о распределении электрического потенциала от заряженного кругового цилиндра неизменно будет выражено через ряды по функциям Бесселя различных порядков, причем сами эти функции, как известно, имеют особенность в нуле. Если же отказаться от нахождения электрического потенциала и попытаться вычислить электрическое напряжение, исходя непосредственно из определения, как силу, действующую на пробный заряд, помещенный в данную точку, то появляется надежда не использовать специальные функции в записи выражений, определяющих действие заряженного цилиндра. Эта надежда и вовсе превращается в уверенность, когда действие заряженных поверхностей, представляющих собой продольные сечения кругового цилиндра, мы заменяли на действие от двух заряженных линий, проходящих в плоскостях нормальных сечений цилиндра через центры масс соответствующих дуг окружностей. Последнее оказывается возможным из-за наличия осевой симметрии электростатической задачи, а также вследствие математического совпадения выражений, представляющих закон Кулона и гравитационный закон Ньютона.

Представим себе, что однородный круговой цилиндр оказывает гравитационное воздействие на физическую точку, расположенную внутри него. Опуская из рассматриваемой точки перпендикуляр на ось цилиндра, рассечем цилиндр плоскостью, проходящей через рассматриваемую точку и одновременно нормальной по отношению к построенному перпендикуляру. Теперь рассмотрим систему, состоящую из трех независимых частей: точки и двух составляющих цилиндра. По законам классической механики их силовое взаимодействие, а также движение

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 08-01-00484-а).

будет осуществляться только по направлению построенного перпендикуляра. Причин же, вызывающих вращение частей цилиндра, не будет. Таким образом, движение будет только поступательным. Как известно, такое движение полностью определяется движением центров масс элементов системы. Поэтому покой и отвечающее ему гравитационное и электрическое взаимодействие будут эквивалентны состоянию равновесия и силовому взаимодействию точки с линиями центров масс нормальных элементарных сечений цилиндра.

Таким образом нам удалось построить аналитическое решение электростатической задачи, выраженное в элементарных функциях. После чего было построено численное решение магнитогидродинамической задачи об автомодельном течении электропроводящей жидкости в прямоугольном канале во внешнем однородном магнитном поле, а также электрическом поле, определенном конфигурацией заряженного цилиндра.

Исследованию автомодельных МГД-течений посвящено относительно много работ [1 – 5], выполняемых группой сотрудников под руководством профессора А.М. Бубенчикова. В настоящей работе мы лишь представили пример одной из указанного класса задач, которая содержит нетривиальную конфигурацию внешнего электрического поля.

Физическая постановка задачи и математическая модель

Установившееся движения вязкой электропроводящей жидкости описывается стационарным уравнением Навье – Стокса, учитывающим действие силы Лоренца (пондеромоторной силы) [6]:

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (1)$$

Причем плотность электрического тока $\mathbf{j}$ определяется обычно законом Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma_0 (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (2)$$

В (1), (2) ρ – плотность жидкости; $\mathbf{E}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{B}$ – векторы скорости, электрического напряжения и магнитной индукции, σ_0 – электропроводность жидкости, μ – ее вязкость, p – давление.

По принципу суперпозиции электрических полей, входящая в (2) величина электрического напряжения складывается из индуцированной движением жидкости составляющей $\mathbf{E}_{\text{in}} = -\text{grad } \varphi$ и внешнего электрического напряжения $\mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi + \mathbf{E}_0. \quad (3)$$

Для потенциала индуцированного электрического поля φ в [7] получено уравнение

$$\nabla^2 \varphi = \text{div}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (4)$$

Рассмотрим теперь течение на участке стабилизированного движения в постоянном внешнем магнитном поле и электрическом поле, заданным заряженным цилиндром.

$\mathbf{B}_0$ – вектор напряженности внешнего стационарного однородного магнитного поля – задан и является постоянной величиной при переходе от точки к точке во внешности канала, $\mathbf{W}_0$ – вектор скорости входящего потока. Цилиндр выполнен из непроводящего материала и является проницаемым для магнитного поля.

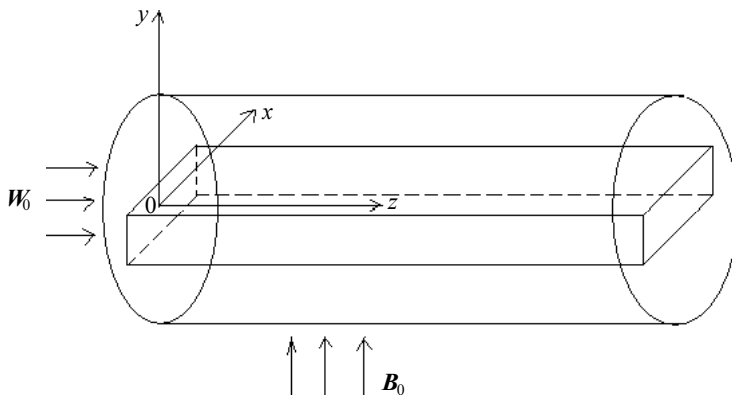


Рис. 1. Физическое пространство задачи

На поверхности цилиндра заданной длины равномерно распределен некоторый заряд Q . Для заданной конфигурации векторных полей, отвечающих автомодельному МГД-течению: $\mathbf{V} = (0, 0, W)$, $\mathbf{B} = (0, B_0, B)$, $\mathbf{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, 0)$ уравнения (1) и (4) переписутся в виде

$$\mu \nabla^2 W = -\frac{\Delta p}{l_0} + \sigma \left(WB_0 + \frac{\partial \phi}{\partial x} - E_{0x} \right); \quad (5)$$

$$\nabla^2 \phi = -B_0 \frac{\partial W}{\partial x}. \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения (5) и (6) составляют основу математической модели рассматриваемых ниже процессов.

Обезразмеривание определяющих уравнений

Если в качестве масштабов скорости и электрического потенциала выбрать следующие величины:

$$W_* = \frac{l_0 \Delta p}{\mu}, \quad \phi_* = \frac{l_0 \Delta p}{(\mu \sigma_0)^{1/2}},$$

а в качестве геометрического масштаба взять $x_* = y_* = z_* = l_0$ и перейти в уравнениях (5), (6) к безразмерным искомым величинам $\bar{W}, \bar{\phi}$ по формулам

$$W = W_* \cdot \bar{W}, \quad \phi = \phi_* \cdot \bar{\phi},$$

то в безразмерной форме определяющие уравнения будут иметь вид

$$\nabla^2 W = -1 + \text{Ha}^2 W + \text{Ha} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - E_{0x} \right); \quad (7)$$

$$\nabla^2 \phi = -\text{Ha} \frac{\partial W}{\partial x}. \quad (8)$$

Здесь и в дальнейшем по соображениям простоты черта над знаками функций скорости и электрического потенциала будет опущена; W – продольная компонента вектора скорости, ϕ – потенциал индуцированного электрического поля;

$Na = l_0 B_0 (\sigma_0 / \mu)^{1/2}$ – число Гартмана, определяющее порядок отношения электромагнитной силы (силы Лоренца) к силе вязкого трения. Под l_0 здесь и ниже понимается поперечный размер прямоугольного канала.

Уравнения (13), (14) удобны тем, что позволяют легко реализовать принцип суперпозиции электрических полей.

Вычисление электрического напряжения в точках, расположенных внутри кругового однородно заряженного бесконечного цилиндра

Предварительно разобьем заряженный цилиндр на элементарные части (цилиндры высотой dl) сечениями, перпендикулярными оси цилиндра. Ввиду симметрии кругового цилиндра, а также математического совпадения выражений, представляющих закон Кулона и гравитационный закон Ньютона, каждая точка, имеющая пробный заряд и находящаяся внутри цилиндра, испытывает от заряженной поверхности тоже действие, что и от заряженных прямых, проходящих через центры масс соответствующих дуг элементарных сечений цилиндра. При этом на этих двух линиях будет сосредоточен весь заряд цилиндра. Возьмем одну из этих линий и найдем суммарную напряженность электрического поля в рассматриваемой точке, генерируемого указанной заряженной прямой.

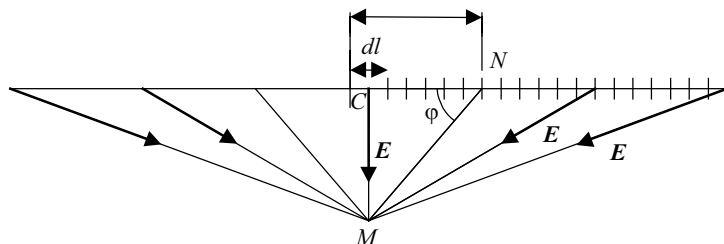


Рис. 2. К расчету электрического напряжения от заряженной линии

Из представленного рисунка видно, что если складывать электрические напряжения от действия каждого элементарного участка бесконечной линии, то горизонтальные составляющие напряжений взаимно уничтожаются. Поэтому необходимо сложить лишь вертикальные составляющие, причем это можно сделать для одной из половинок линий, а потом результат умножить на два. В связи с этим модуль суммарного электрического напряжения определяется следующим образом:

$$E = 2\sigma' \int_0^{\infty} \frac{\sin \phi dl}{\rho^2}.$$

Здесь $\sigma' = \gamma R \sigma$, σ – поверхностная плотность распределения зарядов, $\rho = MN$ – расстояние от рассматриваемой точки до текущей точки на заряженной линии $\phi = \angle MNC$. Вводя обозначения $h = MC$ и $l = NC$, выписанный интеграл можно представить в виде

$$E = 2\sigma' h \int_0^{\infty} \frac{dl}{(h^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{2\sigma'}{h} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}}.$$

Последнее равенство получено при использовании замены $x = \frac{l}{h}$. Сделаем еще одну замену переменных $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$, тогда интеграл в последнем равенстве преобразуется следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = 4 \int_0^{\infty} \frac{udu}{(1+u^2)^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = 2.$$

В результате электрическое напряжение от двух заряженных линий определится формулой

$$E_0(r) = \frac{4\sigma^l}{h^l} - \frac{4\sigma^b}{h^b}, \quad (9)$$

где h^l – расстояние от рассматриваемой точки до линии, порожденной малым сектором цилиндра, h^b – соответственно большим сектором цилиндра.

Если все линейные размеры, как и ранее, отнести к $l_* = l_0$, а поверхностную плотность распределения зарядов σ к $\sigma_* = \Delta p / (\mu\sigma_0)^{1/2}$, то формулу (9) можно считать безразмерной.

Легко видеть, что величина электрического напряжения в случае кругового цилиндра зависит лишь от удаления рассматриваемой точки от оси канала, а проекция вектора электрической напряженности на ось Ox определится следующим образом:

$$E_{0x}(x, y) = E_0(r) \cdot \cos \beta = 8\sigma R \left(\frac{\gamma}{h^l} - \frac{\pi - \gamma}{h^b} \right) \frac{x}{r}, \quad (10)$$

где $\gamma = \arccos\left(\frac{r}{R}\right)$, $h^l = -r + \frac{R \sin \gamma}{\gamma}$, $h^b = r + \frac{R \sin \gamma}{\pi - \gamma}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

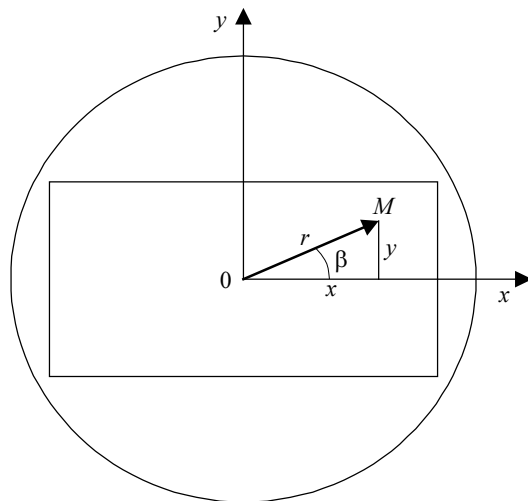


Рис. 3. К определению проекций электрического напряжения на оси декартовых координат

Таким образом, уравнения (7), (8), составляющие математическую модель, замыкаются в рассматриваемом случае соотношением (10).

Эти уравнения необходимо интегрировать при следующих граничных условиях: пусть Γ – есть контур поперечного сечения прямоугольного канала, тогда

$$W|_{\Gamma} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Gamma} = 0. \quad (12)$$

Техника проведения расчетов

Одной из методик численной реализации (которой мы и будем пользоваться) является метод конечных разностей. Конечно-разностные методы описывают неизвестную функцию через ее значения в узловых точках разностной сетки. Таким образом, следуя методу конечных разностей, производные заменяются своими разностными аналогами. В итоге получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестной физической величины.

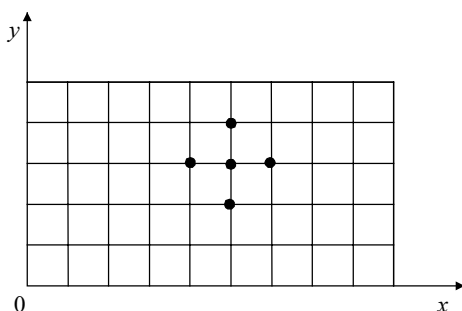


Рис. 4. Разностная сетка

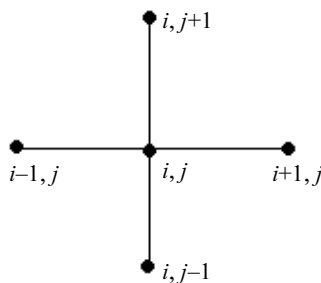


Рис. 5. Пятиточечный шаблон

Все производные, входящие в математическую постановку задачи, будем аппроксимировать с использованием двухсторонних симметричных разностей второго порядка точности. Далее подставляем их в МГД-уравнения и выразим значения искомых функций в центральном узле шаблона. Полученные формулы будем использовать как основные рекуррентные соотношения метода простой итерации.

Дифференциальные уравнения математической модели имеют вид уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \Phi = b. \quad (13)$$

Здесь ∇^2 – плоский оператор Лапласа, $\Phi = W, \varphi$. В декартовых координатах

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}.$$

Упомянутые выше аппроксимации производных будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{W_{i+1,j} - 2W_{i,j} + W_{i-1,j}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2),$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{W_{i+1,j} - 2W_{i,j} + W_{i-1,j}}{\Delta y^2} + o(\Delta y^2),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2).$$

Подставляя полученные выражения в (7) и выражая $W_{i,j}$, найдем

$$W_{i,j} = \frac{\frac{W_{i+1,j} + W_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{W_{i,j+1} + W_{i,j-1}}{\Delta y^2} - \text{Ha} \left(\frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j}}{2\Delta x} - E_x^{i,j} \right) + 1}{\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \text{Ha}^2}. \quad (14)$$

Проводя аналогичную процедуру в (8) для $\Phi_{i,j}$, получим

$$\Phi_{i,j} = \frac{\frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \text{Ha} \frac{W_{i+1,j} + W_{i-1,j}}{2\Delta x}}{\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}}. \quad (15)$$

Здесь $\Delta x = 1/M$, M – количество точек по x , $\Delta y = 1/N$, N – количество точек по y .

Результаты расчетов и их анализ

Предварительно были выполнены расчеты течений проводящей жидкости в отсутствие внешнего электромагнитного поля и получено хорошее согласование результатов с теорией Блазиуса [8]. Далее мы рассмотрели случай автомодельного МГД-течения при наличии лишь внешнего магнитного поля (электрическое отсутствует).

Как показывают вычисления, проведенные в этом случае, наличие магнитного поля оказывает тормозящее действие на поток. Так, при $\text{Ha} = 5$ максимальная скорость в канале квадратного сечения почти в два раза меньше в сравнении со случаем $\text{Ha} = 0$.

Ниже представлены результаты расчетов течения в скрещенном электромагнитном поле, составленном однородным полем стационарного магнита и полем заряженного цилиндра.

Рис. 6, а – 9, а для поверхности скорости показывают, что конфигурация внешнего электрического поля, определяемая заряженным цилиндром, приводит к появлению в канале обратных перемещений жидкости. Это выражается в том, что часть жидкости под действием пондеромоторной силы течет против направления действия поверхностных сил (против градиента давления). Последнее говорит о возможности управления потоками проводящей жидкости внешними электромагнитными полями.

Для потенциала индуцированного электрического поля из рис. 6, б – 9, б видно, что на боковых поверхностях прямоугольного канала движением электропроводящей жидкости в поперечном магнитном поле индуцируется разность потенциалов. Последнее подтверждает возможность создания на этом принципе МГД-генератора.

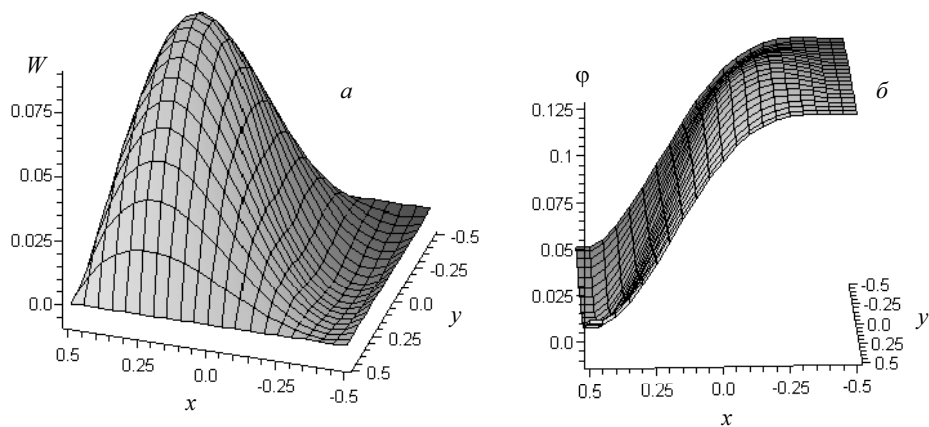


Рис. 6. Поверхности скорости (а) и потенциала (б) индуцированного электрического поля при $R = 1$ и $\sigma = 0,01$

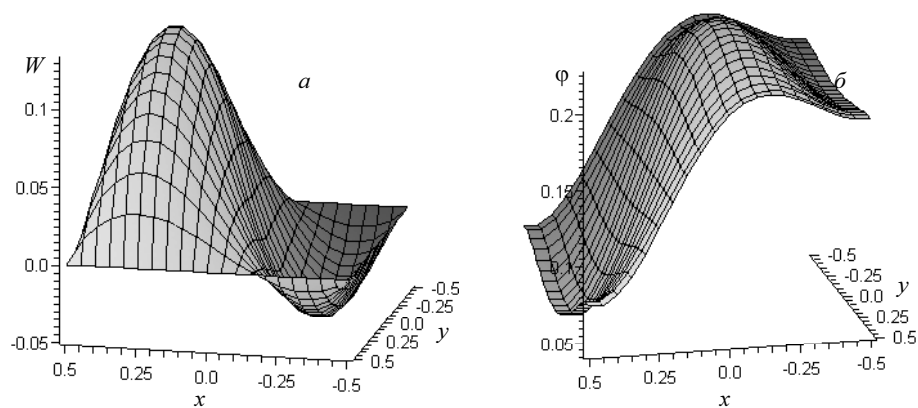


Рис. 7. Поверхности скорости (а) и потенциала (б) индуцированного электрического поля при $R = 1$ и $\sigma = 0,02$

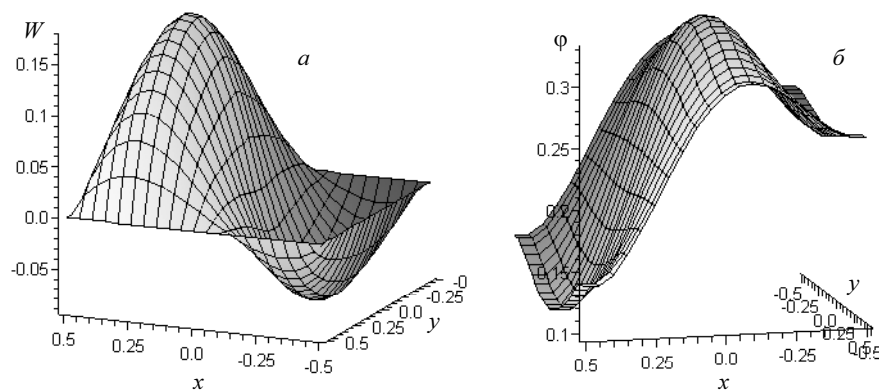


Рис. 8. Поверхности скорости (а) и потенциала (б) индуцированного электрического поля при $R = 1$ и $\sigma = 0,03$

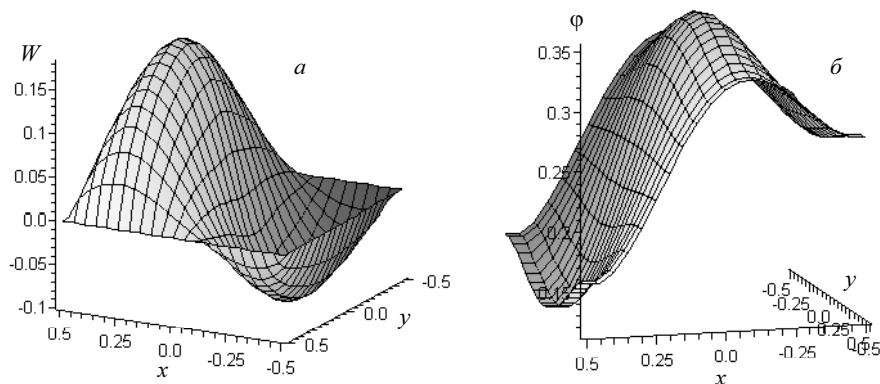


Рис. 9. Поверхности продольной компоненты скорости (а) и потенциала (б) индуцированного электрического поля при $R = 0,75$ и $\sigma = 0,03$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бубенчиков А.М., Ливаев Р.З. Некоторые автомодельные задачи магнитной гидродинамики // Вестник ТГУ. Бюллетень оперативной научной информации. 2001. № 4. С. 32 – 52.
2. Бубенчиков А.М., Клевцова А.В., Фирсов Д.К. Течение проводящих жидкостей в тонких трубках в поперечном магнитном поле // Математическое моделирование. 2003. Т. 15. № 9. С. 75 – 87.
3. Бубенчиков А.М., Клевцова А.В., Харламов С.Н. Закрученный поток проводящей жидкости в узких трубках при наличии магнитного поля // Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 3. С. 109 – 122.
4. Бубенчиков А.М., Колесникова А.В. Стабилизированное течение электропроводящей жидкости в круглой трубе // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10. № 3. С. 23 – 31.
5. Бубенчиков А.М., Попонин В.С., Колесникова А.В. Течение электропроводящей жидкости в канале с частично проводящими стенками // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. № 1. С. 18 – 26.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
7. Тананаев А.В. Течение в каналах МГД-устройств. М.: Атомиздат, 1979. 368 с.
8. Каминер А.А., Яхно О.М. Гидродинамика в инженерной практике. Киев: Техника, 1987. 157 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич, аспирант кафедры теоретической механики Томского государственного университета. E-mail: michael121@mail.ru

БУГАЕНКО Анна Андреевна, студентка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

Статья принята в печать 04.09.2009 г.