УДК 658.512

Ю.И. Параев

ПРОБЛЕМА УПРАВЛЕНИЯ РЕКЛАМОЙ В ЗАДАЧЕ ПРОИЗВОДСТВА И СБЫТА ТОВАРА

В математическую модель производства и сбыта товара включено влияние рекламы. Поставлена задача об оптимальном управлении производством, ценой товара и рекламой. С помощью принципа максимума Понтрягина получено решение задачи. Показано, что в условиях задачи управления производством и рекламой являются релейными. Найдены необходимые и достаточные условия существования решения задачи.

В настоящее время разрабатывается новое научное направление – динамическая экономика, когда в качестве математических моделей экономических процессов выбирается система дифференциальных или разностных уравнений. Для задач производства, хранения и сбыта товаров достаточно удачной является модель, первоначально изложенная в [1], а также уточненная в [2]. В настоящей работе проводится дальнейшее обобщение этой модели, связанное с включением в задачу проблемы влияния рекламы на темп продажи товара. В отличие от [3] рассматривается более адекватная математическая модель влияния рекламы. Получено решение задачи, а также сформулированы необходимые и достаточные условия его существования. Для простоты решения рассматривается упрощенная модель при неограниченном спросе и отсутствии затрат на хранение товара.

1. Постановка задачи

Пусть $z(t)$ – количество товара на складе производителя. Изменение этой величины можно описать уравнением

$$\dot{z} = u - P,\ \ \mathrm{z}(0) = 0, \tag{1}$$

где $u(t)$ – темп производства, $P(t)$ – темп продажи, т.е. $u(t)\Delta t$ – количество товара, произведенного за время Δt, $P(t)\,\Delta t$ – количество товара, проданного за это же время. Для простоты изложения будем рассматривать задачу для товара неограниченного спроса. В этом случае функция $P(t)$ не зависит от количества товара у покупателя и ее, согласно [1, 2], можно выбрать в виде

$$P(t) = bz(t)\exp\{-c\},$$

где $c(t)$ – цена единицы товара, b – некоторый коэффициент, который определяет привлекательность товара для покупателя. Последнее может включать в себя просто какие-то знания о товаре и его свойствах. Коэффициент b может быть малым и даже $b = 0$, например, когда в продажу поступает совершенно новый товар. В подобном случае темп продажи оказывается малым и товар будет плохо продаваться. Цель включения рекламы состоит в увеличении привлекательности товара. В самом простом варианте можно положить $b(v) = b + kv$, где b – привлекательность товара без рекламы, v – затраты на рекламу, k – некоторый коэффициент эффективности рекламы. Например, коэффициент k зависит от качества рекламных роликов, а затраты v определяют частоту показа этих роликов по телевидению. В результате темп продажи становится равным

$$P(t) = (b + kv)z(t)\exp\{-c\}. \qquad (2)$$

Пусть весь процесс продолжается в течение некоторого интервала времени $[0,T]$. Тогда общая прибыль производителя товара

$$J = \int_0^T [c(t)P(t) - u(t) - v(t)]dt. \qquad (3)$$

Для уточнения отметим, что $v(t)$ – темп затрат на рекламу, т.е. $v(t)$ – количество Δt средств, затраченных на рекламу за время Δt. Произведение $r = kv$ можно рассматривать как эффективность рекламы. Количество товара $z(t)$ определяется в стоимостном выражении. Поэтому цена единицы товара $c(t)$ должна быть безразмерной. Если $c = 1$, то товар продается по себестоимости. Здесь и далее все величины не могут быть отрицательными. Будем также предполагать, что должны выполняться условия

$$0 \le u(t) \le u_0, \quad 0 \le v(t) \le v_0, \qquad (4)$$

где u_0 – максимально возможный темп производства, v_0 – максимально возможный темп затрат на рекламу.

В результате получается задача из теории оптимального управления: найти такие функции или управления $c(t)$, $u(t)$ и $v(t)$ на интервале времени $[0,T]$, удовлетворяющие условиям (4), при которых функционал (3) максимален. Далее под существованием решения задачи будем понимать не только существование решения, но и то, что функционал (3) положителен.

2. Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина

Введем вспомогательную переменную $p(t)$ и на основании (1) и (3) составим функцию Гамильтона

$$H(z, p, u, c, v) = p(u - P) - cP + u + v = u(p + 1) + v - (c + p)P. \qquad (5)$$

Минимум функции H по $c(t)$ с учетом (2) достигается при

$$c(t) = 1 - p(t). \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и (2), получаем, что

$$H(z, p, u, v) = u(p + 1) + v - P,\ P(t) = b_0(v)\, z(t)\, \exp\{p\}, \qquad (7)$$

где $b_0(v) = b(v)/e = b_0 + k_0 v$, $b_0 = b/e$, $k_0 = k/e$.

Минимум функции H по u с учетом (4) достигается при

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad p(t) > -1, \\ u_0, & \text{если} \quad p(t) < -1. \end{cases} \qquad (8)$$

Минимум функции H по v с учетом (4) достигается при

$$v(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k_0 h(t) < 1, \\ v_0, & \text{если} \quad k_0 h(t) > 1, \end{cases} \qquad (9)$$

где $h(t) = z(t)\, \exp\{p(t)\}$. Переменная $p(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\dot{p} = -\partial H/\partial z = b_0(v)e^p,\ p(T) = 0. \qquad (10)$$

Как следует из общей теории, необходимым условием существования решения задачи оптимального управления является существование ненулевой функции $p(t)$, удовлетворяющей (10).

3. Структура управления

Как следует из (8), оптимальное управление производством является релейным, то есть производство либо включается на полную мощность, либо выключается. Моменты включения или выключения производства происходят в моменты времени, когда выполняется равенство

$$p(t) = -1. \tag{11}$$

Из (10) видно, что производная функции $p(t)$ всегда неотрицательна и, следовательно, она не может убывать. Естественно предположить, что $p(0) < -1$, т.е. в начальный момент времени производство включается. Но поскольку должно выполняться условие $p(T) = 0$, то условие (11) может выполняться только один раз в некоторый момент времени t_1.

Решение уравнения (10) можно записать в виде

$$p(t) = -\ln F(t), \tag{12}$$

где
$$F(t) = 1 + \int_t^T b_0(\mathrm{v})dt\ . \tag{13}$$

При этом
$$\dot{F} = -b_0(v),\ F(T) = 1. \tag{14}$$

Это проверяется непосредственной подстановкой. Всегда $F(t) > 1$, и эта функция убывающая. Кроме того, из (12) следует, что

$$\exp\{p(t)\} = 1/F(t),\ h(t) = z(t)/F(t),\ P(t) = b_0(v)h(\mathrm{t}).$$

Отметим также, что оптимальная цена товара $c(t) = 1 + \ln F(t)$ и она убывает до 1 с ростом t . Из (11) и (12) следует, что момент выключения производства t_1 определяется из условия

$$F(t_1) = e. \tag{15}$$

Из (9) следует, что оптимальное управление рекламой также является релейным, то есть это управление либо включается на полную мощность, либо отсутствует. Моменты включения или выключения управления рекламой происходят в моменты времени, когда выполняется равенство

$$k_0 h(t) = 1. \tag{16}$$

Из (1) и (14) можно получить, что

$$\dot{h} = u(t)/F(t), \quad h(0) = 0. \tag{17}$$

Из (17) видно, что производная функции $h(t)$ всегда неотрицательна. Более того, на интервале $[0, t_1]$ эта функция растет, а затем остается постоянной, поскольку после момента t_1 $u(t) = 0$. Поэтому, если реклама включается, то она может включаться только один раз в момент времени t_2, когда выполняется условие

$$k_0 h(t_2) = 1. \tag{18}$$

Причем всегда $t_2 \le t_1$. Таким образом, получили следующее решение задачи: оптимальное управление производством равно

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & \text{при} \quad 0 \le t < t_1, \\ 0 & \text{при} \quad t_1 < t \le T; \end{cases} \tag{19}$$

оптимальное управление рекламой равно

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le t < t_2, \\ v_0 & \text{при} \quad t_2 < t \le T. \end{cases} \tag{20}$$

Другими словами, товар производится с максимальной интенсивностью на интервале $[0, t_1]$. После момента t_1 он не производится. Затраты на рекламу осуществляются после момента t_2, когда накопится достаточное количество товара. Все это объясняется спецификой выбора функции $P(t)$. В практике известны случаи, когда товар сначала рекламируется, а уже затем начинается его интенсивное производство. Однако такая торговая политика, по-видимому, не является оптимальной. Отметим, что $u_0 t_1$ – общее количество произведенного товара. Остается только найти значения t_1 и t_2, а также необходимые условия существования решения и положительности функционала (3).

4. Решение уравнений

Из (14) и (20) получаем

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) = C - b_0 t & \text{при} \quad 0 \le t < t_2, \\ F_2(t) = C - b_0 t - r_0(t - t_2) & \text{при} \quad t_2 < t \le T, \end{cases} \tag{21}$$

где $C = F(0)$ $(>e)$ – постоянная интегрирования, $r_0 = k_0 v_0$. Напомним, что $r = kv_0 = er_0$ есть эффективность рекламы. Из условия $F(T) = 1$ получаем

$$C = 1 + b_0 T + r_0(T - t_2). \tag{22}$$

Решение уравнения (17) с учетом (19) и (21) можно записать в виде

$$h(t) = \frac{z(t)}{F(t)} = \begin{cases} \dfrac{u_0}{b_0} \ln \dfrac{F_1(0)}{F_1(t)} & \text{при} \quad 0 \le t < t_2, \\ \dfrac{u_0}{b_0} \ln \dfrac{F_1(0)}{F_1(t_2)} + \dfrac{u_0}{b_1} \ln \dfrac{F_2(t_2)}{F_2(t)} & \text{при} \quad t_2 < t \le t_1, \end{cases} \tag{23}$$

где $b_1 = b_0 + r_0$. На интервале $(t_1, T]$ функция $h(t)$ постоянна и равна $h(t_1)$. Из условия (18) с учетом (21) и (23) получаем

$$t_2 = CR, \tag{24}$$

где

$$R = \frac{1 - e^{-q}}{b_0}, \; q = \frac{b_0}{k_0 u_0}.$$

В частности, получается, что $F_1(t_2) = F_2(t_2) = Ce^{-q}$. Подставляя (24) в (22), получаем

$$C = \frac{1 + b_1 T}{1 + r_0 R}.$$

Из условий (25) и (24) получаем окончательно

$$t_1 = \frac{1 + b_1 T - e}{b_1} \quad \text{и} \quad t_2 = R\frac{1 + b_1 T}{1 + r_0 R}. \tag{25}$$

С учетом (6), (12), (19) и (20) функционал (3) принимает вид

$$J = \int_0^T (1 + \ln F(t)) P(t) dt - u_0 t_1 - v_0(T - t_2). \tag{26}$$

Выражая $P(t)$ из (1), подставляя это выражение в (26) и интегрируя по частям, получаем с учетом (15) и (16), что при оптимальном управлении

$$J = \frac{u_0}{b_1}\big((1 + b_1 T)(\ln C - 2) + e\big) + \frac{v_0}{b_1}. \tag{27}$$

На рис. 1 приведено решение задачи (при $b_0 = e - 1$, $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, $T = 1$, $t_1 = 0{,}83$, $t_2 = 0{,}437$). Видно, что после включения рекламы темп продажи резко возрастает. После выключения производства темп продажи остается постоянным в силу постоянства функции $h(t)$.

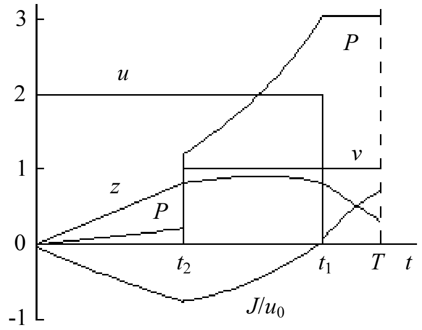

Рис. 1

Новый товар. Можно отдельно рассмотреть случай, когда $b_0 = 0$, т.е. случай, когда товар совершенно не знаком потребителю. Полагая в предыдущих выражениях $b_0 = 0$, получаем

$$h(t) = \frac{z(t)}{F(t)} = \begin{cases} u_0 t / C & \text{при} \quad 0 \le t < t_2, \\ \dfrac{u_0 t_2}{C} + \dfrac{u_0}{r_0} \ln \dfrac{C}{C - r_0 (t - t_2)} & \text{при} \quad t_2 < t \le t_1. \end{cases} \tag{28}$$

Кроме того, $R = 1/k_0 u_0$. Отсюда окончательно получаем

$$C = \frac{1 + r_0 T}{1 + m}, \quad t_1 = \frac{1 + r_0 T - e}{r_0}, \quad t_2 = \frac{(1 + r_0 T)m}{(1 + m) r_0}, \quad J = \frac{u_0}{r_0}((1 + r_0 T)(\ln C - 2) + e + m), \tag{29}$$

где $m = v_0 / u_0$. В данном случае до момента времени t_2 темп продажи равен нулю.

Отсутствие рекламы. Если реклама отсутствует ($v_0 = 0$), то, как следует из предыдущих выражений,

$$C = 1 + b_0 T, \; t_1 = T - \frac{e - 1}{b_0}, \quad t_2 > T, \quad J = \frac{u_0}{b_0}((1 + b_0 T)[\ln(1 + b_0 T) - 2] + e). \tag{30}$$

При этом для существования решения необходимо выполнение условия $C = 1 + b_0 T > e$. В противном случае следует полагать $t_1 = 0$, то есть производство не включается и $J = 0$. Поэтому для получения прибыли при $1 + b_0 T \le e$ нужно обязательно вводить рекламу.

5. Необходимые и достаточные условия

Как следует из предыдущего, необходимыми и достаточными условиями существования решения являются неравенства

$$0 \le t_2 \le t_1 < T, \quad C > e, \; J > 0. \tag{31}$$

Учитывая (25), получаем, что неравенство $t_2 \le t_1$ эквивалентно неравенству

$$C = \frac{1 + b_1 T}{1 + r_0 R} \ge e^{1+q}. \tag{32}$$

Можно проверить, что если (32) выполняется, то выполняется и $C > e$. Неравенство $J > 0$ приводит к неравенству

$$C = \frac{1 + b_1 T}{1 + r_0 R} \ge \exp\left(2 - \frac{m + e}{1 + b_1 T} \right). \tag{33}$$

В случае, когда $b_0 = 0$, последние неравенства согласно (29) принимают вид

$$C = \frac{1 + r_0 T}{1 + m} \ge e, \quad C = \frac{1 + r_0 T}{1 + m} \ge \exp\left(2 - \frac{m + e}{1 + r_0 T} \right). \tag{34}$$

К этим условиям можно еще добавить условия $0 \le t_1$ и $t_2 < T$, выполнение которых необходимо для выполнения (31). Из этих условий с учетом (32) получаем

$$1 + b_1 T = 1 + b_0 T + r_0 T > e,$$

$$k_0 \ge \frac{b_0}{u_0 \ln(1+b_0 T)} \quad \text{или} \quad r_0 \ge d_0 = \frac{m b_0}{\ln(1+b_0 T)}. \tag{35}$$

В случае, когда $b_0 = 0$, последние неравенства принимают вид

$$1 + r_0 T > e, \quad k_0 \ge 1/u_0 T \quad \text{или} \quad r_0 T \ge m. \tag{36}$$

Отсюда следует, что параметры k_0 и r_0 должны иметь нижнюю границу, которая убывает с ростом u_0.

Приведенные здесь неравенства накладывают ограничения на параметры u_0, v_0, T, b_0, k_0, при которых решение задачи существует в указанном выше смысле. Поскольку наибольший интерес представляют параметры k – коэффициент эффективности рекламы и $r_0 = k_0 v_0$ – эффективность рекламы, то будем считать, что параметры u_0, T, b_0 заданы, и нужно найти область значений для k_0 или $r_0 = k_0 v_0$, при которых существует решение задачи. При этом последнее сводится к нахождению нижних границ для этих параметров. Обозначим через d_1 и d_2 нижние значения параметра r_0 в неравенствах (32) и (33) соответственно, т.е. эти значения есть корни уравнений, получающихся заменой в (32) и (33) неравенства на знак равенства. Из анализа выражений (25) следует, что при малом r_0 всегда $t_2 > t_1$. Затем с ростом r_0 функция t_1 возрастает, а функция t_2 убывает. Это означает, что всегда $d_1 > 0$. Более того, как видно из (35), всегда $d_1 > d_0$. На рис. 2 представлена зависимость величин t_2, t_1 и J от параметра r_0 при $1 + b_0 T = e$ и $m = 1$. Видно, что $d_0 < d_1 < d_2$. С другой стороны, возможны случаи, когда $d_1 > d_2$. Возможна ситуация, когда $d_2 = 0$ (например при $C > 2$). Поэтому для существования решения задачи должно выполняться

$$r_0 \ge \max\{d_1, d_2\} > d_0. \tag{37}$$

На рис. 3 представлена зависимость границ d_0, d_1 и d_2 от значения $b_0 T$. Несколько неожиданным здесь является то, что при больших значениях $b_0 T$ нижняя граница d_1 растет пропорционально $b_0 T$. Это можно объяснить тем, что реклама требует затрат, и поэтому добавка в коэффициент $b(v) = b + kv$ в (4) должна быть

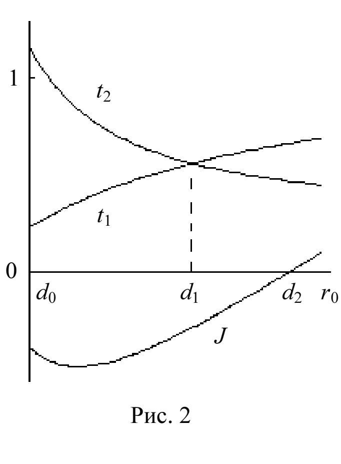

Рис. 2

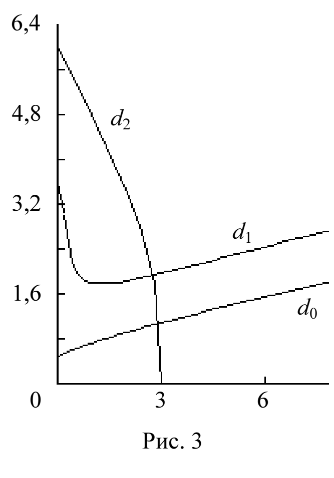

Рис. 3

существенной. Это находит отражение в практике. Хорошо известные товары либо не рекламируются, либо рекламируются очень интенсивно (например, прохладительные напитки рекламируются не только из-за борьбы с конкурентами, но в основном для того, чтобы увеличить объем собственной продажи).

Заключение

В работе в задачу производства и сбыта товара включено влияние рекламы в виде линейной зависимость темпа продажи от эффективности рекламы. Целью введения рекламы является увеличение темпа продажи, что, согласно (3), должно приводить к увеличению прибыли. Основные полученные результаты сводятся к следующему.

1. При введении рекламы всегда можно получить положительную прибыль.

2. Поскольку введение рекламы требует определенных затрат, то ее можно вводить только тогда, когда ее эффективность достаточно большая. Эффективности рекламы определяется коэффициентом эффективности k и затратами на ее проведение $v_0(T - t_2)$.

Коэффициент эффективности k зависит от качества организации рекламы. Вопрос о конкретном определении этого коэффициента находится за рамками данной работы.

3. Поскольку задача содержит много параметров, то подробный анализ полученных решений оказывается довольно громоздким. Чтобы не загромождать изложение, отметим только, что при выполнении условий (32) и (33) прибыль J растет с увеличением u_0 и v_0; с ростом эффективности рекламы r_0 интервалы $[0, t_1]$ и $[t_2, T]$ включения производства и рекламы увеличиваются, что, в свою очередь, приводит к увеличению количества произведенного товара и росту прибыли.

Предложенную в работе математическую модель рекламы можно назвать «безынерционной», т.е. если реклама выключается, то ее влияние на покупателя сразу прекращается. Нечто подобное происходит при продаже товара через Интернет, когда отсутствие рекламы приводит к отсутствию продаж товара. По-видимому, возможны другие модели. Например, можно рассмотреть «инерционную» модель рекламы, влияние которой на покупателя сразу не прекращается после ее выключения. В таком случае эффективность рекламы можно описать, например, дифференциальным уравнением 1-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горский А.А., Колпакова И.Г., Локшин Б.Я.* Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товаров повседневного спроса // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 1. С.144 – 148.
2. *Параев Ю.И.* Решение задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 2. С.103 – 107.
3. *Параев Ю.И.* Оптимальное управление рекламой в задаче производства и сбыта товара // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 162 – 164.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 1 ноября 2007 г.