УДК 519.2

Н.В. Степанова, А.Ф. Терпугов

УПРАВЛЕНИЕ ЦЕНОЙ ПРИ ПРОДАЖЕ СКОРОПОРТЯЩЕЙСЯ ПРОДУКЦИИ

Рассматривается управление ценой продажи продукции, гарантирующее, что товар будет продан в течение торговой сессии и принесет максимальную прибыль от его продажи.

Оптимизация продажи скоропортящейся продукции (молока, творога и т.д.) представляет определенный практически интерес, так как продукцию, не реализованную в течение торговой сессии, в лучшем случае надо пускать в переработку, а в худшем – просто выбрасывать. Поэтому при реализации такой продукции возникает ряд вопросов, таких как:

а) какой объем продукции надо завозить в торговую точку;

б) по какой цене ее продавать;

в) как управлять ценой продажи продукции, чтобы к концу торговой сессии она была полностью реализована.

Все эти задачи надо решать при вполне естественном критерии оптимальности – максимизации прибыли, получаемой от реализации продукции.

1. Математическая модель

Пусть в торговую точку завозится партия продукции объемом Q_0, которая должна быть продана в течение торговой сессии длительности T. Пусть d – объем затрат на выпуск единицы продукции, так что производителю эта партия стоила $Q_0\, d$ рублей.

Пусть $c(t)$ – цена, по которой продукция продается в момент времени t. В данной работе рассматривается вопрос управления ценой продажи $c(t)$ в зависимости от времени t и объема $Q(t)$ продукции, не реализованной к этому моменту времени. Цель этого управления – добиться того, что продукция будет реализована к концу торговой сессии и при этом будет получена максимальная прибыль.

Будем считать, что поток покупателей является пуассоновским потоком интенсивности $\lambda(c)$, зависящей от розничной цены c. Вид этой зависимости будет уточнен ниже.

Будем считать, что покупатели приобретают товар независимо друг от друга, и объем покупки ξ – случайная величина с $M\{\xi\} = a_1$ и $M\{\xi^2\} = a_2$.

Пусть $Q(t)$ – количество продукции, которая осталась не реализованной в момент времени t. Рассмотрим решение задачи в так называемом диффузионном приближении, когда $Q(t)$ аппроксимируется диффузионным случайным процессом. Как показано в [1], такую аппроксимацию следует брать в виде

$$dQ(t) = -a_1\lambda(c)dt + \sqrt{a_2\lambda(c)}dw(t), \qquad (1)$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс. Именно эту аппроксимацию мы и исследуем ниже.

В одном очень частном случае эта задача уже исследовалась в [1], где закон управления ценой $c(t)$ продажи товара брался из соотношения

$$a_1\lambda(c(t)) = \frac{Q(t)}{T-t}. \tag{2}$$

В настоящей работе будет исследован более общий случай, когда управление розничной ценой определяется соотношением

$$a_1\lambda(c(t)) = \kappa\frac{Q(t)}{T-t} \tag{3}$$

с некоторым дополнительным коэффициентом к. Очевидно, что к>0 и при к=1 рассматриваемый нами случай переходит в (2). Поэтому к=1 может быть использовано для контроля.

Объединяя (1) и (3) можно сказать, что диффузионная аппроксимация процесса $Q(t)$ имеет вид

$$dQ(t) = -\kappa\frac{Q(t)}{T-t}dt + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{Q(t)}{T-t}}dw(t). \tag{4}$$

Найдем сначала некоторые характеристики процесса $Q(t)$.

2. Математическое ожидание процесса *Q*(*t*)

Обозначим $M\{Q(t)\} = \bar{Q}(t)$. Для краткости записи, аргумент t у $Q(t)$ и $\bar{Q}(t)$ мы часто будем опускать.

Усредняя уравнение (4) с учетом того, что для винеровского случайного процесса $M\{dw(t)\} = 0$, получим

$$d\bar{Q}(t) = -\kappa\frac{\bar{Q}(t)}{T-t}dt, \tag{5}$$

которое является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными и которое надо решить при начальном условии $\bar{Q}(0) = Q_0$.

Разделяя переменные

$$\frac{d\bar{Q}}{\bar{Q}} = -\kappa\frac{dt}{T-t}$$

и интегрируя, получим

$$\ln\bar{Q} = \ln C + \kappa\ln(T-t),$$

где C – постоянная интегрирования. Отсюда

$$\bar{Q}(t) = C(T-t)^{\kappa}.$$

Так как $\bar{Q}(0) = Q_0 = CT^{\kappa}$, то $C = Q_0 / T^{\kappa}$ и поэтому

$$\bar{Q}(t) = Q_0\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa}. \tag{6}$$

При к=1 это совпадает с результатом, полученным в [1]. Графики функции $f(x) = (1-x)^{\kappa}$ при различных к приведены на рис. 1.

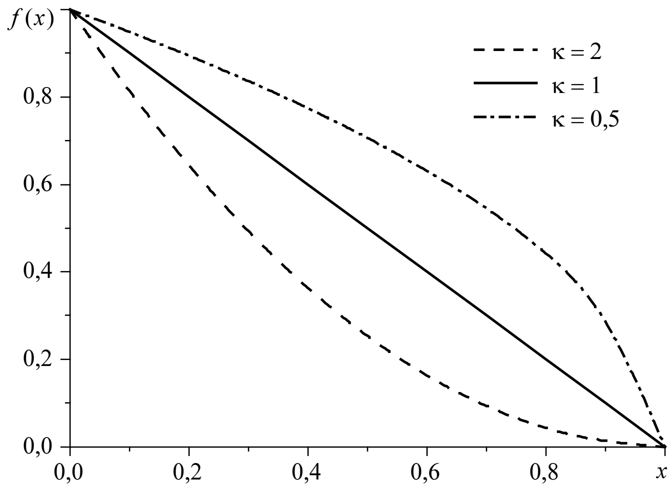

Рис. 1

3. Дисперсия процесса *Q*(*t*)

Пусть процесс $Q(t)$ описывается уравнением

$$dQ(t) = a(Q,t)dt + b(Q,t)dw(t),$$

и нас интересует процесс $y(t) = f(Q,t)$. Тогда, как известно [2], этот новый процесс также является диффузионным и удовлетворяет уравнению

$$df(Q,t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + a(Q,t)\frac{\partial f}{\partial Q} + \frac{b^2(Q,t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Q^2}\right]dt + b(Q,t)\frac{\partial f}{\partial Q}dw(t).$$

Эта формула носит название формулы Ито [2].

Возьмем $f(Q,t) = Q^2$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0;\ \frac{\partial f}{\partial Q} = 2Q;\ \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} = 2,$$

и формула Ито дает

$$d(Q^2) = \left[-2Q\kappa\frac{Q}{T-t} + \frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{Q}{T-t}\right]dt + 2Q\sqrt{\frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{Q}{T-t}}dw(t). \tag{7}$$

Усредняя, получим уравнение для $Q_2(t) = M\{Q^2(t)\}$:

$$\frac{dQ_2}{dt} + 2\kappa\frac{Q_2}{T-t} = \frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{\bar{Q}}{T-t}. \tag{8}$$

Нас будет интересовать дисперсия процесса $Q(t)$, то есть процесс $D_Q(t) = Q_2 - \bar{Q}^2$.

Учитывая (5), получим

$$\frac{d(\bar{Q}^2)}{dt} = 2\bar{Q}\frac{d\bar{Q}}{dt} = -2\kappa\bar{Q}^2\frac{1}{T-t},$$

или
$$\frac{d(\bar{Q}^2)}{dt} + 2\kappa \frac{\bar{Q}^2}{T-t} = 0 . \tag{9}$$

Вычитая (9) из (8), получим уравнение для дисперсии

$$\frac{dD_Q}{dt} + 2\kappa \frac{D_Q}{T-t} = \frac{a_2}{a_1} \kappa \frac{\bar{Q}}{T-t} = \frac{a_2}{a_1} \kappa \frac{Q_0}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\kappa-1}, \tag{10}$$

которое надо решить при начальном условии $D_Q(0) = 0$.

Решая однородное уравнение

$$\frac{dD_Q}{dt} + 2\kappa \frac{D_Q}{T-t} = 0 ,$$

получим выражение

$$\frac{dD_Q}{dt} = -2\kappa \frac{D_Q}{T-t} ,$$

общее решение которого имеет вид

$$D_Q(t) = C \cdot (T-t)^{2\kappa} . \tag{11}$$

Поэтому, используя метод вариации произвольных постоянных, общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$D_Q(t) = C(t) \cdot (T-t)^{2\kappa} .$$

Подставляя это в (10), имеем

$$C'(t)(T-t)^{2\kappa} = \frac{a_2}{a_1} \kappa \frac{Q_0}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\kappa-1} = \frac{a_2}{a_1} \kappa \frac{Q_0}{T^\kappa} (T-t)^{\kappa-1},$$

откуда

$$C'(t) = \frac{a_2}{a_1} \kappa \frac{Q_0}{T^\kappa} (T-t)^{-\kappa-1} .$$

Интегрируя, получаем

$$C(t) = C_0 + \frac{a_2}{a_1} \frac{Q_0}{T^\kappa} (T-t)^{-\kappa} ,$$

где C_0 – произвольная константа. Поэтому

$$D_Q(t) = C_0 (T-t)^{2\kappa} + \frac{a_2}{a_1} \frac{Q_0}{T^\kappa} (T-t)^{\kappa} .$$

Константу C_0 находим из условия $D_Q(0) = 0$. Тогда

$$C_0 T^{2\kappa} = -\frac{a_2}{a_1} Q_0 ; \; C_0 = -\frac{a_2}{a_1} \frac{Q_0}{T^{2\kappa}} ,$$

и поэтому
$$D_Q(t) = \frac{a_2}{a_1} Q_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\kappa} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\kappa}\right]. \tag{12}$$

При κ = 1 это переходит в выражение

$$D_Q(t) = \frac{a_2}{a_1} Q_0 \frac{t}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right),$$

совпадающее с соответствующим выражением в [1].

Графики функции

$$f_2(x) = (1-x)^{\kappa}\left[1-(1-x)^{\kappa}\right]$$

при различных κ приведены на рис. 2.

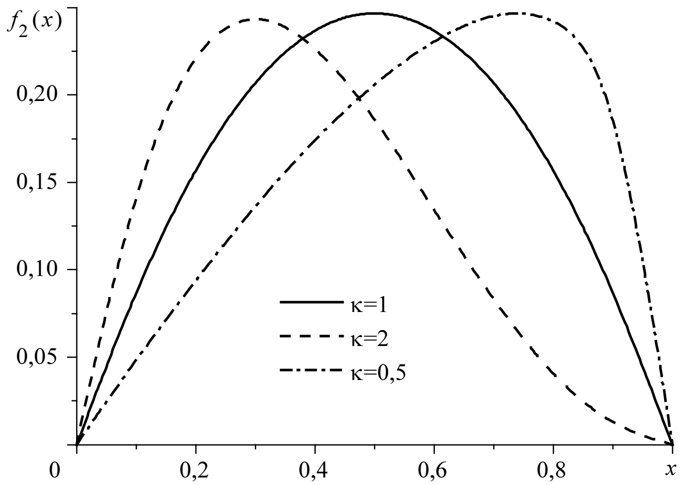

Рис. 2

Заметим еще, что

$$\overline{Q^2} = D_Q(t) + \bar{Q}^2(t) = \frac{a_2}{a_1} Q_0 \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa}\left[1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa}\right] + Q_0^2\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2\kappa}. \qquad (13)$$

4. Функция корреляции процесса *Q*(*t*)

Пусть $R(t_1,t_2) = M\{Q(t_1)Q(t_2)\}$ есть функция корреляции процесса $Q(t)$, и $R_0(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - M\{Q(t_1)\}M\{Q(t_2)\}$ – функция корреляции его флуктуаций.

Пусть $t_1 > t_2$. Тогда

$$dQ(t_2) = -\kappa\frac{Q(t_2)}{T-t_2}dt_2 + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{Q(t_2)}{T-t_2}}dw(t_2)\,. \qquad (14)$$

Умножив на $Q(t_1)$, имеем

$$d_{t_2}(Q(t_1)Q(t_2)) = -\kappa\frac{Q(t_1)Q(t_2)}{T-t_2}dt_2 + Q(t_1)\sqrt{\frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{Q(t_2)}{T-t_2}}dw(t_2)\,.$$

Усредняя по реализациям, получаем дифференциальное уравнение для $R(t_1,t_2)$:

$$\frac{\partial R(t_1,t_2)}{\partial t_2} = -\kappa\frac{R(t_1,t_2)}{T-t_2}\,.$$

Его общее решение имеет вид $R(t_1,t_2)=C(t_1)(T-t_2)^{\kappa}$. Полагая $t_2=t_1$, получаем

$$R(t_1,t_1)=C(t_1)(T-t_1)^{\kappa},\ C(t_1)=\frac{R(t_1,t_1)}{(T-t_1)^{\kappa}},$$

откуда и следует вид $R(t_1,t_2)$:

$$R(t_1,t_2)=R(t_1,t_1)\frac{(T-t_2)^{\kappa}}{(T-t_1)^{\kappa}}.$$

Так как
$$R(t_1,t_1)=R_0(t_1,t_1)+\frac{Q_0^2}{T^{2\kappa}}(T-t_1)^{2\kappa},$$

то
$$R(t_1,t_2)=R_0(t_1,t_1)\frac{(T-t_2)^{\kappa}}{(T-t_1)^{\kappa}}+\frac{Q_0^2}{T^{2\kappa}}(T-t_2)^{\kappa}(T-t_1)^{\kappa}=$$

$$=R_0(t_1,t_1)\frac{(T-t_2)^{\kappa}}{(T-t_1)^{\kappa}}+M\{Q(t_1)\}M\{Q(t_2)\}.$$

Отсюда получаем явный вид функции корреляции флуктуаций

$$R_0(t_1,t_2)=R_0(t_1,t_1)\frac{(T-t_2)^{\kappa}}{(T-t_1)^{\kappa}}=D_Q(t_1)\frac{(T-t_2)^{\kappa}}{(T-t_1)^{\kappa}},\quad t_2>t_1, \tag{15}$$

или в явном виде при $t_2>t_1$

$$R_0(t_1,t_2)=\frac{a_2}{a_1}Q_0\left[1-\left(1-\frac{t_1}{T}\right)^{\kappa}\right]\left(1-\frac{t_2}{T}\right)^{\kappa}. \tag{16}$$

Для нормированной функции корреляции

$$r(t_1,t_2)=\frac{R_0(t_1,t_2)}{\sqrt{D_Q(t_1)D_Q(t_2)}}=\sqrt{\frac{\left[1-\left(1-\frac{t_1}{T}\right)^{\kappa}\right]\left(1-\frac{t_2}{T}\right)^{\kappa}}{\left(1-\frac{t_1}{T}\right)^{\kappa}\left[1-\left(1-\frac{t_2}{T}\right)^{\kappa}\right]}}. \tag{17}$$

При $\kappa=1$ эта формула переходит в соответствующую формулу из [1].

5. Математическое ожидание выручки и его оптимизация

Рассмотрим случай, когда зависимость $\lambda(c)$ может быть аппроксимирована прямой линией:

$$\lambda(c)=\lambda_0-\lambda_1\frac{c-c_0}{c_0}. \tag{18}$$

Здесь c_0 имеет смысл некоторой «стандартной» цены, так что $\lambda(c_0)=c_0$. Такая аппроксимация возможна, если отклонения цены c от c_0 незначительны.

В этом случае уравнение (3) приобретает вид

$$a_1\lambda(c)=a_1\left(\lambda_0+\lambda_1-\lambda_1\frac{c}{c_0}\right)=\frac{\kappa Q}{T-t},$$

откуда
$$c = c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{\kappa Q}{a_1\lambda_1(T-t)}\right). \qquad (19)$$

Так как в единицу времени в среднем совершается $\lambda(c)$ покупок, средний размер которых равен a_1 по цене c, то среднее значение выручки в единицу времени
$$ca_1\lambda(c) = c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{\kappa}{a_1\lambda_1}\frac{Q}{T-t}\right)\kappa\frac{Q}{T-t}. \qquad (20)$$

Усредняя по объему партии товара $Q(t)$, имеющегося в наличии в момент времени t, имеем
$$M\{ca_1\lambda(c)\} = c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\kappa\frac{\bar{Q}}{T-t}-c_0\frac{\kappa^2}{a_1\lambda_1}\frac{\overline{Q^2}}{(T-t)^2} =$$
$$= c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\kappa\frac{\bar{Q}}{T-t}-\frac{c_0\kappa^2}{a_1\lambda_1}\frac{D_Q+\bar{Q}^2}{(T-t)^2}. \qquad (21)$$

Подставляя сюда явные выражения для $\bar{Q}$ и D_Q, получим, что средняя выручка в единицу времени
$$M\{ca_1\lambda(c)\} = c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\kappa\frac{Q_0}{T-t}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa}-$$
$$-\frac{c_0\kappa^2 Q_0}{a_1\lambda_1(T-t)^2}\left\{\frac{a_2}{a_1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa}\left[1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa}\right]+\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2\kappa}Q_0^2\right\}. \qquad (22)$$

Отсюда средняя выручка за весь период торговой сессии
$$S = \int_0^T M\{ca_1\lambda(c)\}dt. \qquad (23)$$

Вычислим входящие сюда интегралы по времени. Имеем
$$\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa}\frac{dt}{T-t} = \int_0^1 z^{\kappa-1}dz = \frac{1}{\kappa}, \qquad (24)$$

где сделана замена переменных $z = 1-\frac{t}{T}$. Заметим, что этот интеграл имеет смысл при $\kappa > 0$.

Перейдем к вычислению интегралов, входящих в (23), с учетом (22) со знаком «минус». Первый такой интеграл имеет вид
$$\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\kappa}\frac{dt}{(T-t)^2} = \frac{1}{T}\int_0^1 z^{\kappa-2}dz = \frac{1}{T(\kappa-1)}$$

и конечен лишь при $\kappa > 1$.

Второй интеграл имеет вид
$$\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)^{2\kappa}\frac{dt}{(T-t)^2} = \frac{1}{T}\int_0^1 z^{2\kappa-2}dz = \frac{1}{T(2\kappa-1)}$$

и конечен при $\kappa > 0{,}5$.

Итак, для данной аппроксимации $\lambda(c)$ имеет смысл рассматривать лишь случай $\kappa > 1$. Для него

$$S = c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)Q_0 - \frac{c_0 a_2 Q_0}{a_1^2\lambda_1 T}\kappa^2\left(\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{2\kappa-1}\right)-\frac{c_0 Q_0^2}{a_1\lambda_1 T}\frac{\kappa^2}{2\kappa-1}. \qquad (25)$$

Задача выбора оптимального значения κ пронимает вид

$$\frac{c_0 Q_0}{a_1\lambda_1 T}\left[\frac{a_2}{a_1}\kappa^2\left(\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{2\kappa-1}\right)+Q_0\frac{\kappa^2}{2\kappa-1}\right]\Rightarrow \min_{\kappa},$$

или

$$\varphi(\kappa)=\frac{\kappa^3}{(\kappa-1)(2\kappa-1)}+\frac{Q_0 a_1}{a_2}\frac{\kappa^2}{2\kappa-1}\Rightarrow \min_{\kappa}. \qquad (26)$$

Приравнивая нулю производную от этого выражения по κ, получим

$$\frac{3\kappa^2(\kappa-1)(2\kappa-1)-\kappa^3(4\kappa-3)}{(\kappa-1)^2}+\frac{a_1 Q_0}{a_2}(2\kappa(2\kappa-1)-2\kappa^2)=0. \qquad (27)$$

После некоторых упрощений имеем выражение

$$\frac{a_1 Q_0}{a_2}=-\frac{\kappa(2\kappa^2-6\kappa+3)}{2(\kappa-1)^3}, \qquad (28)$$

которое надо решить в области $\kappa > 1$.

Рассмотрим уравнение $2\kappa^2-6\kappa+3=0$. Его корни

$$\kappa_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2},$$

так что

$$2\kappa^2-6\kappa+3=2\left(\kappa-\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\kappa-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right),$$

и поэтому это выражение меньше нуля в области

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2}<\kappa<\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \text{ или } 0{,}634<\kappa<2{,}366.$$

Именно в этой области правая часть (28) положительна. Так как имеется дополнительное условие $\kappa > 1$, то решение уравнения (28) имеет смысл лишь в области $1<\kappa<\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}=2{,}366...$

График зависимости оптимального значения κ от параметра $a_1 Q_0/a_2$ приведен на рис 3.

Заметим, что при больших значениях параметра $a_1 Q_0/a_2$ оптимальное значение κ мало отличается от 1. Полагая $\kappa = 1 + \varepsilon$, получаем, что при малых ε

$$-\frac{\kappa(2\kappa^2-6\kappa+3)}{2(\kappa-1)^3}\approx\frac{1}{2\varepsilon^3},$$

поэтому при $a_1 Q_0/a_2 >> 1$

$$\kappa\approx 1+\sqrt[3]{\frac{a_2}{2a_1 Q_0}}. \qquad (29)$$

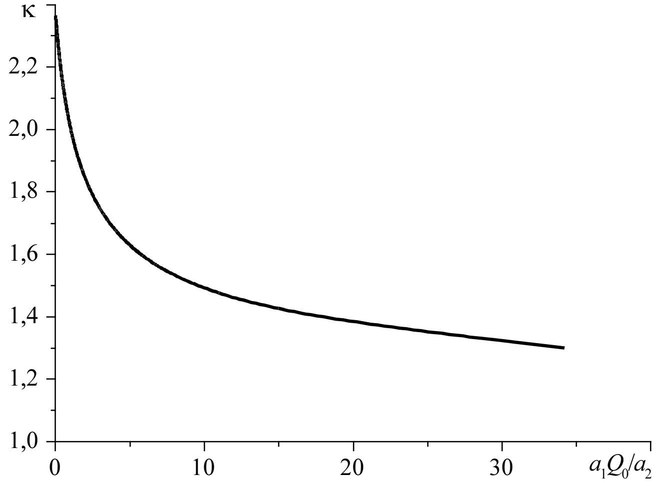

Рис. 3

6. Определение оптимального объема партии товара, выставляемой на продажу

Существует также оптимальный объем партии товара Q_0, выставляемой на продажу. Так как себестоимость единицы продукции равна d, то прибыль, получаемая от продажи партии товара объема Q_0, равна (с учетом (25))

$$\mathrm{P} = \int_0^T M\{ca_1\lambda(c)\}dt - d\cdot Q_0 = c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)Q_0 - d\cdot Q_0 -$$

$$-\frac{c_0a_2Q_0}{a_1^2\lambda_1T}\frac{\kappa^3}{(\kappa-1)(2\kappa-1)} - \frac{c_0Q_0^2}{a_1\lambda_1T}\frac{\kappa^2}{2\kappa-1},$$

и оптимальный объем партии Q_0 определяется из условия $\partial\mathrm{P}/\partial Q_0 = 0$:

$$c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) - d - \frac{c_0a_2}{a_1^2\lambda_1T}\frac{\kappa^3}{(\kappa-1)(2\kappa-1)} = \frac{2c_0Q_0}{a_1\lambda_1T}\frac{\kappa^2}{2\kappa-1}.$$

Отсюда

$$Q_0 = \frac{\left(1+\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) - \dfrac{d}{c_0} - \dfrac{a_2}{a_1^2\lambda_1T}\dfrac{\kappa^3}{(\kappa-1)(2\kappa-1)}}{\dfrac{2}{a_1\lambda_1T}\dfrac{\kappa^2}{2\kappa-1}} =$$

$$= \frac{a_1\lambda_1T}{2}\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{d}{c_0}\right)\frac{2\kappa-1}{\kappa^2} - \frac{a_2}{2a_1}\frac{\kappa}{(\kappa-1)}. \tag{30}$$

Можно решать и более глобальную оптимизационную задачу – максимизацию прибыли по величинам Q_0 и κ. Это означает, что мы должны решать совместно систему (28) и (30):

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{a_2} Q_0 = -\dfrac{\kappa(2\kappa^2 - 6\kappa + 3)}{2(\kappa - 1)^3}, \\ Q_0 = \dfrac{a_1 \lambda_1 T}{2} \left(1 + \dfrac{\lambda_0}{\lambda_1} - \dfrac{d}{c_0} \right) \dfrac{2\kappa - 1}{\kappa^2} - \dfrac{a_2}{2a_1} \dfrac{\kappa}{(\kappa - 1)}. \end{cases} \tag{31}$$

Исключая Q_0, получим уравнение для к:

$$\frac{a_1^2 \lambda_1 T}{a_2} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{d}{c_0} \right) = -\frac{\kappa^3 (\kappa^2 - 4\kappa + 2)}{(\kappa - 1)^3 (2\kappa - 1)}, \tag{32}$$

которое надо решить в области $\kappa > 1$ и условии $\kappa^2 - 4\kappa + 2 < 0$.

Уравнение $\kappa^2 - 4\kappa + 2 = 0$ имеет корень, больший 1 при $\kappa = 2 + \sqrt{2} \approx 3,414$.

График функции

$$\psi(\kappa) = -\frac{\kappa^3 (\kappa^2 - 4\kappa + 2)}{(\kappa - 1)^3 (2\kappa - 1)}$$

в области $1 < \kappa < 3{,}414$ приведен на рис 4. Отсюда, зная a_1, a_2, λ_0, λ_1, T, d и c_0, можно найти оптимальное значение к, а затем и оптимальное значение объема партии Q_0, выставляемой на продажу.

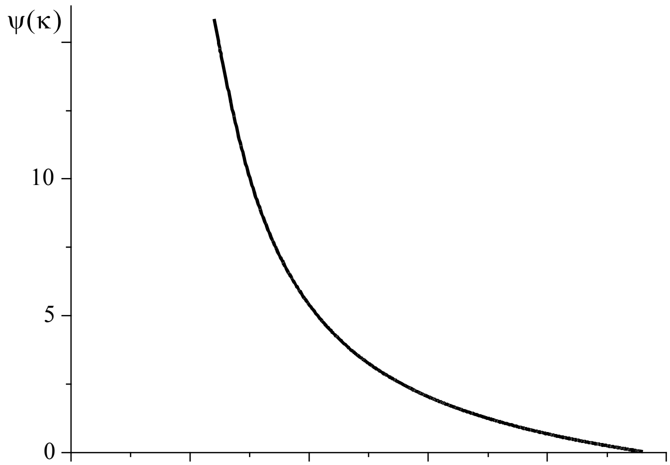

Рис. 4

При больших $\lambda_1 T$ левая часть уравнения (32) велика и поэтому к мало отличается от 1. Полагая $\kappa = 1 + \varepsilon$, придем к уравнению

$$\frac{a_1^2 \lambda_1 T}{a_2} \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{d}{c_0} \right) = \frac{1}{\varepsilon^3},$$

откуда

$$\kappa = 1 + \varepsilon = 1 + \sqrt[3]{\frac{a_2}{a_1^2 \lambda_1 T \left(1 + \dfrac{\lambda_0}{\lambda_1} - \dfrac{d}{c_0} \right)}}; \tag{34}$$

$$Q_0 \approx \frac{a_2}{2a_1\varepsilon^3} = \frac{a_1\lambda_1 T}{2}\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{d}{c_0}\right). \tag{35}$$

7. Плотность вероятностей процесса *Q*(*t*)

Рассмотрим $f(Q,t) = e^{-pQ}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial Q} = -pe^{-pQ},\ \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} = p^2 e^{-pQ}.$$

Используя формулу Ито, получим, что процесс e^{-pQ} удовлетворяет уравнению

$$d\left(e^{-pQ}\right) = \left(\kappa\frac{Q}{T-t}pe^{-pQ} + \frac{a_2}{2a_1}\kappa\frac{Q}{T-t}p^2e^{-pQ}\right)dt - pe^{-pQ}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}\kappa\frac{Q}{T-t}}dw(t). \tag{35}$$

Рассмотрим функцию $\Phi(p,t) = M\{e^{-pQ}\}$, которая является преобразованием Лапласа от плотности вероятностей $p(Q,t)$ значений процесса $Q(t)$ в момент времени t. Тогда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p} = -M\left\{Qe^{-pQ}\right\},$$

и, усредняя (35), получим

$$d_t\Phi(p,t) = -\frac{1}{T-t}\left(\kappa p\frac{\partial\Phi}{\partial p} + \frac{a_2}{2a_1}\kappa p^2\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)dt, \tag{36}$$

или, в явном виде,
$$(T-t)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \kappa p\left(1+\frac{a_2}{2a_1}p\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0. \tag{37}$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $\beta = 2a_1/a_2$.

Уравнение (37) является линейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Оно решается методом характеристик, уравнение для которых имеет вид

$$\frac{dt}{T-t} = \kappa\frac{dp}{p(1+p/\beta)} = \kappa\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\beta}\right)dp. \tag{38}$$

Интегрируя, получим

$$-\ln(T-t) = \kappa(\ln p - \ln(p+\beta)) - \ln C_1,$$

или
$$-\frac{1}{\kappa}\ln(T-t) = \ln p - \ln(p+\beta) - \ln C, \tag{39}$$

что и дает явный вид характеристик

$$C = \frac{p}{p+\beta}(T-t)^{1/\kappa}. \tag{40}$$

Поэтому общее решение уравнения (37) имеет вид

$$\Phi(p,t) = \varphi\left(\frac{p}{p+\beta}(T-t)^{1/\kappa}\right), \tag{41}$$

где $\varphi(\cdot)$ – произвольная функция.

Ее вид найдем из того условия, что при $t = 0$ $Q(0) = Q_0$ с вероятностью 1. Поэтому $p(Q,0) = \delta(Q - Q_0)$, откуда следует, что $\Phi(p,0) = e^{-pQ_0}$. Это приводит к уравнению

$$\varphi\left(\frac{p}{p+\beta}T^{1/\kappa}\right) = e^{-pQ_0}\ . \tag{42}$$

Обозначим $$\frac{p}{p+\beta}T^{1/\kappa} = z\ .$$

Тогда $$p = \frac{\beta z}{T^{1/\kappa} - z}\ ,$$

и уравнение (42) дает $$\varphi(z) = \exp\left(-\frac{\beta z Q_0}{T^{1/\kappa} - z}\right). \tag{43}$$

Отсюда получаем явный вид $\Phi(p, t)$:

$$\Phi(p,t) = \varphi\left(\frac{p}{p+\beta}(T-t)^{1/\kappa}\right) = \exp\left(-\frac{p\beta(1-t/T)^{1/\kappa}Q_0}{p+\beta-p(1-t/T)^{1/\kappa}}\right). \tag{44}$$

В дальнейшем комбинацию $(1-t/T)^{1/\kappa}$ будем обозначать как ρ, так что

$$\Phi(p,t) = \exp\left(-\frac{p\beta\rho Q_0}{p+\beta-p\rho}\right). \tag{45}$$

Таблицы обратного преобразования Лапласа дают [3, ф-ла 23.65]

$$\exp\left(\frac{1}{a(p+b)}\right) - 1 \Leftrightarrow \frac{e^{-bQ}}{\sqrt{aQ}} I_1\left(2\sqrt{\frac{Q}{a}}\right), \tag{46}$$

где $I_1(\cdot)$ – функция Бесселя от мнимого аргумента.

Приведем (46) к этому виду. Имеем

$$-\frac{p\beta\rho Q_0}{p(1-\rho)+\beta} = A + \frac{B}{p(1-\rho)+\beta}\ .$$

Очевидно, что $$A = -\lim_{p\to\infty}\left(\frac{p\beta\rho Q_0}{p(1-\rho)+\beta}\right) = \frac{\beta\rho Q_0}{1-\rho}\ .$$

Так как $$\frac{p\beta\rho Q_0}{p(1-\rho)+\beta} - \frac{\beta\rho Q_0}{1-\rho} = -\frac{\beta^2\rho Q_0}{(p(1-\rho)+\beta)(1-\rho)}\,,$$

то $$-\frac{p\beta\rho Q_0}{p(1-\rho)+\beta} = -\frac{\beta\rho Q_0}{1-\rho} + \frac{\beta^2\rho Q_0}{(p(1-\rho)+\beta)(1-\rho)}\,.$$

Итак, $$\Phi(p,t) = \exp\left(-\frac{\beta\rho Q_0}{1-\rho}\right)\left[\exp\left(\frac{\beta^2\rho Q_0}{(p(1-\rho)+\beta)(1-\rho)}\right) - 1 + 1\right] =$$

$$= \exp\left(-\frac{\beta\rho Q_0}{1-\rho}\right) + \exp\left(-\frac{\beta\rho Q_0}{1-\rho}\right)\left[\exp\left(\frac{\beta^2\rho Q_0}{(p+\beta/(1-\rho))(1-\rho)^2}\right) - 1\right].$$

Сравнивая это с (46), получаем, что

$$a = \frac{(1-\rho)^2}{\beta^2 \rho Q_0}, \; b = \frac{\beta}{1-\rho},$$

и поэтому для $p(Q,t)$ имеем

$$p(Q,t) = \exp\left(-\frac{\beta\rho Q_0}{1-\rho}\right)\left[\delta(Q) + e^{-\beta Q/(1-\rho)}\sqrt{\frac{\beta^2\rho Q_0}{(1-\rho)^2 Q}}I_1\left(2\sqrt{\frac{\beta^2\rho Q_0 Q}{(1-\rho)^2}}\right)\right]. \qquad (47)$$

8. Распределение вероятностей длительности продажи товара

Отметим особую роль слагаемого, содержащего дельта-функцию. Она возникает потому, что величина покупки является случайной и, в принципе, может прийти покупатель и купить весь оставшийся товар, и тогда торговля закончится. Математически это происходит потому, что существует точка, где у процесса $Q(t)$ равны нулю и коэффициент сноса и коэффициент диффузии, поэтому при $t > t_0$ $Q(t) = 0$.

Однако это позволяет вычислить характеристики длительности продажи товара. Обозначим через τ величину промежутка времени от начала торговой сессии до того момента, когда будет продан весь товар, то есть длительность продажи товара. Тогда из вида коэффициента при дельта-функции следует, что

$$P\{\tau \le t\} = F_\tau(t) = \exp\left(-\frac{\beta\rho Q_0}{1-\rho}\right) = \exp\left(-\beta Q_0 \frac{(1-t/T)^{1/\kappa}}{1-(1-t/T)^{1/\kappa}}\right), \qquad (48)$$

что и дает функцию распределения величины τ.

Графики $F_\tau(t)$ для различных значений параметров βQ_0 и κ приведены на рис. 5 и 6.

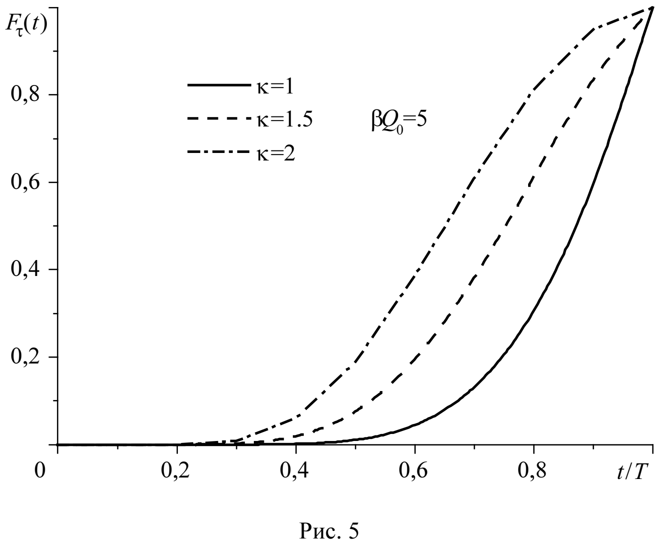

Рис. 5

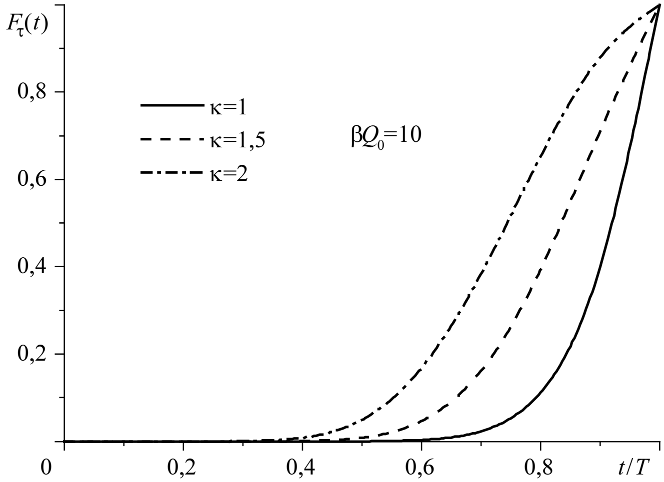

Рис. 6

Это позволяет вычислить математическое ожидание длительности продажи. Делая замену переменных $1-t/T=z$, получим

$$M\{\tau\}=\int_0^T[1-F_\tau(t)]dt=T\left[1-\int_0^1\exp\left(-\beta Q_0\frac{z^{1/\kappa}}{1-z^{1/\kappa}}\right)dz\right]. \tag{49}$$

При больших значениях βQ_0 показатель экспоненты быстро убывает с ростом z. Поэтому можно пренебречь $z^{1/\kappa}$ по сравнению с 1 и записать

$$M\{\tau\}\approx T\left[1-\int_0^1\exp\left(-\beta Q_0 z^{1/\kappa}\right)dz\right].$$

Делая замену переменных $\beta Q_0 z^{1/\kappa}=u$, получим

$$M\{\tau\}\approx T\left[1-\frac{\kappa}{(\beta Q_0)^\kappa}\int_0^\infty u^{\kappa-1}e^{-u}du\right]=T\left[1-\frac{\Gamma(\kappa+1)}{(\beta Q_0)^\kappa}\right], \tag{50}$$

что позволяет оценить время, когда весь товар будет продан.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новицкая Е.В.*, *Терпугов А.Ф.* Оптимизация розничной продажи скоропортящейся продукции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 93 с.
2. *Терпугов А.Ф.* Математика рынка ценных бумаг. Томск: Изд-во НТЛ, 2004. 163 с.
3. *Диткин В.А.*, *Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 465 с.

Статья представлена кафедрой программной инженерии факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 12 сентября 2007 г.