

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.2

К.И. Лившиц, Л.Ю. Сухотина, И.Ю. Шифердекер

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НЕКОММЕРЧЕСКОГО ФОНДА ПРИ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ ПЛАТЕЖЕЙ

Исследуются статистические характеристики математической модели деятельности некоммерческого фонда при дважды стохастическом потоке платежей и релейном управлении капиталом фонда

1. Математическая модель изменения капитала

Под некоммерческим фондом понимается организация, созданная для сбора и распределения денежных средств без получения прибыли. Построению и исследованию моделей некоммерческих фондов посвящены, например, работы [1 – 4]. Среди некоммерческих фондов особую группу составляют так называемые государственные внебюджетные фонды РФ. Основная особенность деятельности этих фондов состоит в том, что поступление и расходование средств внебюджетных фондов определяется законодательством, которое устанавливает не только размеры страховых взносов, но и временные границы перечисления средств в фонды. Так, в настоящее время перечисление средств во внебюджетные фонды должно осуществляться до 15 числа месяца, следующего за отчетным. Этот факт приводит к тому, что интенсивность потока страховых платежей имеет существенно различные значения в первой и второй половине месяца. В то же время моменты изменения интенсивности потока зависят от многих случайных факторов и не могут рассматриваться как детерминированные. Подходящей моделью является дважды стохастический пуассоновский поток [6] с двумя состояниями интенсивности $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$.

Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $s(t)$ в момент времени t . В работе предполагается, что с капиталом фонда могут происходить следующие изменения:

1. В фонд поступают денежные средства. Поступающие денежные суммы (премии) являются независимыми одинаково распределенными величинами с экспоненциальным распределением

$$\varphi(x) = \frac{1}{a} \exp\left\{-\frac{x}{a}\right\}, \quad x \geq 0. \quad (1)$$

Будем считать, что моменты поступления денежных средств образуют дважды стохастический пуассоновский поток с переменной интенсивностью $\lambda(t)$, которая может принимать два значения $\lambda(t) = \lambda_1$ и $\lambda(t) = \lambda_2$. Переход из состояния $\lambda(t) = \lambda_1$ в состояние $\lambda(t) = \lambda_2$ за малое время Δt происходит с вероятностью $\alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$, а из

состояния $\lambda(t) = \lambda_2$ в состояние $\lambda(t) = \lambda_1$ с вероятностью $\alpha_2\Delta t + o(\Delta t)$. Финальные вероятности состояний $\lambda(t) = \lambda_1$ и $\lambda(t) = \lambda_2$ равны соответственно

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (2)$$

2. Фонд расходует поступившие денежные средства. Будем считать, что расходование денежных средств происходит непрерывно во времени со скоростью $b(s)$, так что за время Δt выплата составляет $b(s)\Delta t$. Предполагается, что управление расходованием денежных средств имеет релейный характер т.е.

$$b(s) = \begin{cases} b_0, & s < s_0, \\ b_1, & s \geq s_0, \end{cases} \quad (3)$$

для некоторого порогового значения капитала s_0 . Так как фонд не имеет цели получения прибыли, будем считать, что

$$b_0 = (1 - \theta)\lambda_0 a, \quad b_1 = (1 + \theta)\lambda_0 a, \quad (4)$$

где

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad (5)$$

– средняя интенсивность потока страховых выплат и $0 < \theta < 1$. Таким образом, при $s < s_0$ фонд расходует в среднем меньше, чем собирает, а при $s \geq s_0$ расходует в среднем больше, чем собирает.

Наконец, будем считать, что при $s < 0$ фонд не прекращает своей деятельности, но наступает период неплатежеспособности фонда, обязательства фонда выполняются по мере поступления денежных средств.

2. Плотность распределения капитала

Обозначим $p_i(s, t)$ – плотность распределения вероятностей капитала фонда s в момент времени t при условии, что интенсивность поступления денежных средств $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$. Рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$. Пусть в момент времени $t + \Delta t$ $\lambda(t + \Delta t) = \lambda_1$ и капитал фонда $s(t) = s$. Тогда на интервале времени длиной Δt могли произойти следующие события:

1. Интенсивность $\lambda(t) = \lambda_1$ не изменилась, и денежные средства не поступали, т.е. $\Delta s = -b(s)\Delta t$. Вероятность этого события равна

$$(1 - \alpha_1\Delta t)(1 - \lambda_1\Delta t) = 1 - (\alpha_1 + \lambda_1)\Delta t + o(\Delta t).$$

2. Интенсивность $\lambda(t) = \lambda_1$ не изменилась, имеются денежные поступления, т.е. $\Delta s = -b(s)\Delta t + x$. Вероятность этого события равна

$$(1 - \alpha_1\Delta t)\lambda_1\Delta t + o(\Delta t) = \lambda_1\Delta t + o(\Delta t).$$

3. Интенсивность $\lambda(t)$ перешла из состояния $\lambda(t) = \lambda_2$ в состояние $\lambda(t) = \lambda_1$ и $\Delta s = -b(s)\Delta t$ (денежные средства не поступали). Вероятность этого события равна

$$\alpha_2\Delta t(1 - \lambda_1\Delta t) = \alpha_2\Delta t + o(\Delta t).$$

4. Вероятности иных событий имеют порядок $o(\Delta t^2)$.

Тогда по формуле полной вероятности [5]

$$\begin{aligned} p_1(s, t + \Delta t) = & (1 - (\alpha_1 + \lambda_1)\Delta t)p_1(s + b(s)\Delta t, t + \\ & + \lambda_1\Delta t \int_0^\infty p_1(s + b(s)\Delta t - x, t)\varphi(x)dx + \alpha_2\Delta t p_2(s + b(s)\Delta t, t) + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (6)$$

Считая функцию $p_i(s, t)$ дифференцируемой по s и t , получим из (6), переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{\partial p_1(s, t)}{\partial t} - b(s) \frac{\partial p_1(s, t)}{\partial s} = -(\alpha_1 + \lambda_1) p_1(s, t) + \lambda_1 \int_0^\infty p_1(s - x, t) \varphi(x) dx + \alpha_2 p_2(s, t).$$

Проводя аналогичные выводы для $p_2(s, t)$, получим

$$\frac{\partial p_2(s, t)}{\partial t} - b(s) \frac{\partial p_2(s, t)}{\partial s} = -(\alpha_2 + \lambda_2) p_2(s, t) + \lambda_2 \int_0^\infty p_2(s - x, t) \varphi(x) dx + \alpha_1 p_1(s, t).$$

Рассмотрим далее стационарный случай. Пусть $p_i(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(s, t)$, $i = 1, 2$. Перенесем начало отсчета в точку $s = s_0$. Тогда для $p_1(s)$ и $p_2(s)$ в области $s < 0$ справедливы уравнения

$$\begin{aligned} b_0 \frac{dp_1(s)}{ds} &= (\alpha_1 + \lambda_1) p_1(s) - \lambda_1 \int_0^\infty p_1(s - x) \varphi(x) dx + \alpha_2 p_2(s), \\ b_0 \frac{dp_2(s)}{ds} &= (\alpha_2 + \lambda_2) p_2(s) - \lambda_2 \int_0^\infty p_2(s - x) \varphi(x) dx + \alpha_1 p_1(s), \end{aligned} \quad (7)$$

а в области $s > 0$

$$\begin{aligned} b_1 \frac{dp_1(s)}{ds} &= (\alpha_1 + \lambda_1) p_1(s) - \lambda_1 \int_0^\infty p_1(s - x) \varphi(x) dx - \alpha_2 p_2(s), \\ b_1 \frac{dp_2(s)}{ds} &= (\alpha_2 + \lambda_2) p_2(s) - \lambda_2 \int_0^\infty p_2(s - x) \varphi(x) dx - \alpha_1 p_1(s). \end{aligned} \quad (8)$$

Кроме того, плотности $p_i(s)$ должны удовлетворять условиям нормировки

$$\int_{-\infty}^\infty p_i(s) ds = \pi_i, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Решение системы (7) в области $s < 0$ будем искать в виде

$$p_1(s) = A_1 e^{k_1 s} + A_2 e^{k_2 s}, \quad p_2(s) = B_1 e^{k_1 s} + B_2 e^{k_2 s}, \quad (10)$$

где $k_1, k_2 > 0$. Подставляя (10) в (7) и приравнявая коэффициенты при $e^{k_1 s}, e^{k_2 s}$, получим систему уравнений для определения A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$\begin{aligned} A_1(r_0(k_1, \lambda_1) - \alpha_1) + \alpha_2 B_1 &= 0, & B_1(r_0(k_1, \lambda_2) - \alpha_2) + \alpha_1 A_1 &= 0, \\ A_2(r_0(k_2, \lambda_1) - \alpha_1) + \alpha_2 B_2 &= 0, & B_2(r_0(k_2, \lambda_2) - \alpha_2) + \alpha_1 A_2 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где} \quad r_i(k, \lambda) = k(b_i - \frac{\lambda a}{1 + ka}), \quad i = 0, 1. \quad (12)$$

Первая пара уравнений из (11) образует однородную линейную систему относительно A_1, A_2 . Для существования нетривиального решения системы ее определитель должен быть равен нулю, т.е.

$$\Delta = (r_0(k_1, \lambda_1) - \alpha_1)(r_0(k_1, \lambda_1) - \alpha_1) - \alpha_1 \alpha_2 = 0$$

или

$$r_0(k_1, \lambda_1) r_0(k_1, \lambda_2) - \alpha_1 r_0(k_1, \lambda_2) - \alpha_2 r_0(k_1, \lambda_1) = 0.$$

Условие существования нетривиального решения второй пары уравнений системы (11) имеет вид (13), где k_1 заменяется на k_2 . Таким образом, k_1 и k_2 должны быть положительными корнями уравнения

$$zf_0(z) = r_0(z, \lambda_1)r_0(z, \lambda_2) - \alpha_1 r_0(z, \lambda_2) - \alpha_2 r_0(z, \lambda_1) = 0,$$

где

$$f_0(z) = z \left(b_0 - \frac{\lambda_1 a}{1 + za} \right) \left(b_0 - \frac{\lambda_2 a}{1 + za} \right) - \alpha_1 \left(b_0 - \frac{\lambda_2 a}{1 + za} \right) - \alpha_2 \left(b_0 - \frac{\lambda_1 a}{1 + za} \right). \quad (14)$$

Исследуем функцию $f_0(z)$. При $z \rightarrow \infty$ $f_0(z) \rightarrow \infty$, а при $z \rightarrow -\infty$ $f_0(z) \rightarrow -\infty$. Далее,

$$f_0(0) = -\alpha_1(b_0 - \lambda_2 a) - \alpha_2(b_0 - \lambda_1 a)$$

или, с учетом (4) и (5),

$$f_0(0) = (\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1) a \theta > 0.$$

Пусть $\tilde{z}$ – корень уравнения

$$\alpha_1 \left(b_0 - \frac{\lambda_2 a}{1 + za} \right) + \alpha_2 \left(b_0 - \frac{\lambda_1 a}{1 + za} \right) = 0.$$

Тогда

$$\tilde{z} = \frac{\lambda_0 a - b_0}{ab_0} = \frac{\theta}{(1 - \theta)a} > 0$$

и

$$f_0(\tilde{z}) = \frac{\tilde{z}^2 a^2 (\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2)}{(1 + a\tilde{z})^2} < 0,$$

так как либо $\lambda_1 < \lambda_0$, либо $\lambda_2 < \lambda_0$. Отсюда следует, что уравнение $f_0(z) = 0$ имеет три корня: $k_0 < 0$; $k_1, k_2 > 0$ и, следовательно, решение в виде (10) существует. При этом из системы (11) коэффициенты B_1, B_2 могут быть выражены следующим образом:

$$B_1 = v(b_0, k_1) A_1, \quad B_2 = v(b_0, k_2) A_2, \quad (15)$$

где

$$v(b, k) = -\frac{b(1 + ak) - \lambda_1 a}{b(1 + ak) - \lambda_2 a}. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь область $s > 0$. Решение системы (8) будем искать в виде

$$p_1(s) = C_1 e^{m_1 s} + C_2 e^{m_2 s}, \quad p_2(s) = D_1 e^{m_1 s} + D_2 e^{m_2 s}, \quad (17)$$

где $m_1, m_2 < 0$. Подставляя (17) в (8) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях экспоненты, получим следующую систему для определения C_1, C_2, D_1, D_2 :

$$\begin{aligned} C_1(r_1(m_1, \lambda_1) - \alpha_1) + \alpha_2 D_1 &= 0, & D_1(r_1(m_1, \lambda_2) - \alpha_2) + \alpha_1 C_1 &= 0, \\ C_2(r_1(m_2, \lambda_1) - \alpha_1) + \alpha_2 D_2 &= 0, & D_2(r_1(m_2, \lambda_2) - \alpha_2) + \alpha_1 C_2 &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $r_i(m, \lambda)$ определено в (12). Аналогично предыдущему случаю, первая и вторая пары уравнений системы (18) имеют нетривиальное решение, если m_1, m_2 являются корнями уравнения $f_i(z) = 0$, где $f_i(z)$ определяется соотношением (14) с заменой b_0 на b_1 . Можно показать, что уравнение $f_i(z) = 0$ имеет три корня $m_1, m_2 < 0$, $m_3 > 0$ и, следовательно, решение системы (8) в виде (17) существует. При этом из системы (18) коэффициенты D_1, D_2 могут быть выражены в виде

$$D_1 = v(b_1, m_1) C_1, \quad D_2 = v(b_1, m_2) C_2. \quad (19)$$

Получим теперь недостающие уравнения для определения коэффициентов решений (10) и (17). Во-первых, решения (10), (17) в точке $s = 0$ должны удовлетворять условиям сшивания

$$p_1(s) = C_1 e^{m_1 s} + C_2 e^{m_2 s}, \quad p_2(s) = D_1 e^{m_1 s} + D_2 e^{m_2 s},$$

где $p_i(-x)$ при $x > 0$ определяются формулами (10), а $p_i(0+0)$ формулами (17). Откуда получаем

$$\frac{C_1}{1+am_1} + \frac{C_2}{1+am_2} = \frac{A_1}{1+ak_1} + \frac{A_2}{1+ak_2}, \quad \frac{D_1}{1+am_1} + \frac{D_2}{1+am_2} = \frac{B_1}{1+ak_1} + \frac{B_2}{1+ak_2}. \quad (20)$$

Наконец, условия нормировки (9) дают

$$\frac{C_1}{m_1} + \frac{C_2}{m_2} = \frac{A_1}{k_1} + \frac{A_2}{k_2} - \pi_1, \quad \frac{D_1}{m_1} + \frac{D_2}{m_2} = \frac{B_1}{k_1} + \frac{B_2}{k_2} - \pi_2. \quad (21)$$

Таким образом, для построения решения необходимо определить корни многочленов $f_0(z)$ и $f_1(z)$, а затем решить систему линейных уравнений (11), (18), (20), (21), которая соотношениями (15) и (19) сводится к системе из четырех уравнений. Явный вид получившегося решения не приводится ввиду его громоздкости.

На рис. 1 приведены графики $p_i(s)$ при следующих значениях параметров: $\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = 10$, $a = 1$, $\alpha_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 0,6$.

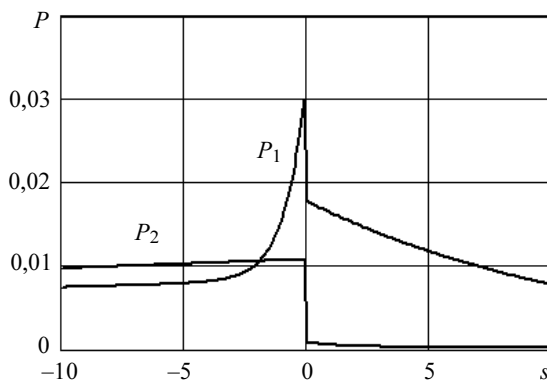


Рис. 1

3. Среднее значение длительности периода неплатежеспособности

Неплатежеспособность фонда наступает при $s < 0$. Обозначим через $\bar{t}_i(s)$ — среднюю продолжительность периода неплатежеспособности фонда при условии, что в начале периода капитал фонда равен $s(t) = s$ ($s < 0$) и интенсивность поступления денежных средств $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$. Пусть в начальный момент времени t интенсивность $\lambda(t) = \lambda_1$. По прошествии времени Δt капитал фонда изменится на случайную величину Δs , а интенсивность $\lambda(t)$ либо останется равной λ_1 с вероятностью $1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$, либо примет значение λ_2 с вероятностью $\alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$. Усредняя по возможным ситуациям, получим

$$\begin{aligned} \bar{t}_1(s) &= \Delta t + (1 - \lambda_1 \Delta t)(1 - \alpha_1 \Delta t) \bar{t}_1(s - b_0 \Delta t) + \\ &+ \lambda_1 \Delta t (1 - \alpha_1 \Delta t) \int_0^{-s} \bar{t}_1(s+x) \varphi(x) dx + \alpha_1 \Delta t \bar{t}_2(s - b_0 \Delta t) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

где учтено, что при $s + x > 0$ период неплатежеспособности заканчивается. Считая функцию $\bar{t}_1(s)$ дифференцируемой и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$b_0 \frac{d\bar{t}_1(s)}{ds} + (\lambda_1 + \alpha_1)\bar{t}_1(s) - \lambda_1 \int_0^{-s} \bar{t}_1(s+x)\varphi(x)dx - \alpha_1\bar{t}_2(s) = 1. \quad (22)$$

Аналогично,

$$b_0 \frac{d\bar{t}_2(s)}{ds} + (\lambda_2 + \alpha_2)\bar{t}_2(s) - \lambda_2 \int_0^{-s} \bar{t}_2(s+x)\varphi(x)dx - \alpha_2\bar{t}_1(s) = 1. \quad (23)$$

Решение $\bar{t}_i(s)$ системы (22), (23) будем искать в виде

$$\bar{t}_i(s) = A_i s + B_i + C_i e^{ks}, \quad i = 1, 2, \quad k > 0. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (22) и (23), получим систему уравнений для определения A_i, B_i, C_i :

$$\begin{aligned} C_1(\alpha_1 + ku_0(\lambda_1, k)) - \alpha_1 C_2 &= 0, \quad C_2(\alpha_2 + ku_0(\lambda_2, k)) - \alpha_2 C_1 = 0, \\ A_1 a + B_1 - \frac{C_1}{ak-1} &= 0, \quad A_2 a + B_2 - \frac{C_2}{ak-1} = 0, \\ A_1 l_0(\lambda_1) + \alpha_1(B_1 - B_2) &= 1, \quad A_2 l_0(\lambda_2) + \alpha_2(B_2 - B_1) = 1, \quad A_1 = A_2, \end{aligned} \quad (25)$$

где
$$u_i(\lambda, k) = b_i + \frac{\lambda a}{ak-1}, \quad l_i(\lambda) = b_i - \lambda a, \quad i = 0, 1. \quad (26)$$

В результате получаем, что шесть коэффициентов A_i, B_i, C_i при данном k должны определяться из системы семи уравнений. Для того чтобы получившаяся система уравнений была совместной, необходимо, чтобы первые два уравнения системы были пропорциональны. Откуда следует, что параметр k должен удовлетворять уравнению

$$(\alpha_1 + ku_0(\lambda_1, k))(\alpha_2 + ku_0(\lambda_2, k)) - \alpha_1 \alpha_2 = 0. \quad (27)$$

Можно показать, что уравнение (27) имеет четыре корня $k_1 > 0, k_2 = 0, k_3, k_4 < 0$. Поэтому в (24) $k = k_1$, так как иначе $\bar{t}_i(s)$ имеет экспоненциальный характер возрастания. Окончательно, с учетом (27), система (25) примет вид

$$\begin{aligned} \alpha_2 C_1 u_0(\lambda_1, k) - \alpha_1 C_2 u_0(\lambda_2, k) &= 0, \\ A_1 a + B_1 - \frac{C_1}{ak-1} &= 0, \quad A_2 a + B_2 - \frac{C_2}{ak-1} = 0, \\ A_1 l_0(\lambda_1) + \alpha_1(B_1 - B_2) &= 1, \quad A_2 l_0(\lambda_2) + \alpha_2(B_2 - B_1) = 1, \quad A_1 = A_2, \end{aligned} \quad (28)$$

где $k = k_1$ – положительный корень уравнения (27). Решение системы (25) имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{l_0(\lambda_1)\alpha_2 + l_0(\lambda_2)\alpha_1}, \\ C_1 &= \alpha_1 u_0(\lambda_2, k) \frac{l_0(\lambda_1) - l_0(\lambda_2)}{l_0(\lambda_1)\alpha_2 + l_0(\lambda_2)\alpha_1} m, \\ C_2 &= \alpha_2 u_0(\lambda_1, k) \frac{l_0(\lambda_2) - l_0(\lambda_1)}{l_0(\lambda_1)\alpha_2 + l_0(\lambda_2)\alpha_1} m, \\ B_1 &= -A_1 a - \frac{C_1}{(ak-1)}, \quad B_2 = -A_1 a - \frac{C_2}{(ak-1)}, \quad m = \frac{(ak-1)}{u_0(\lambda_1, k)\alpha_2 + u_0(\lambda_2, k)\alpha_1}. \end{aligned}$$

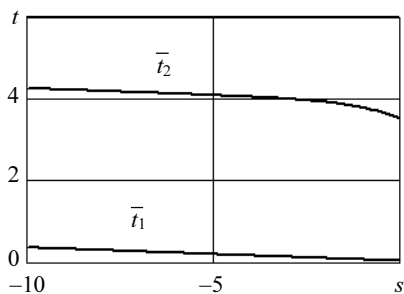


Рис. 2

На рис. 2 приведены графики средних $\bar{t}_i(s)$ при следующих значениях параметров: $\lambda_1 = 100, \lambda_2 = 10, a = 1, \alpha_1 = 0,2, \alpha_2 = 0,6$.

4. Среднее значение длительности периода повышенных платежей

Период повышенных выплат наступает, когда капитал фонда $s > s_0$. Обозначим через $m_i(s)$ среднее значение продолжительности периода повышенных выплат, если в начале периода капитал фонда равен s и $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$. По прошествии времени Δt капитал фонда изменится на случайную величину Δs , а интенсивность $\lambda(t)$ либо останется равной λ_1 с вероятностью $1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$, либо примет значение λ_2 с вероятностью $\alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$. Усредняя по возможным ситуациям, получим

$$m_1(s) = \Delta t + (1 - \lambda_1 \Delta t - \alpha_1 \Delta t) m_1(s - b_1 \Delta t) + \lambda_1 \int_0^{\infty} m_1(s+x) \varphi(x) dx + \alpha_1 \Delta t m_2(s - b_1 \Delta t) + o(\Delta t). \quad (29)$$

Считая функцию $m_1(s)$ дифференцируемой и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим при $s > s_0$

$$b_1 \frac{dm_1(s)}{ds} + (\lambda_1 + \alpha_1) m_1(s) - \lambda_1 \int_0^{\infty} m_1(s+x) \varphi(x) dx - \alpha_1 m_2(s) = 1. \quad (30)$$

Наконец, при $s(t) = s_0$ и $\Delta s = -b_1 \Delta t$ период повышенных выплат заканчивается за время Δt . Поэтому при $s(t) = s_0$ уравнение (29) примет вид

$$m_1(s_0) = \Delta t + \lambda_1 \Delta t \int_0^{\infty} m_1(s_0+x) \varphi(x) dx + o(\Delta t).$$

Откуда при $\Delta t \rightarrow 0$ получим начальное условие

$$m_1(s_0) = 0. \quad (31)$$

Аналогично для $m_2(s)$ получается уравнение

$$b_1 \frac{dm_2(s)}{ds} + (\lambda_2 + \alpha_2) m_2(s) - \lambda_2 \int_0^{\infty} m_2(s+x) \varphi(x) dx - \alpha_2 m_1(s) = 1, \quad (32)$$

с начальным условием

$$m_2(s_0) = 0. \quad (33)$$

Решение $m_i(s)$ системы (30), (32) будем искать в виде

$$m_i(s) = A_i s + B_i + C_i e^{ks}, \quad i = 1, 2, \quad k < 0. \quad (34)$$

Подставляя (34) в (30), (32) и начальные условия (31), (33), получим систему уравнений для определения A_i, B_i, C_i :

$$C_1(\alpha_1 + k u_1(\lambda_1, k)) - \alpha_1 C_2 = 0, \quad C_2(\alpha_2 + k u_1(\lambda_2, k)) - \alpha_2 C_1 = 0,$$

$$A_1 s_0 + B_1 + C_1 e^{ks_0} = 0, \quad A_2 s_0 + B_2 + C_2 e^{ks_0} = 0,$$

$$A_1 l_1(\lambda_1) + \alpha_1 (B_1 - B_2) = 1, \quad A_2 l_1(\lambda_2) + \alpha_2 (B_2 - B_1) = 1, \quad A_1 = A_2, \quad (35)$$

где $u_1(\lambda, k)$, $l_1(\lambda)$ определены в (26). Система (35) будет совместной, если параметр k удовлетворяет уравнению

$$(\alpha_1 + ku_1(\lambda_1, k))(\alpha_2 + ku_1(\lambda_2, k)) - \alpha_1\alpha_2 = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) имеет четыре корня $k_1 < 0$, $k_2 = 0$, k_3 , $k_4 > 0$. Поэтому в (34) $k = k_1$, так как иначе $m_i(s)$ экспоненциально возрастает. Окончательно, с учетом (36), система (35) примет вид

$$\begin{aligned} C_1\alpha_2u_1(\lambda_1, k) + C_2\alpha_1u_1(\lambda_2, k) &= 0, \quad A_1s_0 + B_1 + C_1e^{ks_0} = 0, \\ A_2s_0 + B_2 + C_2e^{ks_0} &= 0, \quad A_1l_1(\lambda_1) + \alpha_1(B_1 - B_2) = 1, \\ A_2l_1(\lambda_2) + \alpha_2(B_2 - B_1) &= 1, \quad A_1 = A_2, \end{aligned} \quad (37)$$

где $k = k_1$ – отрицательный корень уравнения (36). Решение системы (37) имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{l_1(\lambda_1)\alpha_2 + l_1(\lambda_2)\alpha_1}, \quad C_1 = \alpha_1u_1(\lambda_2, k) \frac{l_1(\lambda_1) - l_1(\lambda_2)}{l_1(\lambda_1)\alpha_2 + l_1(\lambda_2)\alpha_1} m, \\ C_2 &= \alpha_2u_1(\lambda_1, k) \frac{l_1(\lambda_2) - l_1(\lambda_1)}{l_1(\lambda_1)\alpha_2 + l_1(\lambda_2)\alpha_1} m, \\ B_1 &= -A_1s_0 - C_1e^{s_0k}, \quad B_2 = -A_1s_0 - C_2e^{s_0k}, \quad m = \frac{e^{-s_0k}}{u_1(\lambda_1, k)\alpha_2 + u_1(\lambda_2, k)\alpha_1}. \end{aligned}$$

На рис. 3 приведены графики средних $m_i(s)$ при следующих значениях параметров: $\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = 10$, $a = 1$, $\alpha_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 0,6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И. Математические модели страхования. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 180 с.
2. Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 18. С. 302 – 308.
3. Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю. Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник ТГУ. 2006. № 293. С. 38 – 44.
4. Лившиц К.И., Сухотина Л.Ю., Шифердекер И.Ю. Пуассоновская модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 19. С. 302 – 312.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969. 400 с.
6. Наумов В.А. Марковские модели потоков требований // Системы массового обслуживания и информатика. М.: УДН, 1987. С.67 – 73.

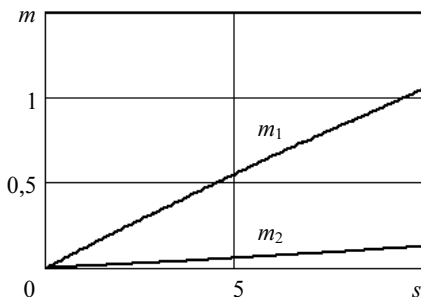


Рис. 3

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 8 июня 2007 г.