

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.872

В.А. Вавилов

ПРИМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕУСТОЙЧИВЫХ СЕТЕЙ МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА С ИСТОЧНИКОМ ПОВТОРНЫХ ВЫЗОВОВ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИМ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Предлагаются математические модели неустойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов (ИПВ) в случайной среде, моделируемой цепью Маркова с непрерывным временем. Исследуется распределение вероятностей состояний канала, асимптотическое среднее нормированного числа заявок в ИПВ.

Применение аппарата характеристических функций для исследования компьютерных сетей, управляемых протоколами случайного множественного доступа, предложено в работе [1].

В данной работе представим развитие этого подхода применительно к математическим моделям неустойчивых сетей множественного доступа с источником повторных вызовов (ИПВ), производительность которого зависит от неконтролируемых внешних воздействий – случайной среды. В качестве математической модели случайной среды рассмотрим однородную цепь Маркова с непрерывным временем.

1. Математическая модель

Рассмотрим математическую модель сети множественного доступа с оповещением о конфликте в виде однолинейной системы массового обслуживания (СМО), на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок. Прибор этой СМО может находиться в одном из трех состояний: $k = 0$, если он свободен; $k = 1$, если он занят обслуживанием заявки; $k = 2$, если на приборе реализуется этап оповещения о конфликте. Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает немедленно обслуживаться. Продолжительность обслуживания заявки на приборе имеет экспоненциальное распределение с параметром μ . Если в течение обслуживания этой заявки другие требования на прибор не поступают, то исходная заявка по завершении обслуживания покидает систему. Если во время обслуживания одной заявки поступает другая, то возникает конфликт. От этого момента начинается этап оповещения о конфликте. Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на этапе оповещения о конфликте, переходят в источник повторных вызовов (ИПВ). Число заявок в ИПВ обозначим i . Длины интервалов оповещения о конфликте также имеют экспоненциальное распределение с параметром $1/a$, где a – средняя продолжительность этих интервалов.

Сеть функционирует в случайной среде. В качестве математической модели случайной среды рассмотрим однородную цепь Маркова $s(t)$ с конечным множеством состояний $s = 1, 2, \dots, S$ и непрерывным временем, инфинитезимальные характеристики которой обозначим $q_{s_1 s_2}$.

Здесь при $s_1 \neq s_2$

$$q_{s_1 s_2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(s(t + \Delta t) = s_2 | s(t) = s_1)}{\Delta t},$$

а при $s_1 = s_2 = s$

$$q_{ss} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(s(t + \Delta t) = s | s(t) = s) - 1}{\Delta t}.$$

Очевидно, что $\sum_{s_2=1}^S q_{s_1 s_2} = 0$.

Будем полагать, что влияние случайной среды на функционирование сети определяется зависимостью интенсивности γ обслуживания заявок в ИПВ от состояний s случайной среды, то есть $\gamma = \gamma(s)$. Вероятность окончания обслуживания заявки на приборе за бесконечно малый промежуток времени Δt равна $\gamma(s)\Delta t + o(t)$, при условии, что среда находится в состоянии s .

В силу свойств приведенной математической модели, трехмерный случайный процесс $\{k(t), i(t), s(t)\}$ изменения во времени состояний (k, i) математической модели сети связи и состояний s математической модели случайной среды является цепью Маркова с непрерывным временем.

Обозначим $P(k(t) = k, i(t) = i, s(t) = s) = P_k(i, s, t)$.

В любой момент времени для распределения $P_k(i, s, t)$ должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^2 \sum_{s=1}^S P_k(i, s, t) = 1.$$

Можно показать, что распределение $P_k(i, s, t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(i, s, t)}{\partial t} + (\lambda + i\gamma(s))P_0(i, s, t) &= \mu P_1(i, s, t) + \frac{1}{a} P_2(i, s, t) + \sum_{s_1=1}^S P_0(i, s_1, t) q_{s_1 s}, \\ \frac{\partial P_1(i, s, t)}{\partial t} + (\lambda + i\gamma(s) + \mu)P_1(i, s, t) &= \lambda P_0(i, s, t) + (i+1)\gamma(s)P_0(i+1, s, t) + \sum_{s_1=1}^S P_1(i, s_1, t) q_{s_1 s}, \\ \frac{\partial P_2(i, s, t)}{\partial t} + \left(\lambda + \frac{1}{a} \right) P_2(i, s, t) &= \lambda P_2(i-1, s, t) + \lambda P_1(i-2, s, t) + \\ &+ (i-1)\gamma(s)P_1(i-1, s, t) + \sum_{s_1=1}^S P_2(i, s_1, t) q_{s_1 s}. \end{aligned}$$

Представим интенсивность γ обращения заявок на прибор из ИПВ в виде $\gamma(s) = \gamma\sigma(s)$, получим

$$\frac{\partial P_0(i, s, t)}{\partial t} + (\lambda + i\gamma\sigma(s))P_0(i, s, t) = \mu P_1(i, s, t) + \frac{1}{a} P_2(i, s, t) + \sum_{s_1=1}^S P_0(i, s_1, t) q_{s_1 s},$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial P_1(i, s, t)}{\partial t} + (\lambda + i\gamma\sigma(s) + \mu)P_1(i, s, t) = \\
 & = \lambda P_0(i, s, t) + (i+1)\gamma\sigma(s)P_0(i+1, s, t) + \sum_{s_1=1}^S P_1(i, s_1, t)q_{s_1 s}, \\
 & \frac{\partial P_2(i, s, t)}{\partial t} + \left(\lambda + \frac{1}{a}\right)P_2(i, s, t) = \lambda P_2(i-1, s, t) + \lambda P_1(i-2, s, t) + \\
 & + (i-1)\gamma\sigma(s)P_1(i-1, s, t) + \sum_{s_1=1}^S P_2(i, s_1, t)q_{s_1 s}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

2. Исследование асимптотических средних характеристик

Решение $P_k(i, s, t)$ системы (1) достаточно полно определяет функционирование математической модели сети связи и ее вероятностно-временные характеристики, но для нее не существует точных аналитических методов решения, поэтому данную систему будем исследовать методом асимптотического анализа [1] в условиях большой задержки $\gamma \rightarrow 0$ с применением характеристических функций.

Для этого перейдем от вероятностей вида $P_k(i, s, t)$ к характеристическим функциям вида

$$\begin{aligned}
 H_k(u, s, t) &= \sum_i e^{jui} P_k(i, s, t) = \\
 &= P\{k(t) = k, s(t) = s\} M\{e^{ju i(t)} \mid k(t) = k, s(t) = s\}.
 \end{aligned}$$

Тогда систему (1) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial H_0(u, s, t)}{\partial t} - j\gamma\sigma(s) \frac{\partial H_0(u, s, t)}{\partial u} = \\
 & = -\lambda H_0(u, s, t) + \mu H_1(u, s, t) + \frac{1}{a} H_2(u, s, t) + \sum_{s_1=1}^S H_0(u, s_1, t)q_{s_1 s}, \\
 & \frac{\partial H_1(i, s, t)}{\partial t} - j\gamma\sigma(s) \frac{\partial H_1(u, s, t)}{\partial u} + j\gamma\sigma(s)e^{-ju} \frac{\partial H_0(u, s, t)}{\partial u} = \\
 & = -(\lambda + \mu)H_1(u, s, t) + \lambda H_0(u, s, t) + \sum_{s_1=1}^S H_1(u, s_1, t)q_{s_1 s}, \\
 & \frac{\partial H_2(u, s, t)}{\partial t} + j\gamma\sigma(s)e^{ju} \frac{\partial H_1(u, s, t)}{\partial u} = \\
 & = \lambda e^{2ju} H_1(u, s, t) + \left[\lambda(e^{ju} - 1) - \frac{1}{a}\right] H_2(u, s, t) + \sum_{s_1=1}^S H_2(u, s_1, t)q_{s_1 s}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Представим эту систему в матричном виде, обозначим вектор

$$\begin{aligned}
 H(u, t) &= \{H_0(u, 1, t), H_0(u, 2, t), \dots, H_0(u, S, t), H_1(u, 1, t), H_1(u, 2, t), \dots, \\
 & \dots, H_1(u, S, t), H_2(u, 1, t), H_2(u, 2, t), \dots, H_2(u, S, t)\},
 \end{aligned}$$

а также блочные матрицы

$$A(y) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2(y) & 0 \\ 0 & A_1 & A_2(y) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(y) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23}(y) \\ B_{31} & 0 & B_{33}(y) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\sigma(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\sigma(2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\sigma(S) \end{bmatrix}, \quad A_2(y) = \begin{bmatrix} -\sigma(1)e^{-y} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\sigma(2)e^{-y} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\sigma(S)e^{-y} \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} -\lambda + q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1S} \\ q_{21} & -\lambda + q_{22} & \dots & q_{2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{S1} & q_{S1} & \dots & -\lambda + q_{SS} \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu \end{bmatrix},$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} -(\lambda + \mu) + q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1S} \\ q_{21} & -(\lambda + \mu) + q_{22} & \dots & q_{2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{S1} & q_{S1} & \dots & -(\lambda + \mu) + q_{SS} \end{bmatrix},$$

$$B_{23}(y) = \begin{bmatrix} \lambda e^{2y} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda e^{2y} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda e^{2y} \end{bmatrix}, \quad B_{31} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a} \end{bmatrix},$$

обозначим $G(y) = \lambda(e^y - 1) - \frac{1}{a}$, тогда

$$B_{33}(y) = \begin{bmatrix} G(y) + q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1S} \\ q_{21} & G(y) + q_{22} & \dots & q_{2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{S1} & q_{S1} & \dots & G(y) + q_{SS} \end{bmatrix}.$$

С учетом этих обозначений систему (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} + j\gamma \frac{\partial H(u, t)}{\partial u} A(ju) = H(u, t) B(ju). \quad (4)$$

В уравнении (4) для $H(u, t)$ выполним замены

$$\tau = \gamma t, \quad u = \gamma x, \quad H(u, t) = F(x, \tau, \gamma), \quad (5)$$

тогда функция $F(x, \tau, \gamma)$ определяется равенством

$$F(x, \tau, \gamma) = P(k(\tau/\gamma) = k, s(\tau/\gamma) = s) \times M \left\{ e^{jx\gamma i(\tau/\gamma)} \mid k(\tau/\gamma) = k, s(\tau/\gamma) = s \right\}. \quad (6)$$

Обозначим единичный вектор-столбец как E , тогда должно выполняться равенство

$$F_k(x, \tau, \gamma)E = Me^{ix\gamma i(\tau/\gamma)}. \quad (7)$$

Теорема 1. Если при $\gamma \rightarrow 0$ существует предел

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} F(x, \tau, \gamma) = F(x, \tau), \quad (8)$$

тогда

$$F(x, \tau) = Q \exp(jx\kappa(\tau)), \quad (9)$$

где вектор Q определяется системой линейных алгебраических уравнений $Q(\kappa)K(\kappa) = 0$, а скалярная функция $\kappa(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения $\kappa'(\tau) = Q(\kappa)V(\kappa)E$.

Доказательство. В уравнении (4) выполним замены (5), получим

$$\gamma \frac{\partial F(x, \tau, \gamma)}{\partial \tau} + j \frac{\partial F(x, \tau, \gamma)}{\partial u} A(j\gamma x) = F(x, \tau, \gamma)B(j\gamma x). \quad (10)$$

При $\gamma \rightarrow 0$ это уравнение перепишем в виде

$$j \frac{\partial F(x, \tau)}{\partial x} A(0) = F(x, \tau)B(0), \quad (11)$$

решение которого имеет вид (9).

В силу равенства (6) вектор Q имеет смысл распределения вероятностей значений процесса $k(\tau/\gamma)$ при условии, что случайная среда находится в состоянии s , и при условии $\gamma \rightarrow 0$.

Найдем вектор Q , подставив (9) в (11), получим

$$jQj\kappa(\tau)A(0) = QB(0), \quad (12)$$

которое является системой линейных алгебраических уравнений вида

$$Q\{B(0) + \kappa(\tau)A(0)\} = 0, \quad (13)$$

определяющей вектор Q , который также удовлетворяет условию нормировки $QE = 1$.

Теперь найдем функцию $\kappa(\tau)$. Для этого просуммируем по k все уравнения системы (10), получим равенство

$$\gamma \frac{\partial F(x, \tau, \gamma)}{\partial \tau} E + j \frac{\partial F(x, \tau, \gamma)}{\partial x} A(j\gamma x)E = F(x, \tau, \gamma)B(j\gamma x)E. \quad (14)$$

Используя разложения

$$A(j\gamma x) = A(0) + j\gamma x A'(0) + o(\gamma^2), \quad B(j\gamma x) = B(0) + j\gamma x B'(0) + o(\gamma^2),$$

а также свойства $A(0)E = 0$, $B(0)E = 0$, равенство (14) перепишем в следующем виде:

$$\gamma \frac{\partial F(x, \tau, \gamma)}{\partial \tau} E + j \frac{\partial F(x, \tau, \gamma)}{\partial x} j\gamma x A'(0)E = F(x, \tau, \gamma)j\gamma x B'(0)E + o(\gamma^2),$$

откуда при $\gamma \rightarrow 0$ получим равенство

$$\frac{\partial F(x, \tau)}{\partial \tau} E + j \frac{\partial F(x, \tau)}{\partial x} jx A'(0) E = F(x, \tau) jx B'(0) E ,$$

подставив в которое (9), запишем уравнение для функции $\kappa(\tau)$ как

$$jx \kappa'(\tau) Q E - jx \kappa(\tau) Q A'(0) E = jx Q B'(0) E ,$$

откуда получим, что функция $\kappa(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\kappa'(\tau) = Q(\kappa) \{ B'(0) + \kappa A'(0) \} E . \quad (15)$$

Обозначив матрицу

$$K(x, \kappa) = B(x) + \kappa A(x) ,$$

ее значение при $x = 0$

$$K(0, \kappa) = K(\kappa) ,$$

значение ее производной в нуле

$$\left. \frac{\partial K(x, \kappa)}{\partial x} \right|_{x=0} = V(\kappa) ,$$

уравнения (13) и (15) запишем в виде

$$Q(\kappa) K(\kappa) = 0 ; \quad (16)$$

$$\kappa'(\tau) = Q(\kappa) V(\kappa) E . \quad (17)$$

Теорема доказана.

Обозначим

$$\sum_{s=1}^S Q_k(\kappa, s) = R_k(\kappa) , \quad \psi_k = \sum_{s=1}^S \sigma(s) Q_k(\kappa, s) / \sum_{s=1}^S Q_k(\kappa, s) , \quad k = 0, 1 ,$$

просуммируем уравнения системы (16) по s .

Совместно с условием нормировки

$$\sum_{k=0}^2 R_k(\kappa) = 1 ,$$

система (16) дает следующее решение:

$$\begin{aligned} R_0(\kappa) &= \frac{\lambda + \kappa \psi_1 + \mu}{a(\lambda + \kappa \psi_0)(\lambda + \kappa \psi_1) + 2\lambda + \kappa(\psi_0 + \psi_1) + \mu} , \\ R_1(\kappa) &= \frac{\lambda + \kappa \psi_0}{a(\lambda + \kappa \psi_0)(\lambda + \kappa \psi_1) + 2\lambda + \kappa(\psi_0 + \psi_1) + \mu} , \\ R_2(\kappa) &= \frac{a(\lambda + \kappa \psi_0)(\lambda + \kappa \psi_1)}{a(\lambda + \kappa \psi_0)(\lambda + \kappa \psi_1) + 2\lambda + \kappa(\psi_0 + \psi_1) + \mu} . \end{aligned} \quad (18)$$

Асимптотическое при $\gamma \rightarrow 0$ среднее значение нормированного числа заявок в ИПВ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$\kappa'(\tau) = -\kappa \psi_0 R_0(\kappa) + \lambda R_2(\kappa) + (2\lambda + \kappa \psi_1) R_1(\kappa) . \quad (19)$$

Следствие. Последовательность случайных процессов $\gamma i(\tau/\gamma)$ при $\gamma \rightarrow 0$ сходится по распределению к детерминированной функции $\kappa(\tau)$, то есть имеет

место предельное равенство

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma i(\tau / \gamma) = \kappa(\tau). \quad (20)$$

Доказательство следует из равенств (6) – (9), так как

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} M \exp \{ jx \gamma i(\tau / \gamma) \} = Q \cdot \exp \{ jx \kappa(\tau) \} E = \exp \{ jx \kappa(\tau) \},$$

а из сходимости характеристических функций следует сходимость по распределению последовательности соответствующих случайных величин. *Следствие доказано.*

Заключение

Таким образом, в данной работе найдено распределение вероятностей $R_k(\kappa)$ состояний k канала в виде (18). Получено дифференциальное уравнение (19), определяющее асимптотическое среднее $\kappa(\tau)$ нормированного числа заявок в ИПВ.

Полученные результаты могут быть использованы при проведении анализа существующих сетей, управляемых протоколами случайного множественного доступа, а также при проектировании новых сетей связи, реализующих более производительные протоколы передачи данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 29 сентября 2007 г.