

УДК 519.872

Т.А. Карлыханова

МЕТОД ПРОСЕЯННОГО ПОТОКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМЫ $GI/GI/\infty$

Для системы массового обслуживания $GI/GI/\infty$ найдена характеристическая функция числа занятых приборов. Показано, что распределение вероятностей $\Pi(i)$ можно аппроксимировать нормальным распределением.

Системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов рассматриваются в качестве математических моделей широкого класса реальных систем в различных предметных областях.

В классической теории массового обслуживания существует не так много моделей, исследование которых удаётся выполнить аналитическими методами и получить окончательные результаты в виде формул для вероятностно-временных характеристик исследуемых систем массового обслуживания. Это, прежде всего, марковские системы, процесс изменения состояний которых определяется цепями Маркова, то есть дискретными марковскими процессами; однолинейные полумарковские системы, исследование которых реализуется методом вложенных цепей Маркова, в частности известна формула Поллачекас – Хинчина, а также формулы Эрланга для N -линейных систем с произвольным временем обслуживания, процесс изменения состояний которых является немарковским и даже немарковизируемым. В этих моделях входящие потоки определены классом стационарных пуассоновских либо рекуррентных потоков.

В то же время многочисленные исследования реальных потоков в различных предметных областях, в частности в экономических системах, позволили сделать вывод о существенной неадекватности классических моделей потоков (пуассоновских и рекуррентных) реальным данным. С другой стороны, реальные системы, в которых наблюдаются эффекты повторных обращений заявок к обслуживающему прибору, конфликты заявок, наличие интервалов недоступности, требуют рассмотрения моделей, выходящих за рамки множества классических систем массового обслуживания.

Исследование таких моделей выполняется, как правило, численными методами либо имитационным моделированием, со всеми недостатками, вытекающими из этих методов.

Альтернативным подходом является применение метода асимптотического анализа для исследования таких систем.

1. Постановка задачи

Рассмотрим СМО с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток, определяемый функцией распределения $A(x)$ длин интервалов между моментами наступления его событий (рис. 1).

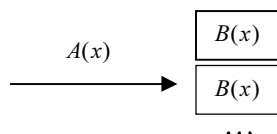


Рис. 1

Обозначим через $i(t)$ число приборов, занятых в момент времени t , а стационарное распределение вероятностей значений процесса $i(t)$ как $\Pi(i) = P\{i(t) = i\}$.

Для исследования такой системы применим метод просеянного потока.

Предлагаемый метод позволяет проблему исследования немарковской системы обслуживания с неограниченным числом приборов свести к задаче анализа нестационарного марковизируемого потока.

2. Метод просеянного потока

Пусть на вход системы с неограниченным числом приборов поступает некоторый поток заявок. На оси времени t отметим (рис. 2) моменты наступления событий этого потока (верхняя ось рисунка).

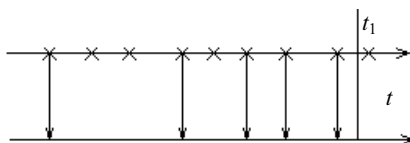


Рис. 2

Выделим некоторый момент времени t_1 . Не нарушая общности можно считать, что $t_1 = 0$. Будем полагать, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t < t_1 = 0$ с вероятностью

$$S(t) = 1 - B(-t),$$

формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1 - S(t)$ не рассматривается.

Очевидно, что заявки, не попавшие в просеянный поток, завершат обслуживание и покинут систему до момента t_1 , в то время как все заявки просеянного потока в момент t_1 будут находиться в системе, занимая её приборы.

Обозначим через $n(t)$ число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t .

Если в некоторый начальный момент времени $t_0 < t_1$ система обслуживания свободна, то есть в ней нет обслуживаемых заявок, то для момента времени t_1 выполняется равенство

$$i(t_1) = n(t_1), \quad (1)$$

то есть число $i(t_1)$ приборов, занятых в рассматриваемой системе обслуживания, равно числу $n(t_1)$ событий просеянного потока, наступивших до момента времени t_1 .

Полагая входящий поток стационарным, для определения стационарных характеристик случайного процесса $i(t_1)$, будем рассматривать условие $t_0 = -x_0$, где x_0 – такое значение аргумента x функции распределения $B(x)$, что $B(x_0) = 1$. В частности, возможно $x_0 = \infty$. Следовательно, $S(t) = 0$, при всех $t \leq t_0$, поэтому при $t \leq t_0$ не наступают события в просеянном потоке.

Равенство (1) является основным для дальнейших исследований, так как проблему исследования немарковизируемой системы обслуживания с неограниченным числом приборов сводит к задаче анализа просеянного нестационарного

потока, определяемого процессом $n(t)$. Найдя характеристики этого случайного процесса в произвольный момент времени t , где $t_0 \leq t \leq t_1$, положим $t = t_1$, тогда, в силу равенства (1), его характеристики совпадают с характеристиками величины $i(t_1)$.

3. Вывод уравнения Колмогорова

Обозначим через $z(t)$ длину интервала от момента t до момента наступления следующего события в рекуррентном потоке.

Выполним исследование двумерного марковского процесса $\{z(t), n(t)\}$, его распределение вероятностей обозначим

$$P(z, n, t) = P\{z(t) < z, n(t) = n\}.$$

Стандартным Δt -методом запишем

$$\begin{aligned} P(z - \Delta t, n, t + \Delta t) = & P(z, n, t) - P(\Delta t, n, t) + P(\Delta t, n, t)(1 - S(t))A(z) + \\ & + P(\Delta t, n - 1, t)S(t)A(z) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

откуда получим уравнение Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(z, n, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(z, n, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0, n, t)}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial P(0, n, t)}{\partial z}(1 - S(t))A(z) + \frac{\partial P(0, n - 1, t)}{\partial z}S(t)A(z), \end{aligned}$$

из которого очевидно получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(z, n, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(z, n, t)}{\partial z} - [1 - (1 - S(t))A(z)] \frac{\partial P(0, n, t)}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial P(0, n - 1, t)}{\partial z}S(t)A(z). \end{aligned} \quad (2)$$

4. Метод характеристических функций

Обозначим

$$H(z, u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(z, n, t) = R(z) M\{e^{jun(t)} | z(t) < z\}. \quad (3)$$

Следовательно, функция $H(z, u, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(z, u, t)}{\partial t} = & \frac{\partial H(z, u, t)}{\partial z} - [1 - (1 - S(t))A(z)] \frac{\partial H(0, u, t)}{\partial z} + \\ & + e^{ju} \frac{\partial H(0, u, t)}{\partial z} S(t)A(z). \end{aligned} \quad (4)$$

Получим для этой функции задачу Коши:

$$\frac{\partial H(z, u, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(z, u, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(0, u, t)}{\partial z} \{S(t)A(z)[e^{ju} - 1] + A(z) - 1\}, \quad (5)$$

$$H(z, u, t_0) = R(z). \quad (6)$$

Решив эту задачу, найдём функцию $H(z, u, t)$, тогда, принимая во внимание равенство (3), характеристическую функцию величины $n(t)$ определим в виде

$$Me^{ju n(t)} = H(z, u, t)|_{z \rightarrow \infty} = H(\infty, u, t). \quad (7)$$

При $t = t_1 = 0$, в силу равенства (3), характеристическая функция стационарного распределения случайного процесса $i(t)$ будет иметь следующий вид:

$$Me^{ju i(t)} = H(\infty, u, 0), \quad (8)$$

что позволяет найти все вероятностно-временные характеристики системы обслуживания $GI/GI/\infty$.

5. Метод асимптотического анализа системы $GI/GI/\infty$ в условии растущего времени обслуживания

Уравнение (5), определяющее характеристики рассматриваемой системы обслуживания, будем решать в асимптотическом условии растущего времени обслуживания, полагая, что среднее значение времени обслуживания $b \rightarrow \infty$.

6. Асимптотика первого порядка

Обозначив $\varepsilon = 1/b$ и в уравнении (5) выполнив замены

$$t\varepsilon = \tau, \quad t_0\varepsilon = \tau_0, \quad S(t) = S_1(\tau), \quad u = \varepsilon w, \quad H(z, u, t) = F_1(z, w, \tau, \varepsilon), \quad (9)$$

для $F_1(z, w, \tau, \varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(z, w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial F_1(z, w, \tau, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial z} \{S_1(\tau)A(z)[e^{j\varepsilon w} - 1] + A(z) - 1\}. \quad (10)$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(z, w, \tau, \varepsilon) = F_1(z, w, \tau),$$

$$\text{то} \quad F_1(z, w, \tau) = R(z) \exp \left\{ jw\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(x) dx \right\}, \quad (11)$$

где величина κ_1 определена равенством

$$\kappa_1 = \frac{1}{a}. \quad (12)$$

Доказательство. В уравнении (10) выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что $F_1(z, w, \tau)$ является решением следующего уравнения:

$$\frac{\partial F_1(z, w, \tau)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(0, w, \tau)}{\partial z} \{A(z) - 1\} = 0.$$

Его решение имеет вид

$$F_1(z, w, \tau) = \Phi_1(w, \tau)R(z), \quad (13)$$

в котором функции $\Phi_1(w, \tau)$ и $R(z)$ определим следующим образом.

Этап 1. Определим $R(z)$.

Функция $R(z)$ удовлетворяет уравнению

$$R'(z) - R'(0)\{1 - A(z)\} = 0, \quad 0 \leq z < \infty,$$

решение которого имеет вид

$$R(z) = R'(0) \int_0^z (1 - A(x)) dx = R'(0) \int_0^\infty (1 - A(x)) dx.$$

Так как $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 1$, а интеграл $\int_0^\infty (1 - A(x)) dx = a$, то

$$R'(0) = \frac{1}{a}.$$

Значит,

$$R(z) = \frac{1}{a} \int_0^z (1 - A(x)) dx.$$

Этап 2. Определим функцию $\Phi_1(w, \tau)$.

При $z \rightarrow \infty$ в уравнении (10) получим

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(\infty, w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial F_1(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial z} \{S_1(\tau) [e^{j\varepsilon w} - 1]\}.$$

Поделив левую и правую части этого равенства на ε :

$$\frac{\partial F_1(\infty, w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial F_1(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial z} \left\{ S_1(\tau) \frac{[e^{j\varepsilon w} - 1]}{\varepsilon} \right\}$$

и полагая $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что для $F_1(z, w, \tau)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial F_1(z, w, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial F_1(0, w, \tau)}{\partial z} S_1(\tau) jw.$$

В силу равенства (13) имеем

$$\frac{\partial \Phi_1(w, \tau)}{\partial \tau} = \Phi_1(w, \tau) R'(0) S_1(\tau) jw,$$

подставив в которое $R'(0) = \frac{1}{a}$, получим для функции $\Phi_1(w, \tau)$ линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial \Phi_1(w, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{a} jw S_1(\tau) \Phi_1(w, \tau),$$

решение которого имеет вид

$$\Phi_1(w, \tau) = \exp \left\{ jw \kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(x) dx \right\},$$

где $\kappa_1 = \frac{1}{a}$. Подставляя это выражение в (13), получим равенство (11). Теорема доказана.

В силу замен (9), а также равенства (13), можно записать асимптотическое, при $\varepsilon \rightarrow 0$, приближённое равенство

$$H(z, u, t) = F_1(z, w, \tau, \varepsilon) \approx F_1(z, w, \tau) = \\ R(z) \exp \left\{ jw\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z) dz \right\} = R(z) \exp \left\{ j\kappa_1 \int_{t_0}^t S(x) dx \right\},$$

поэтому для характеристической функции величины $n(t)$ запишем

$$Me^{jun(t)} = H(\infty, u, t) = R(\infty) \exp \left\{ j\kappa_1 \int_{t_0}^t S(x) dx \right\} = \exp \left\{ j\kappa_1 \int_{t_0}^t S(x) dx \right\}. \quad (14)$$

При $t = t_1 = 0$ для характеристической функции процесса $i(t)$ в стационарном режиме получим

$$Me^{jui(t)} = H(\infty, u, 0) = \exp \left\{ j\kappa_1 \int_0^{x_0} (1 - B(z)) dz \right\} = \exp \{ j\kappa_1 b \}.$$

Полученное равенство будем называть асимптотикой первого порядка для системы обслуживания $GI/GI/\infty$.

Отметим, что асимптотическое среднее значение $\kappa_1 b$ – числа занятых приборов, найдено здесь в предельном условии $b \rightarrow \infty$.

7. Асимптотика второго порядка

Для исследования величины отклонения числа занятых приборов от его среднего значения и нахождения характеристической функции процесса $i(t)$, а также допредельного распределения $\Pi(i)$, решение $H(z, u, t)$ уравнения (5) запишем в виде произведения

$$H(z, u, t) = H_2(z, u, t) \exp \left\{ j\kappa_1 \int_{t_0}^t S(x) dx \right\}, \quad (15)$$

подставляя которое в (5), получим уравнение для $H_2(z, u, t)$ в виде

$$\frac{\partial H_2(z, u, t)}{\partial t} = \frac{\partial H_2(z, u, t)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(0, u, t)}{\partial z} \{ S(t)A(z)[e^{ju} - 1] + A(z) - 1 \} - \\ - j\kappa_1 S(t)H_2(z, u, t). \quad (16)$$

Обозначив $\varepsilon^2 = 1/b$ и в уравнении (16) выполнив замены

$$t\varepsilon^2 = \tau, \quad t_0\varepsilon^2 = \tau_0, \quad S(t) = S_1(\tau), \quad u = \varepsilon w, \quad H_2(z, u, t) = F_2(z, w, \tau, \varepsilon), \quad (17)$$

для $F_2(z, w, \tau, \varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(z, w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial F_2(z, w, \tau, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial z} \{ S_1(\tau)A(z)[e^{j\varepsilon w} - 1] + A(z) - 1 \} - \\ - j\varepsilon w \kappa_1 S_1(\tau)F_2(z, w, \tau, \varepsilon). \quad (18)$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_2(z, w, \tau, \varepsilon) = F_2(z, w, \tau),$$

$$то \quad F_2(z, w, \tau) = R(z) \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z) dz + 2\kappa_2 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(z) dz \right] \right\}, \quad (19)$$

где величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = f_2'(0) - \kappa_1 f_2(\infty) \quad (20)$$

а $f_2(z)$ является решением неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} R'(z) + S_1(\tau) f_2'(z) + R'(0) S_1(\tau) A(z) + R'(0) A(z) - R'(0) + \\ + S_1(\tau) f_2'(0) A(z) - S_1(\tau) f_2'(0) - \kappa_1 S_1(\tau) R(z) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Доказательство. Решение $F_2(z, w, \tau, \varepsilon)$ уравнения (18) запишем в виде разложения

$$F_2(z, w, \tau, \varepsilon) = \Phi_2(w, \tau) \{ R(z) + j\varepsilon w S_1(\tau) f_2(z) \} + O(\varepsilon^2), \quad (22)$$

подставив которое в (18), получим

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2) = \Phi_2(w, \tau) \{ R'(z) + j\varepsilon w S_1(\tau) f_2'(z) + R'(0) S_1(\tau) A(z) j\varepsilon w + R'(0) A(z) - R'(0) + \\ + j\varepsilon w S_1(\tau) f_2'(0) A(z) - j\varepsilon w S_1(\tau) f_2'(0) - j\varepsilon w \kappa_1 S_1(\tau) R(z) \}, \end{aligned}$$

где $f_2(z)$ – решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (21).

Для нахождения скалярной функции $\Phi_2(w, \tau)$ в уравнении (18) положим $z \rightarrow \infty$, получим равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial F_2(\infty, w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= \frac{\partial F_2(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial z} S_1(\tau) [e^{j\varepsilon w} - 1] - j\varepsilon w \kappa_1 S_1(\tau) F_2(\infty, w, \tau, \varepsilon) = \\ &= \frac{\partial F_2(0, w, \tau, \varepsilon)}{\partial z} S_1(\tau) \left\{ j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \right\} - j\varepsilon w \kappa_1 S_1(\tau) F_2(\infty, w, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Подставляя разложение (22) в последнее равенство, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w, \tau)}{\partial \tau} &= \Phi_2(w, \tau) S_1(\tau) \{ j\varepsilon w (R'(0) - \kappa_1) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} R'(0) + \\ &+ (j\varepsilon w)^2 S_1(\tau) (f_2'(0) - \kappa_1 f_2(z)) \} + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Так как $R'(0) = \frac{1}{a} = \kappa_1$, то выполняется равенство $R'(0) - \kappa_1 = 0$. Нетрудно показать, что функция $\Phi_2(w, \tau)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \Phi_2(w, \tau)}{\partial \tau} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi_2(w, \tau) \{ \kappa_1 S_1(\tau) + 2S_1^2(\tau) \kappa_2 \},$$

где величина κ_2 определяется равенством (20). Следовательно, решение $\Phi_2(w, \tau)$ этого уравнения имеет вид

$$\Phi_2(w, \tau) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[\kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z) dz + 2\kappa_2 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(z) dz \right] \right\}. \quad (23)$$

Подставляя его в (22), при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим для $F_2(z, w, \tau)$ выражение, совпадающее с (19). Теорема доказана

В силу замен (17), а также равенства (19), для $H_2(z, u, t)$ можно записать асимптотическое (приближённое) равенство

$$\begin{aligned} H_2(z, u, t) &= F_2(z, w, \tau, \varepsilon) \approx F_2(z, w, \tau) = \\ &= R(z) \exp \left\{ \frac{(ju)^2}{2} \left[\kappa_1 \int_{t_0}^t S(z) dz + 2\kappa_2 \int_{t_0}^t S^2(z) dz \right] \right\}, \end{aligned}$$

тогда, при $t = 0$, обозначив

$$\int_{t_0}^0 S^2(z) dz = \int_0^{x_0} (1 - B(z))^2 dz = \beta_2,$$

в силу равенства (19), получим

$$H(z, u, 0) = H_2(z, u, 0) \exp \{ ju \kappa_1 b \} = R(z) \exp \left\{ ju \kappa_1 b + \frac{(ju)^2}{2} [\kappa_1 b + 2\kappa_2 \beta_2] \right\}.$$

Следовательно, для характеристической функции величины $i(t)$ можно записать равенство

$$\begin{aligned} Me^{ju i(t)} &= H(\infty, u, 0) = R(\infty) \exp \left\{ ju \kappa_1 b + \frac{(ju)^2}{2} [\kappa_1 b + 2\kappa_2 \beta_2] \right\} = \\ &= \exp \left\{ ju \kappa_1 b + \frac{(ju)^2}{2} [\kappa_1 b + 2\kappa_2 \beta_2] \right\}, \end{aligned}$$

из которого следует, что распределение вероятностей $\Pi(i)$ можно аппроксимировать нормальным распределением с параметрами a и σ^2 вида

$$a = \kappa_1 b, \quad \sigma^2 = \kappa_1 b + 2\kappa_2 \beta_2. \quad (24)$$

Здесь величина β_2 имеет смысл среднего значения минимума двух независимых случайных величин, каждая из которых является продолжительностью времени обслуживания.

Заключение

Таким образом, в работе найдена характеристическая функция числа занятых приборов для системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов, произвольным временем обслуживания и GI-входящим потоком заявок.

Нами показано, что распределение вероятностей $\Pi(i)$ можно аппроксимировать нормальным распределением с параметрами a и σ^2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания: Учебное пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2004.
2. Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та. 1988.
3. Карлин С. Основы теории случайных процессов. М.: Наука, 1971.
4. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.
5. Ивченко Г.И., Кашистанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. М.: Высш. школа, 1982.
6. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. М.: Мир, 1965.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 29 сентября 2007 г.