

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.865

Я.С. Бублик, К.И. Лившиц

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛА НЕКОММЕРЧЕСКОГО ФОНДА ДЛЯ ПУАССОНОВСКОЙ МОДЕЛИ ПРИ ГИСТЕРЕЗИСНОМ УПРАВЛЕНИИ КАПИТАЛОМ¹

Получены уравнения, определяющие плотность распределения капитала некоммерческого фонда, в предположениях, что поступающие денежные средства (премии) и выплаты из фонда образуют пуассоновские потоки, а управление капиталом фонда является гистерезисным. Найдено решение уравнений при экспоненциальных распределениях поступлений и выплат и в случае малой нагрузки премии.

Ключевые слова: *некоммерческий фонд, гистерезисное управление, плотность распределения капитала, малая нагрузка премии.*

Под некоммерческим фондом понимается организация, созданная для сбора и распределения денежных средств без получения прибыли. К некоммерческим фондам могут быть отнесены, в частности, все государственные внебюджетные фонды РФ. Построению и исследованию моделей некоммерческих фондов посвящены, например, работы [1 – 5], в которых исследуются характеристики математической модели деятельности фонда при различных предположениях о потоках поступающих в фонд платежей (премий) и выплат из фонда. В настоящей работе задача решается в предположении, что потоки поступающих в фонд премий и выплат из фонда являются пуассоновскими, а управление капиталом фонда является гистерезисным.

1. Математическая модель изменения капитала фонда

Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $S(t)$ в момент времени t . В работе предполагается, что с капиталом $S(t)$ могут происходить следующие изменения:

1. В фонд поступают денежные средства. Будем считать, что моменты поступления денежных средств образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ . Поступающие денежные суммы являются независимыми одинаково распределенными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$, средним значением $M\{x\} = a$ и вторым моментом $M\{x^2\} = a_2$.

2. Фонд расходует поступившие денежные средства. Будем считать, что выплаты являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами

¹ Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (2009 – 2010 годы), проект № 4761.

нами с плотностью распределения $\psi(x)$, средним значением $M\{x\} = b$ и вторым моментом $M\{x^2\} = b_2$.

Моменты начисления выплат денежных средств также образуют пуассоновский поток, интенсивность которого $\mu(s)$ зависит от капитала фонда. Предполагается, что управление расходом денежных средств определяется следующим образом, Устанавливаются два пороговых значения капитала S_1 и S_2 , причем $S_2 > S_1$. В области $S < S_1$ $\mu(s) = \mu_0$, в области $S > S_2$ $\mu(s) = \mu_1$. Так как фонд не имеет целью получение прибыли, то естественно считать, что

$$\mu_0 b < \lambda a < \mu_1 b. \quad (1)$$

Таким образом, при $S < S_1$ фонд расходует в среднем меньше средств, чем в него поступает, а при $S > S_2$ расходует в среднем больше средств, чем в него поступает.

В области же $S_1 \leq S \leq S_2$ устанавливается значение $\mu(s) = \mu_0$ или $\mu(s) = \mu_1$ в зависимости от того, как процесс $S(t)$ вошел в эту область. Если он вошел в нее через порог S_1 снизу вверх, то остается $\mu(s) = \mu_0$, если же он вошел в эту область через порог S_2 сверху вниз, то остается $\mu(s) = \mu_1$. Таким образом, значение $\mu(s) = \mu_1$ устанавливается при достижении капиталом $S(t)$ значения S_2 и оканчивается при уменьшении капитала до значения S_1 . Область $S_1 \leq S \leq S_2$ и представляет собой область гистерезиса в управлении капиталом.

Наконец, будем считать, что при $S < 0$ фонд не прекращает свою деятельность, но наступает период неплатежеспособности фонда, обязательства фонда выполняются по мере поступления денежных средств.

2. Плотность распределения капитала фонда

Выпишем уравнения, определяющие плотность вероятностей $P(s)$ величины капитала фонда s во всех областях изменения капитала в стационарном режиме. Так как суммы поступающих премий и расходуемых денежных средств представляют собой сложно-пуассоновские процессы [6] в каждой из областей, то плотность $P(s)$ существует и может иметь разрывы лишь в точках S_1 и S_2 . Перенесем начало отсчета в точку $S = -S_1$ и обозначим $S_0 = S_2 - S_1$. При этом нижний порог $S_1 = 0$.

Начнем с области $S > S_0$. Обозначим через $P(s, t)$ плотность распределения капитала фонда s в момент времени t . Рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$. Значение капитала s в момент времени $t + \Delta t$ может быть получено в следующих случаях. В момент времени t капитал фонда равнялся s , и за время Δt он не изменился. Вероятность этого события $1 - (\lambda + \mu_1) \Delta t + o(\Delta t)$. В момент времени t капитал фонда равнялся $s - x$, и за время Δt поступила случайная премия x . Вероятность этого события $\lambda \Delta t \phi(x) dx + o(\Delta t)$. В момент времени t капитал фонда равнялся $s + x$, и за время Δt произведена случайная выплата x . Вероятность этого события $\mu_1 \Delta t \psi(x) dx + o(\Delta t)$. По формуле полной вероятности

будем иметь

$$P(s, t + \Delta t) = (1 - (\lambda + \mu_1)\Delta t)P(s, t) + \lambda \Delta t \int_0^\infty P(s - x, t) \varphi(x) dx + \mu_1 \Delta t \int_0^\infty P(s + x, t) \psi(x) dx + o(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$, получим, что при $S > S_0$

$$(\lambda + \mu_1)P(s) = \lambda \int_0^\infty P(s - x) \varphi(x) dx + \mu_1 \int_0^\infty P(s + x) \psi(x) dx. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) должно удовлетворять граничному условию $P(+\infty) = 0$.

Перейдем к рассмотрению области $0 \leq S \leq S_0$. Здесь возможны два варианта $\mu(s) = \mu_0$ и $\mu(s) = \mu_1$. Обозначим

$$g_0(s) = P\{s < s(t) \leq s + ds, \mu(s) = \mu_0\} / ds,$$

$$g_1(s) = P\{s < s(t) \leq s + ds, \mu(s) = \mu_1\} / ds$$

в стационарном режиме. Очевидно, что

$$P(s) = g_0(s) + g_1(s).$$

Рассмотрим сначала траекторию, для которой $\mu(s) = \mu_0$. В этом случае значение капитала s в момент времени $t + \Delta t$ может быть получено в следующих ситуациях. В момент времени t капитал фонда равнялся s и за время Δt он не изменился. Вероятность этого события $1 - (\lambda + \mu_0)\Delta t + o(\Delta t)$. В момент времени t капитал фонда равнялся $s - x$, и за время Δt поступила случайная премия x . Вероятность этого события $\lambda \Delta t \varphi(x) dx + o(\Delta t)$. В момент времени t капитал фонда равнялся $s + x$, и за время Δt произведена случайная выплата x . Вероятность этого события $\mu_1 \Delta t \psi(x) dx + o(\Delta t)$. Причем $s + x \leq S_0$, так как в противном случае $\mu(s)$ равнялось бы μ_1 , а не μ_0 (траектория начиналась бы в области $s > S_0$). По формуле полной вероятности получим в стационарном режиме

$$(\lambda + \mu_0)g_0(s) = \lambda \int_0^s g_0(s - x) \varphi(x) dx + \lambda \int_s^\infty P(s - x) \varphi(x) dx + \mu_0 \int_0^{S_0 - s} g_0(s + x) \psi(x) dx. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu(s) = \mu_1$ (траектория изменения капитала начиналась в области $s > S_0$). В этом случае значение капитала s в момент времени $t + \Delta t$ может быть получено в следующих ситуациях. В момент времени t капитал фонда равнялся s , и за время Δt он не изменился. Вероятность этого события $1 - (\lambda + \mu_1)\Delta t + o(\Delta t)$. В момент времени t капитал фонда равнялся $s - x$, и за время Δt поступила случайная премия x . Вероятность этого события $\lambda \Delta t \varphi(x) dx + o(\Delta t)$. При этом $s - x > 0$, так как в противном случае $\mu(s) = \mu_0$, а не μ_1 (траектория начиналась бы в области $s < 0$). В момент времени t капитал фонда равнялся $s + x$, и за время Δt произведена случайная выплата x . Вероятность этого события $\mu_1 \Delta t \psi(x) dx + o(\Delta t)$. В стационарном режиме получим

$$(\lambda + \mu_1)g_1(s) = \lambda \int_0^s g_1(s - x) \varphi(x) dx + \mu_1 \int_0^{S_0 - s} g_1(s + x) \psi(x) dx + \mu_1 \int_{S_0 - s}^\infty P(s + x) \psi(x) dx. \quad (4)$$

Наконец, в области $s < 0$, учитывая, что переход в эту область возможен из области $s > S_0$, а из области $0 \leq s \leq S_0$ как с траектории с $\mu(s) = \mu_0$, так и с траектории с $\mu(s) = \mu_1$, получим в стационарном режиме

$$(\lambda + \mu_0)P(s) = \lambda \int_0^{\infty} P(s-x)\varphi(x)dx + \mu_0 \int_0^{-s} P(s+x)\varphi(x)dx + \\ + \mu_0 \int_{-s}^{S_0-s} g_0(s+x)\psi(x)dx + \mu_1 \int_{-s}^{S_0-s} g_1(s+x)\psi(x)dx + \mu_1 \int_{S_0-s}^{\infty} P(s+x)\psi(x)dx. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) должно удовлетворять граничному условию $P(-\infty) = 0$.

3. Экспоненциальные распределения премий и выплат

Пусть распределения поступающих премий и выплат из фонда являются экспоненциальными:

$$\varphi(s) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{s}{a}\right), \quad \psi(s) = \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{s}{b}\right). \quad (6)$$

В этом случае может быть найдено точное решение системы уравнений (2) – (5). Рассмотрим, например, решение уравнения (5) как самого громоздкого. Подставляя в уравнение (5) плотности распределения $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ (6), получим

$$(\lambda + \mu_0)P(s) = \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{s}{a}} \int_{-\infty}^s P(y) e^{\frac{y}{a}} dy + \frac{\mu_0}{b} e^{\frac{s}{b}} \int_s^0 P(y) e^{-\frac{y}{b}} dy + Q e^{\frac{s}{b}}, \quad (7)$$

где
$$Q = \frac{\mu_0}{b} \int_0^{S_0} g_0(y) e^{-\frac{y}{b}} dy + \frac{\mu_1}{b} \int_0^{S_0} g_1(y) e^{-\frac{y}{b}} dy + \frac{\mu_1}{b} \int_{S_0}^{\infty} P(y) e^{-\frac{y}{b}} dy.$$

Дважды дифференцируя (7), приходим к уравнению

$$\ddot{P}(s) - k_0 \dot{P}(s) = 0, \quad (8)$$

где

$$k_0 = \frac{\lambda a - \mu_0 b}{ab(\lambda + \mu_0)}. \quad (9)$$

Откуда, учитывая условие $P(-\infty) = 0$, будем иметь, что при $s < 0$

$$P(s) = D e^{k_0 s}. \quad (10)$$

Постоянная D должна быть теперь определена так, чтобы решение (10) дифференциального уравнения (8) удовлетворяло исходному уравнению (7).

Аналогично, решение уравнения (2) имеет в области $s > S_0$ вид

$$P(s) = A e^{-k_1 s}, \quad (11)$$

где

$$k_1 = \frac{\mu_1 b - \lambda a}{ab(\lambda + \mu_1)}, \quad (12)$$

решение уравнения (3) в области $0 \leq s \leq S_0$

$$g_0(s) = B_1 + B_2 e^{k_0 s}, \quad (13)$$

решение уравнения (4)

$$g_1(s) = C_1 + C_2 e^{-k_1 s}. \quad (14)$$

Постоянные A, B_1, B_2, C_1, C_2, D должны быть теперь выбраны так, чтобы функции (10), (11), (13), (14) удовлетворяли системе исходных уравнений (2) – (5) и условию нормировки

$$\int_{-\infty}^0 P(s) ds + \int_0^{S_0} (g_0(s) + g_1(s)) ds + \int_0^{+\infty} P(s) ds = 1. \quad (15)$$

Подстановка решений (10), (11), (13), (14) в систему уравнений (2) – (5) приводит к соотношениям на постоянные

$$B_1 + B_2 \frac{1}{1 + k_0 a} = D \frac{1}{1 + k_0 a}; \quad (16)$$

$$B_1 + B_2 \frac{e^{k_0 S_0}}{1 - k_0 b} = 0; \quad (17)$$

$$C_1 + C_2 \frac{1}{1 - k_1 a} = 0; \quad (18)$$

$$C_1 + C_2 \frac{e^{-k_1 S_0}}{1 + k_1 b} = A \frac{e^{-k_1 S_0}}{1 + k_1 b}; \quad (19)$$

$$A \frac{k_1 e^{-k_1 S_0}}{(1 - k_1 a)((1 + k_1 b) - (1 - k_1 a)e^{-k_1 S_0})} = D \frac{k_0 e^{k_0 S_0}}{(1 + k_0 a)((1 + k_0 a)e^{k_0 S_0} - (1 - k_0 b))}. \quad (20)$$

Решая систему уравнений 16) – (20) и учитывая условие нормировки (15), окончательно получим, что

$$P(s) = \begin{cases} W_0 \left((1 + k_0 a) - (1 - k_0 b)e^{-k_0 S_0} \right) e^{k_0 s}, & s < 0, \\ W_0 \left(1 - (1 - k_0 b)e^{k_0(s - S_0)} \right) + W_1 \left(1 - (1 - k_1 a)e^{-k_1 s} \right), & 0 \leq s \leq S_0, \\ W_1 \left((1 + k_1 b)e^{k_1 S_0} - (1 - k_1 a) \right) e^{-k_1 s}, & s > S_0, \end{cases} \quad (21)$$

где
$$W_0 = \frac{k_1(1 + k_0 a)}{(S_0 + a + b)(k_0 + k_1)}, \quad W_1 = \frac{k_0(1 - k_1 a)}{(S_0 + a + b)(k_0 + k_1)}. \quad (22)$$

4. Плотность распределения капитала фонда при малой нагрузке премии

При произвольных распределениях поступающих премий $\varphi(s)$ и выплат $\psi(s)$ получить точное решение системы уравнений (2) – (5) не удастся. Однако в этом случае можно построить приближенное решение уравнений при некоторых дополнительных предположениях. Введем параметр θ , где $0 < \theta < 1$, и будем считать, что

$$\mu_0 b = (1 - \theta)\lambda a, \quad \mu_1 b = (1 + \theta)\lambda a. \quad (23)$$

Параметр θ имеет тот же смысл, что и нагрузка страховой премии в задачах страхования [7]. Рассмотрим, далее, асимптотический случай, когда нагрузка премии $\theta \ll 1$. Практически это означает, что при любом значении капитала s фонд расходует почти столько же денежных средств, сколько в него поступает. При этом естественно считать, что пороги S_1 и S_2 , определяющие гистерезисное управление капиталом, зависят от нагрузки премии θ . Более точно будем считать, что при $\theta \rightarrow 0$ разность порогов $S_0(\theta) = S_2(\theta) - S_1(\theta) \rightarrow \infty$, но существует конечный предел

$$z_0 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta S_0(\theta).$$

Опять перенесем начало отсчета в точку $s = -S_1$. Решение системы уравнений (2) – (5) будем искать в виде

$$g_0(s) = \theta f_0(\theta s, \theta), \quad g_1(s) = \theta f_1(\theta s, \theta), \quad P(s) = \theta f(\theta s, \theta), \quad (24)$$

где $f(z, \theta), f_i(z, \theta)$ – некоторые функции, которые считаются дважды дифференцируемыми по z и равномерно непрерывными по θ . Подставляя (24) в уравнение (3) и делая замену переменной $\theta s = z$, получим уравнение относительно функции $f_0(z, \theta)$:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu_0) f_0(z, \theta) = & \lambda \int_0^{\infty} f_0(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx + \mu_0 \int_0^{\infty} f_0(z + \theta x, \theta) \psi(x) dx + \\
 & + \lambda \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx - \lambda \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f_0(z - \theta x, \theta) \psi(x) dx - \mu_0 \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^{\infty} f_0(z + \theta x, \theta) \psi(x) dx.
 \end{aligned} \quad (25)$$

Раскладывая в первых двух интегралах подынтегральные выражения в ряд Тейлора по первому аргументу и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим, учитывая (23),

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda a_2 + \mu_0 b_2}{2} \ddot{f}_0(z, \theta) - \lambda a \dot{f}_0(z, \theta) + \\
 & + \frac{1}{\theta^2} \left[\lambda \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx - \lambda \int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty} f_0(z - \theta x, \theta) \varphi(x) dx - \mu_0 \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^{\infty} f_0(z + \theta x, \theta) \psi(x) dx \right] + \\
 & + \frac{o(\theta^2)}{\theta^2} = 0.
 \end{aligned} \quad (26)$$

Функции $f(z, \theta), f_0(z, \theta)$ предполагаются дифференцируемыми и, следовательно, ограниченными. Поэтому, например:

$$\frac{1}{\theta^2} \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^{\infty} f_0(z + \theta x, \theta) \psi(x) dx \leq \max_y f_0(y, \theta) \frac{1}{(z_0 - z)^2} \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^{\infty} x^2 \psi(x) dx \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0,$$

так как второй момент $M\{x^2\} = b_2$ по условию существует. Аналогично могут быть оценены и другие интегралы.

Обозначим

$$f_0(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f_0(z, \theta). \quad (27)$$

Переходя в (26) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим уравнение относительно функции $f_0(z)$:

$$\ddot{f}_0(z) - \omega_0 \dot{f}_0(z) = 0, \quad (28)$$

$$\omega_0 = \frac{2\lambda a}{\lambda a_2 + \mu_0 b_2}.$$

где

Откуда

$$f_0(z) = B_1 + B_2 e^{\omega_0 z}$$

и, следовательно,

$$g_0(s) = \theta(B_1 + B_2 e^{\omega_0 \theta s}) + o(\theta). \quad (29)$$

Аналогичные рассуждения позволяют показать, что функция

$$f_1(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f_1(z, \theta) \quad (30)$$

определяется выражением

$$f_1(z) = C_1 + C_2 e^{-\omega_1 z}, \quad (31)$$

где

$$\omega_1 = \frac{2\lambda a}{\lambda a_2 + \mu_1 b_2}, \quad (32)$$

и, следовательно,

$$g_1(s) = \theta(C_1 + C_2 e^{-\omega_1 \theta s}) + o(\theta). \quad (33)$$

Наконец, функция

$$f(z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f(z, \theta) \quad (34)$$

будет равна

$$f(z) = \begin{cases} A e^{-\omega_1 z}, & z > z_0, \\ D e^{\omega_0 z}, & z < 0, \end{cases} \quad (35)$$

где учтено, что $f(z, \theta) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$, и, следовательно,

$$P(s) = \begin{cases} A\theta e^{-\omega_1 \theta s} + o(\theta), & s > S_0, \\ D\theta e^{\omega_0 \theta s} + o(\theta), & s < 0. \end{cases} \quad (36)$$

При выводе соотношений (29), (33) и (36) неявно предполагалось, что $s \neq 0$ и $s \neq S_0$. Рассмотрим теперь уравнения системы (2) – (5) при $s = 0$ и $s = S_0$. При $s = 0$ уравнение (3) имеет вид

$$(\lambda + \mu_0) g_0(0) = \mu_0 \int_0^{S_0} g_0(x) \psi(x) dx + \lambda \int_0^\infty P(-x) \varphi(x) dx.$$

Откуда, учитывая (29) и (36), получим

$$(\lambda + \mu_0)(B_1 + B_2) = \mu_0 \int_0^{S_0} (B_1 + B_2 e^{\omega_0 \theta x}) \psi(x) dx + \lambda D \int_0^\infty e^{-\omega_0 \theta x} \varphi(x) dx + o(\theta).$$

Переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, будем иметь

$$B_1 + B_2 = D. \quad (37)$$

Рассматривая теперь уравнение (3) при $s = S_0$, аналогично получим

$$B_1 + B_2 e^{\omega_0 z_0} = 0. \quad (38)$$

Уравнение (4) при $s = 0$ и $s = S_0$ приводит к соотношениям

$$C_1 + C_2 = 0; \quad (39)$$

$$C_1 + C_2 e^{-\omega_1 z_0} = A e^{-\omega_1 z_0}. \quad (40)$$

Наконец, уравнение (2) при $s = S_0$ дает

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu_1) A e^{-\omega_1 \theta S_0} &= \mu_1 A e^{-\omega_1 \theta S_0} \int_0^\infty e^{-\omega_1 \theta x} \psi(x) dx + \lambda D e^{\omega_0 \theta S_0} \int_{S_0}^\infty e^{-\omega_0 \theta x} + \\ &\lambda \int_0^{S_0} (B_1 + B_2 e^{\omega_0 \theta S_0 - \omega_0 \theta x}) \varphi(x) dx + \lambda \int_0^{S_0} (C_1 + C_2 e^{-\omega_1 \theta S_0 + \omega_1 \theta x}) \varphi(x) dx + o(\theta). \end{aligned}$$

Откуда с учетом (37) – (40)

$$\frac{\lambda a \omega_0}{1 - e^{-\omega_0 z_0}} D - (\mu_1 b \omega_1 + \frac{\lambda a \omega_1}{e^{\omega_1 z_0} - 1}) A e^{-\omega_1 z_0} + \frac{o(\theta)}{\theta} = 0.$$

Так как $\mu_1 b = (1 + \theta) \lambda a$, то, переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим

$$A \frac{\omega_1}{e^{\omega_1 z_0} - 1} = D \frac{\omega_0}{1 - e^{-\omega_0 z_0}}. \quad (41)$$

Решая систему уравнений (38) – (40) и используя условие нормировки (15), окончательно получим, что при $\theta \ll 1$ плотность распределения капитала фонда $P(s)$ имеет вид

$$P(s) = \begin{cases} \frac{(1 - e^{-\omega_0 \theta S_0}) \omega_1}{S_0 (\omega_0 + \omega_1)} e^{\omega_0 \theta s} + o(\theta), & s < 0, \\ \frac{\omega_1 (1 - e^{\omega_0 \theta (s - S_0)})}{S_0 (\omega_0 + \omega_1)} + \frac{\omega_0 (1 - e^{-\omega_1 \theta s})}{S_0 (\omega_0 + \omega_1)} + o(\theta), & 0 \leq s \leq S_0, \\ \frac{\omega_0 (e^{\omega_1 \theta S_0} - 1)}{S_0 (\omega_0 + \omega_1)} e^{-\omega_1 \theta s} + o(\theta), & s > S_0. \end{cases} \quad (42)$$

Зная плотность распределения капитала фонда, можно найти такие его характеристики, как вероятности неплатежеспособности и повышенных выплат.

Неплатежеспособность фонда наступает тогда, когда его капитал становится меньше $-S_1$ (при выбранном начале отсчета). Поэтому вероятность неплатежеспособности фонда

$$P_n = \int_{-\infty}^{-S_1} P(s) ds = \frac{\omega_1 (e^{-\omega_0 \theta S_1} - e^{-\omega_0 \theta S_2})}{\theta (S_2 - S_1) \omega_0 (\omega_0 + \omega_1)}. \quad (43)$$

Повышенные выплаты фонд производит в двух случаях: когда капитал фонда $S > S_0$ либо при $0 \leq s \leq S_0$, когда траектория изменения капитала, начавшись при $s = S_0$, еще не достигла значения 0. Поэтому вероятность повышенных выплат

$$P_n = \int_{S_0}^{\infty} P(s)ds + \int_0^{S_0} g_2(s)ds = \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1}. \quad (44)$$

Как следует из соотношения (44), вероятность P_n не зависит от порогов алгоритма.

Заключение

В работе найдена плотность распределения капитала некоммерческого фонда при пуассоновских потоках премий и выплат и гистерезисном управлении капиталом. Предложенная методика может быть использована для анализа других моделей некоммерческих фондов при условии, что нагрузка премии считается малой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Змеев О.А. Математическая модель фонда социального страхования с детерминированными расходами на социальные программы (диффузионное приближение) // Изв. вузов. Физика. 2003. № 3. С. 83 – 87.
2. Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 18. С. 302 – 308.
3. Лившиц К.И., Шифердекер И.Ю. Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом // Вестник ТГУ. 2006. № 293. С. 38 – 44.
4. Лившиц К.И., Сухотина Л.Ю., Шифердекер И.Ю. Пуассоновская модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлением капиталом // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 19. С. 302 – 312.
5. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Плотность распределения капитала некоммерческого фонда при гистерезисном управлении капиталом // Известия Томского политехнического университета. 2009. Т. 315. С. 174 – 178.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. М.: Мир, 1967. Т. 1. 498 с.
7. Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И. Математические модели страхования. Томск: Изд-во ТГУ, 2004. 180 с.

Бублик Яна Сергеевна

Филиал Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске

Лившиц Климентий Исаакович

Томский государственный университет

E-mail: kim47@mail.ru

Поступила в редакцию 6 мая 2010 г.