ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 Управление, вычислительная техника и информатика № 3(12)

УДК 519.872

А.А. Назаров, И.А. Семенова

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СЕМИИНВАРИАНТОВ

В работе рассматривается RQ-система (Retrial Queue), то есть однолинейная система массового обслуживания с источником повторных вызовов. Исследование данной системы проводится методом асимптотических семиинвариантов с использованием теории характеристических функций. Затем проводится численный анализ RQ-системы и определяется область применимости асимптотических результатов к допредельной ситуации.

Ключевые слова: *однолинейные RQ-системы, асимптотический анализ, источник повторных вызовов.*

За последние годы выявилась необходимость разработки методов исследования RQ-систем. В частности, стремление максимально использовать возможности современных вычислительных машин, систем связи, технологического оборудования приводит к своеобразным и интересным новым задачам в теории RQ-систем.

В теории массового обслуживания аналитическое решение обладает рядом положительных качеств: оно не привязано к определенным числовым значениям параметров потока и системы обслуживания, позволяет находить оптимальные решения и делать общие заключения. Однако во многих случаях аналитическое решение получить затруднительно, поскольку задача настолько сложна, что решение составленных уравнений, к которым сводится задача, представляет собой практически неразрешимую задачу [1, с. 249]. Альтернативным подходом является применение метода асимптотических семиинвариантов для исследования таких задач [2, т. 13, с. 88].

1. Постановка задачи

Рассмотрим RQ-систему, то есть однолинейную систему массового обслуживания с источником повторных вызовов (ИПВ), на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Считается, что требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ. Если прибор занят, то поступившая заявка переходит в источник повторных вызовов, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его на случайное время обслуживания, если же он занят, то заявка мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки случайной продолжительности [3, с. 272]. Необходимо найти распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов.

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $l(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$l(t)=\begin{cases}0, \text{ если прибор свободен,}\\ 1, \text{ если прибор занят.}\end{cases}$$

Обозначим

$$P\{\, l(t)=l, i(t)=i\}=P(l,i,t)$$

вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии l и в источнике повторных вызовов находится i заявок. Процесс $\{l(t),i(t)\}$ изменения во времени состояний описанной системы является марковским.

Для распределения вероятностей $P(l,i,t)$ состояний $\{l,i\}$ рассматриваемой RQ-системы дифференциальные уравнения Колмогорова [4, с. 22], имеют вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(0,i,t)}{\partial t}=-(\lambda+i\sigma)P(0,i,t)+\mu P(1,i,t),\\ \dfrac{\partial P(1,i,t)}{\partial t}=-(\lambda+\mu)P(1,i,t)+\lambda P(0,i,t)+\sigma(i+1)P(0,i+1,t)+\lambda P(1,i-1,t).\end{cases} \quad (1)$$

2. Метод асимптотических семиинвариантов

Применяя систему (1) для стационарного распределения $P(l,i,t) = P(l,i)$, составим систему уравнений, определяющих характеристические функции [5, с. 105]

$$H(l,u)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P(l,i)=P\{l(t)=l\}M\left\{\, e^{jui(t)}\middle|l(t)=l\right\},$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases}-\sigma j\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}=-\lambda H(0,u)+\mu H(1,u),\\ \sigma j e^{-ju}\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}=\lambda H(0,u)+\left(\lambda\left(e^{ju}-1\right)-\mu\right)H(1,u),\end{cases} \quad (2)$$

решение $\{H(0,u), H(1,u)\}$ которой удовлетворяет условию нормировки

$$H(0,0)+H(1,0)=1.$$

Систему (2) будем решать методом асимптотического анализа в условии большой задержки в ИПВ, то есть при условии $\sigma\to 0$.

Для компактной записи вычислений дальнейшие исследования будем проводить в матричном виде [6, с. 83]. Обозначив вектор-строку $H(u)=\{H(0,u),H(1,u)\}$, систему (2) перепишем в виде

$$\sigma j\frac{\partial H(u)}{\partial u}A(ju)=H(u)B(ju); \quad (3)$$

$$H(0)E=1, \quad (4)$$

где E – единичный вектор-столбец, а равенство (4) – условие нормировки.

Здесь матрицы $A(ju)$ и $B(ju)$ можно записать в виде

$$A(ju)=\begin{pmatrix}-1 & e^{-ju}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(ju)^{\nu}}{\nu!}A_{\nu},$$

$$B(ju)=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & \lambda\left(e^{-ju}-1\right)-\mu\end{pmatrix}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(ju)^{\nu}}{\nu!}B_{\nu};$$

$$A(0)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ A_{\nu}=\begin{pmatrix}0 & (-1)^{\nu}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ B(0)=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix},\ B_{\nu}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda(-1)^{\nu}\end{pmatrix}.$$

2.1. Асимптотика первого порядка

Для нахождения асимптотики первого порядка обозначим $\sigma=\varepsilon$, и в уравнении (3) выполним замены [7, с. 130]

$$u=\varepsilon w,\quad H(u)=F_1(w,\varepsilon).$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$j\frac{\partial F_1(w,\varepsilon)}{\partial w}A(j\varepsilon w)=F_1(w,\varepsilon)B(j\varepsilon w),\tag{5}$$

а равенство (4) запишется следующим образом:

$$F_1(0,\varepsilon)E=1.\tag{6}$$

Теорема 1. Предельное, при $\varepsilon\to 0$ значение $F_1(w)$ решения $F_1(w,\varepsilon)$ уравнения (5), удовлетворяющего условию (6), имеет вид

$$F_1(w)=R\cdot e^{jw\kappa_1},$$

где вектор R является решением системы

$$R(B_0+\kappa_1 A_0)=0,\tag{7}$$

удовлетворяющим условию нормировки

$$RE=1,\tag{8}$$

а величина κ_1 является решением нелинейного уравнения

$$R(B_1+\kappa_1 A_1)E=0,$$

где вектор $R=R(\kappa_1)$ зависит от κ_1 и является решением системы (7), (8).

Доказательство. В задаче (5), (6) выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим систему

$$\begin{cases}j\dfrac{\partial F_1(w)}{\partial w}A_0=F_1(w)B_0,\\ F_1(0)E=1,\end{cases}$$

решение $F_1(w)$ которой запишем в виде произведения

$$F_1(w)=R\Phi_1(w)=R\cdot\exp\{jw\kappa_1\}\tag{9}$$

вектора R, определяемого системой

$$\begin{cases}R(B_0+\kappa_1 A_0)=0,\\ RE=1,\end{cases}\tag{10}$$

и скалярной функции $\Phi_1(w)$, вид которой определен равенством (9). Значения величины κ_1 определим следующим образом.

Сложим все уравнения системы (5), умножив это равенство справа на единичный вектор-столбец E, получим равенство

$$j\frac{\partial F_1(w,\varepsilon)}{\partial w}A(j\varepsilon w)E = F_1(w,\varepsilon)B(j\varepsilon w)E\ ,$$

в котором разложим матрицы

$$A(j\varepsilon w) = A_0 + j\varepsilon wA_1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right),\ B(j\varepsilon w) = B_0 + j\varepsilon wB_1 + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right),$$

получим

$$j\frac{\partial F_1(w,\varepsilon)}{\partial w}j\varepsilon wA_1E = F_1(w,\varepsilon)j\varepsilon wB_1E + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right).$$

Выполнив здесь предельный переход при $\varepsilon\to 0$ и подставляя сюда произведение (9), получим нелинейное скалярное уравнение относительно величины κ_1

$$R(B_1 + \kappa_1 A_1)E = 0\ , \tag{11}$$

где вектор $R=R(\kappa_1)$ определяется системой (10).

Теорема доказана.

Найденные функции $F_1(w)$, служат основой построения асимптотики первого порядка.

Определение. Функцию

$$h_1(u) = \exp\left\{ju\frac{\kappa_1}{\sigma}\right\}$$

будем называть асимптотикой первого порядка характеристической функции $H(u)=H(0,u)+H(1,u)$ числа заявок $i(t)$ в источнике повторных вызовов, а величину κ_1/σ – асимптотическим семиинвариантом первого порядка.

2.2. Асимптотика второго порядка

Для нахождении асимптотики второго порядка в уравнении (3) выполним замену

$$H(u) = \exp\left\{j\frac{u}{\sigma}\kappa_1\right\}H_2(u)\ ,$$

тогда для вектор-функции $H_2(u)$ получим уравнение

$$\sigma j\frac{\partial H_2(u)}{\partial u}A(ju) = H_2(u)\{B(ju) + \kappa_1 A(ju)\}\ , \tag{12}$$

решение $H_2(u)$ которого удовлетворяет условию

$$H_2(0)E = 1\ . \tag{13}$$

Теперь, в системе (12), (13) обозначим $\sigma = \varepsilon^2$ и выполним замены

$$u = \varepsilon w,\quad H_2(u) = F_2(w,\varepsilon)\ .$$

Получим задачу

$$j\varepsilon\frac{\partial F_2(w,\varepsilon)}{\partial w}A(j\varepsilon w) = F_2(w,\varepsilon)\{B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w)\}\ ; \tag{14}$$

$$F_2(0,\varepsilon)E = 1\ . \tag{15}$$

Теорема 2. Предельное, при $\varepsilon\to 0$ значение $F_2(w)$ решения $F_2(w,\varepsilon)$ уравнения (14), удовлетворяющего условию (15), имеет вид

$$F_2(w) = R\cdot\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\},$$

где вектор R определен в предыдущей теореме, а величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = \frac{-\left\{g_1(B_1+\kappa_1 A_1)E + \frac{1}{2}R(B_2+\kappa_1 A_2)E\right\}}{g(B_1+\kappa_1 A_1)E + RA_1E}, \qquad (16)$$

в котором векторы g и g_1 являются произвольными частными решениями следующих систем уравнений:

$$g(B_0+\kappa_1 A_0) + RA_0 = 0,$$

$$g_1(B_0+\kappa_1 A_0) + R(B_1+\kappa_1 A_1) = 0.$$

Доказательство теоремы выполним в три этапа [9, с. 130].

Этап 1. В задаче (14), (15) выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим систему

$$\begin{cases} F_2(w)(B_0+\kappa_1 A_0) = 0, \\ F_2(0)E = 1, \end{cases}$$

решение $F_2(w)$ которой запишем в виде произведения

$$F_2(w) = R\Phi_2(w) = R\cdot\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\}, \qquad (17)$$

где вектор R определен системой (10), а значение величины κ_2 определим ниже.

Этап 2. Решение $F_2(w,\varepsilon)$ системы (14) запишем в виде разложения

$$F_2(w,\varepsilon) = \{R + j\varepsilon w f_1(w)\}\Phi_2(w) + O\left(\varepsilon^2\right) =$$

$$= \{R + j\varepsilon w f_1(w)\}\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\} + O\left(\varepsilon^2\right), \qquad (18)$$

которое подставим в систему (14), получим равенство

$$j\varepsilon j^2 w\kappa_2 RA(j\varepsilon w) = \{R + j\varepsilon w f_1(w)\}\{B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w)\} + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Подставляя сюда разложение матриц $A(j\varepsilon w)$ и $B(j\varepsilon w)$:

$$A(j\varepsilon w) = A_0 + j\varepsilon w A_1 + O\left(\varepsilon^2\right),$$

$$B(j\varepsilon w) = B_0 + j\varepsilon w B_1 + O\left(\varepsilon^2\right),$$

и принимая во внимание систему $R\,(B_0+\kappa_1 A_0)=0$, запишем равенство

$$-j\varepsilon w\kappa_2 RA_0 = \{R + j\varepsilon w f_1(w)\}\{B_0 + \kappa_1 A_0 + j\varepsilon w[B_1+\kappa_1 A_1]\} + O\left(\varepsilon^2\right) =$$

$$= j\varepsilon w R(B_1+\kappa_1 A_1) + j\varepsilon w f_1(w)(B_0+\kappa_1 A_0) + O\left(\varepsilon^2\right),$$

из которого получим систему уравнений

$$f_1(w)(B_0+\kappa_1 A_0) + R(B_1+\kappa_1 A_1) + \kappa_2 RA_0 = 0$$

относительно вектора $f_1(w)$. Решение $f_1(w)$ этой системы найдем в виде

$$f_1(w) = G_1(w)R + f_1, \tag{19}$$

где $G_1(w)$ – произвольная скалярная функция, а вектор f_1 является решением системы уравнений

$$f_1(B_0 + \kappa_1 A_0) + R(B_1 + \kappa_1 A_1) + \kappa_2 R A_0 = 0. \tag{20}$$

Решение f_1 этой системы запишем в виде суммы

$$f_1 = g_1 + \kappa_2 g, \tag{21}$$

где векторы g и g_1 являются решениями систем

$$g(B_0 + \kappa_1 A_0) + RA_0 = 0,$$

$$g_1(B_0 + \kappa_1 A_0) + R(B_1 + \kappa_1 A_1) = 0. \tag{22}$$

Решение каждой из этих систем содержит слагаемое вида $C{\cdot}R$, которое можно включить в первое слагаемое $G_1(w)R$ разложения (19), поэтому решениями g и g_1 систем (22) могут быть любые частные решения этих неоднородных систем.

Этап 3. Для нахождения значения величины κ_2 сложим все уравнения системы (14), домножив это равенство справа на единичный вектор E, получим

$$j\varepsilon \frac{\partial F_2(w,\varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w)E = F_2(w,\varepsilon)\{B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w)\}E.$$

Подставляя сюда разложение матриц $A(j\varepsilon w)$ и $B(j\varepsilon w)$, разложение (18), а также применяя равенство (11), получим равенство

$$f_1(w)(B_1 + \kappa_1 A_1)E + \tfrac{1}{2}R(B_2 + \kappa_1 A_2)E + \kappa_2 R A_1 E = 0. \tag{23}$$

Тогда, в силу равенства (19) и опять же равенства (11), равенство (23) можно переписать в виде

$$(G_1(w)R + f_1)(B_1 + \kappa_1 A_1)E + \tfrac{1}{2}R(B_2 + \kappa_1 A_2)E + \kappa_2 R A_1 E =$$

$$= f_1(B_1 + \kappa_1 A_1)E + \tfrac{1}{2}R(B_2 + \kappa_1 A_2)E + \kappa_2 R A_1 E = 0. \tag{24}$$

Подставляя сюда разложение (21), получим

$$(g_1 + \kappa_2 g)(B_1 + \kappa_1 A_1)E + \tfrac{1}{2}R(B_2 + \kappa_1 A_2)E + \kappa_2 R A_1 E = 0,$$

откуда найдем значение величины κ_2 в виде

$$\kappa_2 = \frac{-\left\{g_1(B_1 + \kappa_1 A_1)E + \tfrac{1}{2}R(B_2 + \kappa_1 A_2)E\right\}}{g(B_1 + \kappa_1 A_1)E + RA_1 E},$$

совпадающим с (16).

Таким образом, для нахождения величины κ_2 в разложении (18) достаточно ограничиться постоянными векторами f_1, то есть разложение (18) находить в виде

$$F_2(w,\varepsilon) = \{R + j\varepsilon w f_1\}\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\} + O\left(\varepsilon^2\right),$$

определяя этот вектор решением системы (20).

Теорема доказана.

Найденные функции $F_2(w)$, служат основой построения асимптотики второго порядка.

Определение. Функцию

$$h_2(u) = \exp\left\{ ju\frac{\kappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\sigma} \right\}$$

будем называть асимптотикой второго порядка характеристической функции $H(u)$ числа заявок $i(t)$ в источнике повторных вызовов, а величину κ_2/σ – асимптотическим семиинвариантом второго порядка.

2.3. Асимптотика произвольного порядка

Для нахождении асимптотики произвольного порядка будем применять метод математической индукции. Пусть вектор функция $H_n(u)$ ($n \geq 3$)удовлетворяет уравнению

$$\sigma j\frac{\partial H_n(u)}{\partial u}A(ju) = H_n(u)\left\{ B(ju) + \kappa_1 A(ju) + \sum_{\nu=1}^{n-2}\frac{(ju)^\nu}{\nu!}\kappa_{\nu+1}A(ju) \right\}, \qquad (25)$$

в котором известны все κ_ν при $\nu = 1, 2,\ldots, n-1$.

Пусть с применением уравнения (25) найдено значение величины κ_n, тогда выполним замену

$$H_n(u) = \exp\left\{ \frac{(ju)^n}{n!}\frac{\kappa_n}{\sigma} \right\} H_{n+1}(u)$$

и получим уравнение для вектор-функции $H_{n+1}(u)$:

$$\sigma j\frac{\partial H_{n+1}(u)}{\partial u}A(ju) = H_{n+1}(u)\left\{ B(ju) + \kappa_1 A(ju) + \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(ju)^\nu}{\nu!}\kappa_{\nu+1}A(ju) \right\}, \qquad (26)$$

решение $H_{n+1}(u)$ этого уравнения удовлетворяет условию

$$H_{n+1}(0)E = 1. \qquad (27)$$

Далее, применяя (26), (27), найдем значение величины κ_{n+1}. Для этого в задаче (26), (27) обозначим $\sigma = \varepsilon^{n+1}$ и выполним замены

$$u = \varepsilon w, \quad H_{n+1}(u) = F_{n+1}(w,\varepsilon),$$

получим

$$j\varepsilon^n\frac{\partial F_{n+1}(w,\varepsilon)}{\partial w}A(j\varepsilon w) =$$

$$= F_{n+1}(w,\varepsilon)\left\{ B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w) + \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(j\varepsilon w)^\nu}{\nu!}\kappa_{\nu+1}A(j\varepsilon w) \right\}; \qquad (28)$$

$$F_{n+1}(0,\varepsilon)E = 1. \qquad (29)$$

Теорема 3. Предельное, при $\varepsilon \to 0$ значение $F_{n+1}(w)$ решения $F_{n+1}(w,\varepsilon)$ уравнения (28), удовлетворяющего условию (29), имеет вид

$$F_{n+1}(w) = R\cdot\exp\left\{ \frac{(jw)^{n+1}}{(n+1)!}\kappa_{n+1} \right\},$$

где вектор R определен выше, а величина κ_{n+1} определяется равенством

$$\kappa_{n+1}=-\left\{g_n\left(B_1+\kappa_1A_1\right)E+\tfrac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n-1}C_{n+1}^{\nu}f_\nu\left(B_{m+1-\nu}+\sum_{k=0}^{n-\nu}C_{n+1-\nu}^{k}\kappa_{k+1}A_{n+1-\nu-k}\right)E+\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{n+1}R\left(B_{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+1}^{k}\kappa_{k+1}A_{n+1-k}\right)E\right\}\Big/\left\{g\left(B_1+\kappa_1A_1\right)E+RA_1E\right\}, \qquad (30)$$

в котором векторы g и g_n определяются неоднородными системами линейных алгебраических уравнений

$$g\left(B_0+\kappa_1A_0\right)+RA_0=0,$$

$$g_n\left(B_0+\kappa_1A_0\right)+\sum_{\nu=1}^{n-1}C_n^{\nu}f_\nu\left(B_{n-\nu}+\sum_{k=0}^{n-\nu}C_{n-\nu}^{k}\kappa_{k+1}A_{n-\nu-k}\right)+R\left(B_n+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^{k}\kappa_{k+1}A_{n-k}\right)=0$$

и произвольными дополнительными условиями, выделяющими частные решения этих систем из множества всех их решений, а векторы f_ν определяются разложениями

$$f_\nu=g_\nu+\kappa_{\nu+1}g\,,\ \ \nu=\overline{1,n-1}\,.$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы, как и для асимптотики второго порядка, выполним в три этапа.

Этап 1. В задаче (28) – (29) выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим систему

$$\begin{cases}F_{n+1}(w)\left(B_0+\kappa_1A_0\right)=0\,,\\ F_{n+1}(0)E=1\,,\end{cases}$$

решение $F_{n+1}(w)$ которой запишем в виде произведения

$$F_{n+1}(w)=R\Phi_{n+1}(w)=R\cdot\exp\left\{\frac{(jw)^{n+1}}{(n+1)!}\kappa_{n+1}\right\} \qquad (31)$$

вектора R, найденного выше и определяемого системой (10), и скалярной функцией $\Phi_{n+1}(w)$, вид которой определен равенством (31). Значение величины κ_{n+1} будет определено ниже.

Этап 2. Решение $F_{n+1}(w,\varepsilon)$ системы (28) запишем в виде разложения

$$F_{n+1}(w,\varepsilon)=\left\{R+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(j\varepsilon w)^{\nu}}{\nu!}f_\nu\right\}\Phi_{n+1}(w)+O\left(\varepsilon^{n+1}\right)=$$

$$=\left\{R+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(j\varepsilon w)^{\nu}}{\nu!}f_\nu\right\}\exp\left\{\frac{(jw)^{n+1}}{(n+1)!}\kappa_{n+1}\right\}+O\left(\varepsilon^{n+1}\right), \qquad (32)$$

которое подставим в систему (28). Получим равенство

$$j\varepsilon^n j^{n+1}\frac{w^n}{n!}\kappa_{n+1}RA(j\varepsilon w)=\left\{R+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(j\varepsilon w)^{\nu}}{\nu!}f_\nu\right\}\times$$

$$\times\left\{B(j\varepsilon w)+\kappa_1A(j\varepsilon w)+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(j\varepsilon w)^{\nu}}{\nu!}\kappa_{\nu+1}A(j\varepsilon w)\right\}+O\left(\varepsilon^{n+1}\right).$$

Подставляя сюда разложение матриц $A(j\varepsilon w)$ и $B(j\varepsilon w)$

$$A(j\varepsilon w)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(j\varepsilon w)^{\nu}}{\nu!}A_{\nu}+O\left(\varepsilon^{n+1}\right),\ B(j\varepsilon w)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(j\varepsilon w)^{\nu}}{\nu!}B_{\nu}+O\left(\varepsilon^{n+1}\right),$$

получим равенство

$$R\sum_{m=0}^{n}\frac{(j\varepsilon w)^{m}}{m!}\left\{B_m+\sum_{k=0}^{m}C_m^k\kappa_{k+1}A_{m-k}\right\}+\sum_{m=1}^{n}\frac{(j\varepsilon w)^{m}}{m!}\times$$

$$\times\left\{\sum_{\nu=1}^{m}C_m^{\nu}f_{\nu}\left(B_{m-\nu}+\sum_{k=0}^{m-\nu}C_{m-\nu}^{k}\kappa_{k+1}A_{m-\nu-k}\right)\right\}=O\left(\varepsilon^{n+1}\right). \qquad (3$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим последовательность систем линейных алгебраических уравнений относительно векторов R и f_{ν}:

$$R(B_0+\kappa_1A_0)=0,$$

$$f_1(B_0+\kappa_1A_0)+R(B_1+\kappa_1A_1+\kappa_2A_0)=0,$$

$$\ldots$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}C_n^{\nu}f_{\nu}\left(B_{n-\nu}+\sum_{k=0}^{n-\nu}C_{n-\nu}^{k}\kappa_{k+1}A_{n-\nu-k}\right)+R\left(B_n+\sum_{k=0}^{n}C_n^k\kappa_{k+1}A_{n-k}\right)=0. \qquad (34)$$

Последнюю систему из (34) для вектора f_n запишем в виде

$$f_n(B_0+\kappa_1A_0)+\sum_{\nu=1}^{n-1}C_n^{\nu}f_{\nu}\left(B_{n-\nu}+\sum_{k=0}^{n-\nu}C_{n-\nu}^{k}\kappa_{k+1}A_{n-\nu-k}\right)+R\left(B_n+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\kappa_{k+1}A_{n-k}\right)+\kappa_{n+1}RA_0=0$$

и ее решение f_n найдем в виде суммы

$$f_n=g_n+\kappa_{n+1}g, \qquad (35)$$

где вектор g определен системой (22), а вектор g_n является решением системы

$$g_n(B_0+\kappa_1A_0)+\sum_{\nu=1}^{n-1}C_n^{\nu}f_{\nu}\left(B_{n-\nu}+\sum_{k=0}^{n-\nu}C_{n-\nu}^{k}\kappa_{k+1}A_{n-\nu-k}\right)+R\left(B_n+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\kappa_{k+1}A_{n-k}\right)=0.$$

Этап 3. Для нахождения значения величины κ_{n+1} сложим все уравнения системы (28), домножив это равенство справа на единичный вектор столбец E. Принимая во внимание разложение (32), и разложение матриц $A(j\varepsilon w)$ и $B(j\varepsilon w)$, получим равенство

$$\sum_{m=1}^{n+1}\frac{(j\varepsilon w)^{m}}{m!}\left\{\sum_{\nu=1}^{m}C_m^{\nu}f_{\nu}\left(B_{m-\nu}+\sum_{k=0}^{m-\nu}C_{m-\nu}^{k}\kappa_{k+1}A_{m-\nu-k}\right)+\right.$$

$$\left.+R\left(B_m+\sum_{k=0}^{m}C_m^k\kappa_{k+1}A_{m-k}\right)\right\}E+O\left(\varepsilon^{n+2}\right)=0. \qquad (36)$$

В силу равенств (34) все слагаемые в (36), содержащие величину ε в степени меньше чем n+1 равны нулю, поэтому из (36) получим

$$\sum_{\nu=1}^{n+1}C_{n+1}^{\nu}f_{\nu}\left(B_{n+1-\nu}+\sum_{k=0}^{n+1-\nu}C_{n+1-\nu}^{k}\kappa_{k+1}A_{n+1-\nu-k}\right)E+R\left(B_{n+1}+\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k\kappa_{k+1}A_{n+1-k}\right)E=0.$$

Приравнивая здесь во внимание равенства $A_0E = 0$, $B_0E = 0$, можно записать

$$\sum_{\nu=1}^{n} C_{n+1}^{\nu} f_\nu \left(B_{n+1-\nu} + \sum_{k=0}^{n+1-\nu} C_{n+1-\nu}^{k} \kappa_{k+1} A_{n+1-\nu-k} \right) E + R \left(B_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k} \kappa_{k+1} A_{n+1-k} \right) E = 0 .$$

Принимая во внимание равенство (35) и выделяя здесь слагаемые, содержащие величину κ_{n+1}, получим

$$\kappa_{n+1} = -\left\{ g_n (B_1 + \kappa_1 A_1) E + \tfrac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n-1} C_{n+1}^{\nu} f_\nu \left(B_{m+1-\nu} + \sum_{k=0}^{n-\nu} C_{n+1-\nu}^{k} \kappa_{k+1} A_{n+1-\nu-k} \right) E + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{n+1} R \left(B_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^{k} \kappa_{k+1} A_{n+1-k} \right) E \right\} \Big/ \left\{ g (B_1 + \kappa_1 A_1) E + R A_1 E \right\} ,$$

совпадающее с (30).

Теорема доказана.

Найденные функции $F_{n+1}(w)$ служат основой построения асимптотики произвольного порядка.

Определение. Функцию

$$h_{n+1}(u) = \exp\left\{ \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{(ju)^\nu}{\nu!} \frac{\kappa_\nu}{\sigma} \right\} \tag{37}$$

будем называть асимптотикой (n+1)-го порядка характеристической функции $H(u)$ числа заявок $i(t)$ в источнике повторных вызовов, а величину κ_{n+1}/σ – асимптотическим семиинвариантом (n+1)-го порядка.

3. Численный анализ RQ-систем

Для того чтобы получить распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов в допредельной ситуации, необходимо рассмотреть систему уравнений Колмогорова (1) для стационарного распределения $P(l,i)$ [8, с. 76]

$$\begin{cases} -(\lambda + i\sigma) P(0,i) + \mu P(1,i) = 0, \\ -(\lambda + \mu) P(1,i) + \lambda P(0,i) + \sigma (i+1) P(0,i+1) + \lambda P(1,i-1) = 0 . \end{cases} \tag{38}$$

Решение системы (38) запишем в виде алгоритма численной реализации.

1. $i = 0$. Сначала найдем решения $V(k,i)$ системы (38), удовлетворяющие условию $V(0,0) = 1$. Для этого из первого равенства системы (38) выразим $V(1,0)$ и подставим во второе равенство, получим $V(0,1)$

$$V(1,0) = \frac{\lambda V(0,0)}{\mu},\ V(0,1) = \frac{(\lambda+\mu) V(1,0) - \lambda V(0,0)}{\sigma} .$$

2. $i = 1$.

$$V(1,1) = \frac{(\lambda+\sigma) V(0,0)}{\mu},\ V(0,2) = \frac{(\lambda+\mu) V(1,1) - \lambda V(0,1) - \lambda V(1,0)}{2\sigma} .$$

3. $i = 2$.

$$V(1,2) = \frac{(\lambda+2\sigma) V(0,2)}{\mu},\ V(0,3) = \frac{(\lambda+\mu) V(1,2) - \lambda V(0,2) - \lambda V(1,1)}{3\sigma} .$$

4. Для реализации основного алгоритма, когда $i = N$, запишем уравнения

$$V(0,N) = \frac{(\lambda+\mu) V(1,N-1) - \lambda V(0,N-1) - \lambda V(1,N-2)}{N\sigma},\ V(1,N) = \frac{(\lambda+N\sigma) V(0,N)}{\mu} .$$

Далее, получаем величину

$$P(k,i) = \frac{1}{\sum_{\nu}\sum_{n} V(\nu,n)} V(\kappa,i),$$

которая численно определяет двумерное распределение вероятностей $P(k,i)$. Одномерное маргинальное распределение $P(i)$, определяемое равенством

$$P(i) = P(0,i) + P(1,i),$$

численно решает поставленную задачу нахождения распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов, которое естественно совпадает с $P(i)$.

4. Область применимости асимптотических результатов к допредельной ситуации

С помощью полученной асимптотики произвольного порядка (37) и обратного преобразования Фурье, запишем асимптотическое распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов [9, с. 107]

$$P_n(i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} h_n(u)\, du. \qquad (39)$$

Распределение (39) будем называть асимптотической аппроксимацией n-го порядка допредельного распределения.

Теперь выясним, насколько результаты, полученные с помощью асимптотического анализа, близки к результатам, полученным численно в допредельной ситуации. Для этого найдем расстояние Колмогорова между этими распределениями

$$D_n = \max_{0\le m<\infty}\left|\sum_{i=0}^{m} P_n(i) - \sum_{i=0}^{m} P(i)\right|,$$

где $P_n(i)$ – ряд распределения, полученный с помощью асимптотического анализа, а $P(i)$ – ряд распределения для допредельной ситуации, полученный численным алгоритмом.

Используем заданные значения параметров: λ=0,5; μ=1, тогда для различных значений σ значения D_n составили

Сравнение асимптотической аппроксимации второго и третьего порядков с допредельным распределением по расстоянию Колмогорова

σ	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
D_2	0,1601	0,1246	0,0588	0,0416	0,0186
D_3	0,1202	0,0997	0,0417	0,0288	0,0120

Очевидно, что с уменьшением значений величины σ расстояние D уменьшается, то есть повышается точность аппроксимации допредельного распределения распределением, полученным методом асимптотического анализа. Более того, точность такой аппроксимации повышается при переходе от асимптотики второго порядка к асимптотике третьего порядка. Полагая приемлемой погрешность аппроксимации, равную значению 0,05 расстояния Колмогорова, можно определить область применимости $\sigma \le 0{,}005$ для асимптотики второго порядка и $\sigma \le 0{,}01$ для асимптотики третьего порядка. Очевидно, что здесь вторая область применимости в два раза больше первой.

Заключение

Таким образом, в работе проведено исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов. Получены допредельное и асимптотическое распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов. Проведен численный анализ однолинейной RQ-системы с простейшим входящим потоком.

В результате большого количества численных экспериментов можно сделать вывод о том, что применение метода асимптотического анализа к исследованию RQ-систем целесообразно при $\sigma \leq 0{,}005$, что позволяет находить допредельное распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов, применяя асимптотическую аппроксимацию второго и третьего порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R.*, *Go'mez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. // Springer Verlag Berlin Heidelberg. 2008. 318 p.
2. *Назаров А.А.*, *Моисеева С.П.*, *Морозова А.С.* Исследования СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. Специальный выпуск. С. 88 – 92.
3. *Назаров А.А.*, *Семенова И.А.* Сравнение асимптотических и допредельных результатов анализа системы M/M/1/ИПВ // Сб. науч. статей. Минск, 2010. Вып. 3. С. 272 – 277.
4. *Гнеденко Б.В.*, *Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. М.: КомКнига, 2005. 408 с.
5. *Драшева В.И.* Однолинейная система массового обслуживания с конечным источником и повторными вызовами // Проблемы передачи информации. Вып. 3. 1994. С. 104 – 111.
6. *Назаров А.А.*, *Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
7. *Цой С.А.* Применение характеристических функций для асимптотического исследования сетей связи со статистическими протоколами случайного множества доступа // Вестник ТГУ. 2006. № 293. С.129 – 134.
8. *Назаров А.А.*, *Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания: учеб. пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2004. 228 с.
9. *Назаров А.А.*, *Судыко Е.А.* Метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели сети случайного доступа // Проблемы передачи информации. 2010. № 1. С. 94 – 111.

Назаров Анатолий Андреевич
Семенова Инна Анатольевна
Томский государственный университет,
E-mail: anazarov@fpmk.tsu.ru; inna_ac@mail.ru

Поступила в редакцию 30 марта 2010 г.