ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2014 Математика и механика № 6(32)

МАТЕМАТИКА

УДК 511.2

Р.З. Ахмадуллин

О НЕЧЁТНОСТИ СОВЕРШЕННЫХ ЧИСЕЛ

Показано, что множество нечётных совершенных чисел при определённых допущениях конечно. Предложены новые подходы в рассмотрении чисел, являющихся функциями от суммы своих делителей.

Ключевые слова: *совершенное число, нечётное совершенное число, дружественные числа, теория чисел.*

Введение. Постановка задачи

Совершенное число́ (др.-греч. ἀριθμὸς τέλειος) – натуральное число, равное сумме всех своих собственных делителей (т.е. всех положительных делителей, отличных от самого́ числа). Совершенные числа образуют последовательность: 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, … (последовательность A000396 в OEIS). По мере того как натуральные числа возрастают, совершенные числа встречаются всё реже.

Алгоритм построения чётных совершенных чисел описан в IX книге Начал Евклида, где было доказано, что число $2^{p-1}(2^p-1)$ является совершенным, если число $M = 2^p-1$ является простым (так называемые простые числа Мерсенна) [1]. Числа Мерсенна получили известность в связи с эффективным тестом простоты Люка – Лемера, благодаря которому простые числа Мерсенна давно удерживают лидерство как самые большие известные простые числа, однако неизвестно, бесконечно ли множество этих чисел.

Впоследствии Леонард Эйлер доказал, что все чётные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом, но нечётных совершенных чисел до сих пор не обнаружено, однако не доказано и то, что их не существует.

Известно, что нечётное совершенное число, если оно существует, имеет не менее 2800 (!) различных простых делителей [2]. Также известно, что нечётных совершенных чисел нет в интервале $[1,…, 10^{2500}]$. Поиском нечётных совершенных чисел занимается проект распределённых вычислений OddPerfect.org. Таким образом, возникает гипотеза о том, что нечётных совершенных чисел не существует. Займёмся проверкой этой гипотезы.

§1. Необходимое условие

Пусть S – некоторое натуральное число, тогда по основной теореме арифметики имеем

$$S = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_{n-1}^{a_{n-1}} \cdot p_n^{a_n} ,$$

где p_i – простые числа, a_i – некоторые натуральные числа, $a_i \geq 1$, n – количество сомножителей числа S (здесь и далее $i=1,...,n$). Если $p_n > p_{n-1} > ... > p_1$, то такое представление единственно и называется каноническим.

Сумма всех положительных делителей S равна

$$D=\left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{a_1}\right)\left(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{a_2}\right)\cdots\left(1+p_n+p_n^2+\ldots+p_n^{a_n}\right)$$

или, с учётом формулы для суммы геометрической прогрессии,

$$D=\frac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)}\frac{p_2^{1+a_2}-1}{(p_2-1)}\cdots\frac{p_n^{1+a_n}-1}{(p_n-1)}.$$

Пусть S – совершенное число. Из определения совершенного числа следует

$$S=(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{a_1})\cdots\left(1+p_n+p_n^2+\ldots+p_n^{a_n}\right)-S,$$

или

$$\frac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)p_1^{a_1}}\frac{p_2^{1+a_2}-1}{(p_2-1)p_2^{a_2}}\cdots\frac{p_n^{1+a_n}-1}{(p_n-1)p_n^{a_n}}=2. \tag{1}$$

Уравнение (1) – это диофантово уравнение с неопределенным числом неизвестных (содержащее $2n$ неизвестных, значение n – количество сомножителей некоторого числа не фиксировано).

§2. О системах уравнений, эквивалентных формуле (1)

Перепишем равенство (1) в следующем виде:

$$\frac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)p_1^{a_1}}=2\frac{(p_2-1)p_2^{a_2}}{p_2^{1+a_2}-1}\cdots\frac{(p_n-1)p_n^{a_n}}{p_n^{1+a_n}-1}.$$

Обозначим

$$Q_1=2\frac{(p_2-1)*p_2^{a_2}}{p_2^{1+a_2}-1}\cdots\frac{(p_n-1)*p_n^{a_n}}{p_n^{1+a_n}-1}=2\prod_{j=1}^{n\backslash 1}\frac{(p_j-1)p_j^{a_j}}{p_j^{1+a_j}-1}.$$

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)p_1^{a_1}}=q_1. \tag{2}$$

Согласно равенству (1), $Q_i=q_i$, $i=1,...,n$. Очевидно, что $2>q_1>1$.

При $a_i\geq 1$ и $p(i)\leq p_i$ ($p(i)$ – i-е по счёту простое число, $i=1,...,n$) выполняются неравенства

$$\left.\frac{p_i+1}{p_i}\right|_{a_i=1}\leq\frac{p_i^{1+a_i}-1}{(p_i-1)p_i^{a_i}}<\left.\frac{p_i}{p_i-1}\right|_{a_i\to\infty}\leq\frac{p(i+1)}{p(i+1)-1}.$$

Из уравнения (2) с учётом того, что $1\leq a_1<+\infty$, получаем неравенства

$$\frac{p_1}{p_1-1}=1+\frac{1}{p_1-1}>q_1\geq\frac{p_1+1}{p_1}=1+\frac{1}{p_1}>1;$$

$$1+\frac{1}{p_1-1}>q_1\geq 1+\frac{1}{p_1};\ \frac{1}{p_1-1}>q_1-1\geq\frac{1}{p_1}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\frac{1}{p_1-1} > q_1 - 1 \Rightarrow \frac{1}{q_1-1} > p_1 - 1 \Rightarrow \ \frac{1}{q_1-1} + 1 > p_1;\ q_1 - 1 \ge \frac{1}{p_1} \Rightarrow p_1 \ge \frac{1}{q_1-1}.$$

Значит, из формулы (2) при $1 \le a_1 < +\infty$ получаем неравенства

$$\frac{1}{q_1-1} + 1 > p_1 \ge \frac{1}{q_1-1}. \qquad (3)$$

Поскольку p_1 – натуральное число, то оно определяется однозначно:

$$p_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{q_1-1}, & \text{если } \dfrac{1}{q_1-1} - \text{целое}, \\ \left\lceil \dfrac{1}{q_1-1} \right\rceil = \left[\dfrac{1}{q_1-1} \right] + 1, & \text{если } \dfrac{1}{q_1-1} - \text{нецелое}. \end{cases}$$

С учётом определения функции «потолок» получаем более удобную запись этого условия:

$$p_1 = \left\lceil \frac{1}{q_1-1} \right\rceil.$$

Для показателя степени a_1 из того же уравнения (2) получаем следующую зависимость:

$$a_1 = \frac{-ln(q_1 - p_1(q_1-1))}{ln(p_1)}.$$

Таким образом, при заданном рациональном числе q_1 натуральные значения p_1 и a_1 определяются однозначно. Аналогично получаются значения p_i и a_i для $i = 2,...,n$. Заметим, что значение

$$\frac{1}{q_1-1} = \frac{1}{\dfrac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)p_1^{a_1}} - 1} = \frac{(p_1-1)p_1^{a_1}}{p_1^{a_1}-1} = \frac{p_1^{a_1}}{1+p_1+\dots p_1^{a_1-1}} = p_1 - \frac{(p_1+\dots p_1^{a_1-1})}{1+\left(p_1+\dots p_1^{a_1-1}\right)} (a_1 \ne 1)$$

может быть целым только при $a_1 = 1$. Поскольку, согласно уравнению (1), $Q_i = q_i$, $i = 1,...,n$, то, заменив значения q_i на Q_i, получаем систему из $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными:

$$\begin{cases} p_1 = \left\lceil \dfrac{1}{Q_1-1} \right\rceil \ge 2, & a_1 = \dfrac{-ln(Q_1 - p_1(Q_1-1))}{ln(p_1)} \ge 1; \\ & \dots; \\ p_n = \left\lceil \dfrac{1}{Q_n-1} \right\rceil \ge p(n), & a_n = \dfrac{-ln(Q_n - p_n(Q_n-1))}{ln(p_n)} \ge 1, \end{cases} \qquad (4)$$

где

$$Q_i = 2\frac{(p_1-1)p_1^{a_1}}{p_1^{1+a_1}-1} \cdots \frac{(p_{i-1}-1)p_{i-1}^{a_{i-1}}}{p_{i-1}^{1+a_{i-1}}-1} \frac{(p_{i+1}-1)p_{i+1}^{a_{i+1}}}{p_{i+1}^{1+a_{i+1}}-1} \cdots \frac{(p_n-1)p_n^{a_n}}{p_n^{1+a_n}-1} =$$

$$= 2\prod_{j=1}^{n\setminus i} \frac{\left(p_j-1\right)p_j^{a_j}}{p_j^{1+a_j}-1}; \quad i = 1,\dots,n.$$

Очевидно, что если некоторый набор чисел $\{p_i,\ a_i,\ i=1,...,n\}$ удовлетворяет системе (4), то он будет также являться решением уравнения (1). Заметим, что возможна прямая подстановка всех неизвестных в каждое из уравнений системы (4), что даёт систему уравнений от одной переменной вида

$$\begin{cases} f_{n,i}(p_i)=0;\ i=1,\dots,n, \\ \qquad f_{n,i}(a_i)=0, \end{cases} \tag{*}$$

но уже при малых значениях n запись этих уравнений сверхгромоздка, их «этажность» растёт как $\sim n^n$. Из теории систем алгебраических уравнений известно, что в общем случае (без ограничений на целостность показателей степеней a_i и простоту чисел p_i) *при данном n* система уравнений (*) имеет *конечное число решений*, если выполнены два условия:

1) каждое из уравнений системы (*) имеет конечное число решений (при $n=2$ это не так);

2) отсутствуют эквивалентные между собой уравнения.

Рассмотрим теперь уравнение (1) с точки зрения понятия «делимость». Число $(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{a_1})$ может делиться только на те простые числа, которые являются сомножителями числа S и, возможно, ещё на число 2, очевидно также, что оно не делится на число p_1, т.е.

$$\left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{a_1}\right)=\frac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)}=2^{\delta(a_1,p_1)}\prod_{j=1}^{n\backslash 1}p_j^{a^{(1,j)}},$$

где $\delta(a_1,p_1)$ формально определяется так:

$$\delta(a_1,p_1)=\begin{cases} \quad 0,\quad \text{если}\ p_1=2, \\ 0,\quad \text{если}\ p_1\neq 2\ \text{и}\ a_1-\text{чётное}, \\ 1,\ \text{если}\ p_1\neq 2\ \text{и}\ a_1-\text{нечётное}, \end{cases}$$

(согласно лемме 1 при $n>2$ одно и только одно из чисел $2^{\delta(a_i,p_i)}$ равно 2, остальные равны 1), $a^{(1,j)}$ – некоторое неотрицательное число (параметр).

Следовательно, получаем следующую формальную систему уравнений:

$$\begin{cases} \qquad \dfrac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)}=2^{\delta(a_1,p_1)}\prod\limits_{j=1}^{n\backslash 1}p_j^{a^{(1,j)}};\ \ldots; \\ \dfrac{p_n^{1+a_n}-1}{(p_n-1)}=2^{\delta(a_n,\ p_n)}\prod\limits_{j=1}^{n-1}p_j^{a^{(n,j)}};\ \sum\limits_{j=1}^{n}a^{(i,j)}=a_i;\ i=1,...,n. \end{cases} \tag{5}$$

С учётом того, что разложение натуральных чисел на множители определяется однозначно, система уравнений (5) является системой с $2n$ уравнениями и с $2n$ неизвестными (не с (n^2+n) неизвестными). Числа $a^{(i,j)}$ однозначно определяются некоторой функцией факторизации $F(p_1,a_1,i,j)$ и считаются параметрами. Вычисление этих параметров является проблемой факторизации (разложения на множители) и сама эта задача намного сложнее исходной.

Из системы (5) непосредственно следует, что

$$a_i=\frac{\ln\left(1+2^{\delta(a_i,p_i)}(p_i-1)\prod_{j=1}^{n\backslash i}p_j^{a^{(i,j)}}\right)}{\ln(p_i)}-1;\ i=1,...,n,$$

относительно значений p_i получаем алгебраические уравнения степени a_i+1, следовательно, неизвестные p_i и a_i могут быть выражены через параметры $a^{(i,j)}$ в явном виде. Система уравнений (5) при данном n также имеет *конечное число решений*, если в ней отсутствуют тождества и эквивалентные между собой уравнения.

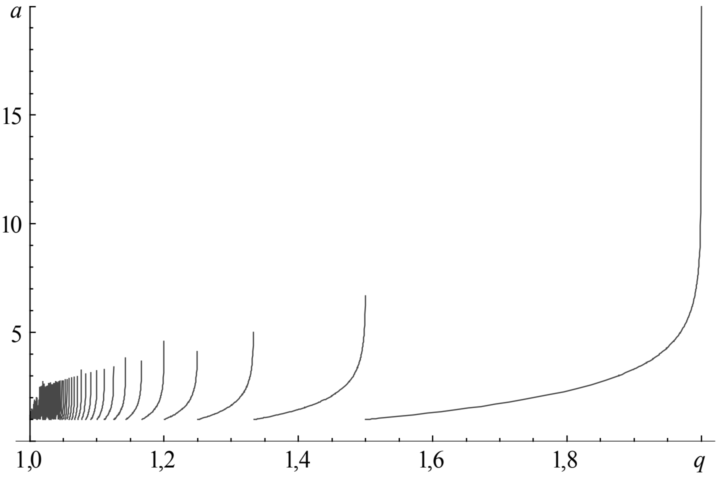
Таким образом, совместно две неэквивалентные системы (4) и (5) дают $4n$ уравнений при $2n$ неизвестных, что явно избыточно для вычисления значений p_i и a_i при больших n (хотя и связано с существенными практическими трудностями) и ставит вопрос о разрешимости уравнения (1) при этих значениях n.

§3. О показателе степени в системе уравнений (4)

Рассмотрим уравнение

$$a = \frac{-\ln\left(\dfrac{1}{q-1} - q\left(\dfrac{1}{q-1} - 1\right)\right)}{\ln\dfrac{1}{q-1}} = \frac{\ln\left(q - \dfrac{1}{q-1}(q-1)\right)^{-1}}{\ln\dfrac{1}{q-1}} \tag{6}$$

при $q \in \boldsymbol{Q}$; $2 > q > 1$. Эта функция имеет бесконечно много разрывов второго рода (бесконечных) слева в точках $q = \dfrac{l+1}{l}$ $(l \in N)$. Ниже приведён график (приблизительный: без учёта окрестностей точек разрыва и особенностей представления чисел с плавающей запятой в вычислительных системах) этой функции при $1 < q < 2$.



Покажем, что если предел a_n при $q_n \to +1$ существует, то он равен 1.

Поскольку (в силу определения функции «потолок»)

$$1 \le \frac{1}{q_n - 1}(q_n - 1) < q_n < 1 + \frac{1}{p(n) - 1} \le 2,$$

то согласно теореме Вейерштрасса об ограниченной убывающей последовательности

$$\lim_{q_n \to +1} \frac{1}{q_n - 1}(q_n - 1) = 1.$$

Значит (если предел существует),

$$\lim_{q_n\to+1} a_n = \lim_{q_n\to+1}\frac{ln\left(q_n-\frac{1}{q_n-1}(q_n-1)\right)^{-1}}{ln\frac{1}{q_n-1}} = \lim_{q_n\to+1}\frac{ln\left(\frac{1}{q_n-1}\right)}{ln\frac{1}{q_n-1}} = 1 .$$

При фиксированном $p=\frac{1}{q-1}$ и $a \ge 2$ область допустимых значений q сильно ограничена по сравнению с «первоначальной». Легко убедиться, что в этом случае на «первоначальном» отрезке $\{1+1/p;\ 1+1/(p+1)\}$ значения q ограничены неравенством

$$1+\frac{1}{p+1} > q \ge 1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p(p+1)^2} .$$

Отношение длины этого отрезка к «первоначальному» с ростом p стремится к нулю как $1/p$.

На интервале (1;2) сумма всех отрезков, для которых $a \ge 2$, равна

$$K=\sum_{P}\frac{1}{(p+1)^2}\approx 0,244 ,$$

причём основной вклад в эту сумму дают первые члены суммы. Например, если считать, что произвольное $p \ge 29$, то вероятность того, что показатель степени a у этого основания будет больше 1 и меньше, чем $K_p \approx 0{,}0078$.

Интересные результаты можно получить при многократной (бесконечной) самоподстановке уравнений (6) и (2). По определению эта итерация не меняет множество значений, удовлетворяющих уравнению (6), однако при $a_i \neq 1$ значение $1/(q_i-1)$ нецелое, и на каждом шаге итерации какая-то часть значений a_i «теряется». Например, однократно подставив в уравнение (6) значения $q=\frac{p_i^{1+a_i}-1}{(p_i-1)\,p_i^{a_i}}$,

получим функцию двух переменных, которая уже не имеет бесконечных разрывов

$$A_i=\frac{\ln\left(\frac{p_i^{1+a_i}-1}{(p_i-1)\,p_i^{a_i}}-\frac{(p_i-1)\,p_i^{a_i}}{p_i^{a_i}-1}\left(\frac{p_i^{1+a_i}-1}{(p_i-1)\,p_i^{a_i}}-1\right)\right)^{-1}}{\ln\frac{(p_i-1)\,p_i^{a_i}}{p_i^{a_i}-1}}$$

и при $3 \le p_i \le 10^6$, $1 \le a_i \le 10^6$ все значения которой меньше 6 (при больших p_i – меньше 1,8; с ростом p_i значение A_i стремится к 1 независимо от значений a_i). Вторая подстановка даёт функцию 4-х переменных и т.д. Предположительно, при многократных итерациях все значения A_i стремятся к 1 и меньше 2, а это означает, что все степени A_i (кроме какого-то определённого их числа) равны 1.

Этот вывод распространяется на все диофантовы уравнения, представимые в виде

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{p_l^{1+a_l}-1}{(p_l-1)\,p_l^{a_l}}=F(n) .$$

Таким образом, если для некоторых $q = F(n)$ удаётся *доказать существование предела*, то, начиная с некоторых значений n, показатель степени a_n может быть равен только 1 (поскольку он может быть только натуральным числом и меньше 2).

Почему этот вывод важен?

В отношении нечётных совершенных чисел из него следовала бы конечность значений n, при которых могут существовать эти числа, а значит, и конечность самого множества возможных нечётных чисел (с учётом лемм 1 и 3). Это относится и ко многим другим числам, представимым в этом виде, для которых можно доказать (например, из соображений делимости), что все степени в разложении их на множители чётные, кроме некоторого конечного их числа (например, это «слегка избыточные» числа).

Абсолютное большинство обнаруженных на сегодняшний день пар дружественных чисел имеют вид $D = p^k \cdot p_1 \cdots p_n$ (все степени простых чисел в разложении его на множители, кроме одного, равны 1). В противоположном случае, при котором в разложении дружественного числа на сомножители имеется более одного сомножителя со степенью больше 1, эти же сомножители являются общими для этой пары.

Если предположить, что это представление верно для всех дружественных чисел, то легко доказать, например, что не существует чётно-нечётной пары дружественных чисел (если количество сомножителей у каждого дружественного числа D больше 1, то это следует из их общего представления, остальные случаи анализируются с учётом системы (4); подробное доказательство здесь не рассматривается).

§4. Некоторые леммы

Из соображений неделимости нечётного совершенного числа на 2 с учётом формулы (1) доказываются леммы 1 и 2. Их вывод полностью элементарен и очевиден (и есть у многих авторов, начиная с Леонарда Эйлера, впервые рассматривавшего нечётные совершенные числа и высказавшего гипотезу, что таких чисел не существует).

Лемма 1. У нечётного совершенного числа S один и только один из показателей степени a_i в каноническом разложении на простые сомножители нечетный и имеет вид $a_i = 4k+1$, $k \in \boldsymbol{N}_0$ (здесь $\boldsymbol{N}_0$ – множество всех натуральных чисел и число **0**), соответственно все остальные показатели степеней a_i – чётные.

Имеем

$$\left(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{a_1}\right) \ldots \left(1 + p_n + p_n^2 + \ldots + p_n^{a_n}\right) = 2 \cdot p_1^{a_1} \cdots p_{n-1}^{a_{n-1}} \cdot p_n^{a_n} .$$

Все p_i – нечётные простые числа, следовательно, в левой части равенства один и только один из сомножителей $\left(1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^{a_i}\right)$ чётен, а все остальные сомножители должны быть нечетными. Очевидно, что сумма $\left(1 + p_j + p_j^2 + \ldots + p_j^{a_j}\right)$ *нечётна* только при условии *чётности a_j*, так как все значения $p_j, p_j^2, \ldots, p_j^{a_j}$ нечётны. И наоборот, $\left(1 + p_j + p_j^2 + \ldots + p_j^{a_j}\right)$ *чётна* только при условии *нечётности a_j*.

Заметим, что сумма $\left(1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{a_i}\right)=\dfrac{p_i^{1+a_i}-1}{(p_i-1)}$, которая чётна, *не может делиться на 4*. Если показатель степени сомножители нечётный и имеет вид $a_i=4k-1$, то эта сумма равна

$$\frac{p_i^{1+a_i}-1}{(p_i-1)}=\frac{p_i^{4k}-1}{(p_i-1)}=\frac{\left(p_i^k-1\right)}{(p_i-1)}\left(p_i^k+1\right)\left(p_i^{2k}+1\right).$$

и при нечётном простом p_i кратна 4, следовательно, a_i имеет вид $4k+1$.

Лемма 2. Простое число, входящее в каноническое разложение числа $S=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdots p_{n-1}^{a_{n-1}}\cdot p_n^{a_n}$ со степенью $a_i=4k+1$ также имеет вид $p_i=4f+1$.

Пусть показатель степени при p_i имеет вид $a_i=4k+1$, тогда

$$\frac{p_i^{1+a_i}-1}{(p_i-1)}=\frac{p_i^{4k+2}-1}{(p_i-1)}=\frac{p_i^{2k+1}-1}{(p_i-1)}\left(p_i^{2k+1}+1\right).$$

Если $p_i=4f-1$, то число $\left(p_i^{2k+1}+1\right)$ кратно 4, что невозможно, следовательно, нечётное p_i имеет вид $4f+1$.

Лемма 3. Для заданного (фиксированного) значения $n\geq 3$ может существовать лишь конечное число нечётных совершенных чисел.

Доказательство. Пусть $n\geq 3$ задано. Поскольку при $n\geq 3$ $p_i\neq 2$ (согласно Л. Эйлеру), то $p_{i+1}\geq p_i+2$ и значит, что выполняются неравенства

$$\frac{p_i}{p_i-1}>\frac{p_i^{1+a_i}-1}{(p_i-1)\,p_i^{a_i}}\geq\frac{p_i+1}{p_i}>\frac{p_{i+1}}{p_{i+1}-1}>\frac{p_{i+1}^{1+a_{i+1}}-1}{(p_{i+1}-1)\,p_{i+1}^{a_{i+1}}}\geq\frac{p_{i+1}+1}{p_{i+1}};$$

$$\frac{p_n^{1+a_n}-1}{(p_n-1)*p_n^{a_n}}<\ldots<\frac{p_2^{1+a_2}-1}{(p_2-1)*p_2^{a_2}}<\frac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)*p_1^{a_1}}$$

независимо от значений показателей степеней a_i.

Из уравнения (1)

$$\frac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)\,p_1^{a_1}}\frac{p_2^{1+a_2}-1}{(p_2-1)\,p_2^{a_2}}\cdots\frac{p_n^{1+a_n}-1}{(p_n-1)\,p_n^{a_n}}=2,$$

последовательно *уменьшая* значения индексов, получаем

$$\left(\frac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)\,p_1^{a_1}}\right)^n>2,\ \text{откуда}\ \frac{p_1}{p_1-1}>\sqrt[n]{2},\ \text{ или }\ \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}>p_1;$$

$$\frac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)\,p_1^{a_1}}\left(\frac{p_2^{1+a_2}-1}{(p_2-1)\,p_2^{a_2}}\right)^{n-1}>2\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt[n-1]{2\dfrac{(p_1-1)\,p_1^{a_1}}{p_1^{1+a_1}-1}}-1}>p_2\ \text{ и т.д.}$$

В общем случае

$$1+\frac{1}{\sqrt[n-k+1]{2\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\left(p_j-1\right)p_j^{a_j}}{p_j^{1+a_j}-1}}-1}>p_k;\quad k=1,...,n-1, \tag{7}$$

причём необходимо $$L_k=2\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\left(p_j-1\right)p_j^{a_j}}{p_j^{1+a_j}-1}>1.$$

Заметим, что это условие выполняется для *всех* достаточно больших значений p_i *независимо от значений* a_i (поскольку для них значение L_k сколь угодно близко к 2), значит, существует лишь конечный набор значений $\{p_i,\ i = 1,...,k–1\}$, при которых оно, возможно, неверно либо значение L_k не является минимальным. Таким образом, значения простых чисел p_k ограничены. Например, поскольку при $p_i \geq p(i)$ верны неравенства

$$1>\left.\frac{p_i}{p_i+1}\right|_{a_i=1}\geq\frac{\left(p_i-1\right)p_i^{a_i}}{p_i^{1+a_i}-1}>\left.\frac{p_i-1}{p_i}\right|_{a_i\to+\infty}\geq\frac{p(i)-1}{p(i)},$$

то из формулы (7) последовательно получаем

$$1+\frac{1}{\sqrt[n-1]{\frac{4}{3}}-1}>p_2;\quad 1+\frac{1}{\sqrt[n-2]{\frac{16}{15}}-1}>p_3;\quad 1+\frac{1}{\sqrt[n-3]{\frac{256}{255}}-1}>p_4,\ \text{если}\ p_3\geq 17\ \text{и т.д.}$$

Только значение p_n не ограничено неравенством (7). С другой стороны, значение p_n определяется из системы (4) при известных значениях $p_1,..., p_n–1, a_1,..., a_{n–1}$ однозначно по формуле $p_n=\frac{1}{Q_n-1}$, значит, $p_n<\frac{1}{Q_n-1}+1$.

Пусть значения p_i, $i = 1,...,n–1$, заданы, множество $\{X\}$ – некоторый произвольный набор натуральных чисел, меньших n, и множество $\{a_X\}$ – набор показателей степеней с этими индексами. Заметим, что выполняется неравенство

$$\lim_{\{a_X\}\to+\infty}Q_n=2\lim_{\{a_X\}\to+\infty}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\left(p_j-1\right)*p_j^{a_j}}{p_j^{1+a_j}-1}=2\prod_{\{n-1\}\setminus\{X\}}^{j}\frac{\left(p_j-1\right)*p_j^{a_j}}{p_j^{1+a_j}-1}\prod_{\{X\}}^{i}\frac{p_i-1}{p_i}\neq 1$$

(поскольку сомножители p_i здесь *несокращаемы*, кроме случая $p_i = 2$). Значит, существует инфимум $\inf Q_n$ (наибольшая нижняя грань) множества дискретных значений Q_n, такой, что $\inf Q_n>1$ при некоторых значениях a_i (включая несобственное значение $+\infty$). Таким образом, значение p_n также ограничено, а именно

$$p_n<\frac{1}{\inf Q_n-1}+1.$$

Например: для $n = 3$ получаем, что $p_n<16$; для $n = 4$ – $p_n < 36$; для $n = 5$ – $p_n < 1296$ и так далее, при этом для некоторых показателей степеней a_i берутся бесконечно большие значения. Численные расчёты показывают, что нечётные совершенные числа, если они существуют, имеют не менее $n = 2800$ различных простых делителей [2] и, скорее всего, их нет и при бóльших значениях n (напомним, что «этажность» непосредственной формулы, дающей значения p_i по системе (4) растёт как $\sim n^n$ и предположительно все эти значения равны 1 или 0, если при этом a_i – натуральное).

Неконструктивное доказательство конечности множества значений a_i следующее. Пусть теперь заданы значения p_i, $i = 1,...,n$, и существуют значения a_i, такие, что уравнение (1) верно. Если существует другой набор значений a_i, при которых уравнение (1) также верно, то очевидно, что в этом наборе, хотя бы одно из чисел a_i будет меньше, чем в первом (иначе $\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i^{1+a_i}-1}{(p_i-1)\,p_i^{a_i}} > 2$). В третьем наборе *натуральных* значений a_i хотя бы один из показателей степеней будет меньше, чем во втором, и т.д., однако эти переходы от одного возможного решения к другому не могут продолжаться бесконечно. Таким образом, при фиксированных значениях p_i существует лишь конечный набор гипотетических значений a_i, при которых уравнение (1) верно.

Из этих утверждений следует верность леммы 3.

Замечания

Чтобы доказать конечность множества всех нечётных совершенных чисел нужно каким-либо образом ограничить значения n, при которых системы (4) и (5) целочисленно разрешимы.

При известных значениях p_i численные значения показателей степеней a_i могут быть получены из системы (4), причём все они должны быть натуральными. Поскольку при больших значениях n показатели степеней a_i, скорее всего, уменьшаются, то достаточно показать, что хотя бы два из них будут меньше двух ($a_i < 2$).

Условие (2) можно записать так:

$$p_1^{a_1+1} - p_1^{a_1}\,\frac{q_1}{q_1-1} + \frac{1}{q_1-1} = 0\,.$$

Это каноническая запись уравнения степени a_1+1 относительно неизвестной p_1 и далеко не при каждых значениях a_1 и q_1 оно разрешимо в радикалах (и тем более в целых числах). С другой стороны, система уравнений (4) получена исходя из того, что значение натурального p_1 определено при любых значениях a_1 и q_1: $p_1 = \frac{1}{q_1-1}$, следовательно, на эту систему могут быть наложены дополнительные ограничения.

Лемма 4. Показатель степени a_n – наименьший среди значений a_i.

Поскольку

$$p_1^{a_1} < \frac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)} < p_1^{a_1+1}\,,$$

то из системы уравнений (5) получаем следующие линейные неравенства:

$$\begin{cases} \frac{1}{\ln(p_i)}\ln\left(2^{\delta(a_i,\,p_i)}\prod_{j=1}^{n\backslash i}p_j^{a^{(i,j)}}\right) > a_i > -1 + \frac{1}{\ln(p_i)}\ln\left(2^{\delta(a_i,\,p_i)}\prod_{j=1}^{n\backslash i}p_j^{a^{(i,j)}}\right), \quad i = 1,...,n; \\ \sum_{j=1}^{n} a^{(i,j)} = a_j, \quad j = 1,...,n, \quad a^{(i,j)} \ge 0. \end{cases}$$

Поскольку числа a_i – натуральные, то они из этого условия при заданных значениях p_i и $a^{(i,j)}$ определяются однозначно, т.е.

$$a_i=\frac{1}{\ln(p_i)}\ln\left(2^{\delta(a_i,\,p_i)}\prod_{j=1}^{n\setminus i}p_j^{a^{(i,j)}}\right)=\frac{\ln 2^{\delta(a_i,\,p_i)}}{\ln(p_i)}+\frac{1}{\ln(p_i)}\sum_{j=1}^{n\setminus i}a^{(i,j)}\ln(p_j),\; i=1,...,n\,, \quad (8)$$

либо не существуют, если значение $\dfrac{1}{\ln(p_i)}\ln\left(2^{\delta(a_i,\,p_i)}\prod_{j=1}^{n\setminus i}p_j^{a^{(i,j)}}\right)$ – целое (что невозможно для простых значений p_i, p_j). Очевидно, что они должны совпадать со значениями a_i, полученными из систем (4) и (5).

Верны неравенства

$$\sum_{j=1}^{n\setminus i}a^{(i,j)}=\sum_{j=1}^{n}a^{(i,j)}-a^{(i,i)}=a_j-a^{(i,i)}\le a_j;\quad \frac{\ln(p_j)}{\ln(p_n)}<1;\quad j=1,...,n-1\,,$$

$$a_n<\frac{\ln 2^{\delta(a_n,\,p_n)}}{\ln(p_n)}+\sum_{j=1}^{n-1}a^{(n,j)}\frac{\ln(p_j)}{\ln(p_n)}<\frac{\ln 2^{\delta(a_n,\,p_n)}}{\ln(p_n)}+a_j\le\frac{\ln 2}{\ln 3}+a_j\,.$$

Следовательно, $a_n\le a_j$.

§5. Некоторые частные решения систем (4) и (5)

Легко показать, что при $n=1$ обе системы (4) и (5) не имеют решений в натуральных числах.

Для системы (4) при $n=2$ получаем

$$Q_1=2\frac{(p_2-1)\,p_2^{a_2}}{p_2^{1+a_2}-1};\; Q_2=2\frac{(p_1-1)\,p_1^{a_1}}{p_1^{1+a_1}-1}\;;$$

$$\begin{cases} p_1=\dfrac{1}{Q_1-1},\;\; a_1=\dfrac{-\ln(p_1-Q_1(p_1-1))}{\ln(p_1)},\\ p_2=\dfrac{1}{Q_2-1},\;\; a_2=\dfrac{-\ln(p_2-Q_2(p_2-1))}{\ln(p_2)};\end{cases}$$

$$p_1=\left(2\frac{(p_2-1)\,p_2^{a_2}}{p_2^{1+a_2}-1}-1\right)^{-1}=\left(\frac{2p_2^{a_2+1}-2p_2^{a_2}-p_2^{1+a_2}+1}{p_2^{1+a_2}-1}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{p_2^{1+a_2}-1}{p_2^{a_2+1}-2p_2^{a_2}+1}=1+\frac{2p_2^{a_2}-2}{p_2^{a_2+1}-2p_2^{a_2}+1};$$

при $p_2=3$ получаем, что $p_1=2$ и $a_1=a_2=1$;

при $p_2>4$ верно неравенство $2p_2^{a_2}-2<p_2^{a_2+1}-2p_2^{a_2}+1$, следовательно, также $p_1=2$; тогда

$$p_2=1+\frac{2p_1^{a_1}-2}{p_1^{a_1+1}-2p_1^{a_1}+1}=2^{a_1+1}-1=2^{a_1+1}-1;$$

поскольку p_2 – простое, то a_1+1 также простое (иначе оно тождественно разлагается на множители);

$$a_2 = \frac{-\ln(2^{a_1+1} - 1 - \frac{2^{a_1+1}}{2^{a_1+1}-1}\left(2^{a_1+1}-2\right))}{\ln(2^{a_1+1}-1)} = \frac{-\ln(\frac{1}{2^{a_1+1}-1})}{\ln(2^{a_1+1}-1)} = 1;$$

$$a_1 = \frac{-\ln(2-2\frac{(p_2-1)\,p_2^{a_2}}{p_2^{1+a_2}-1})}{\ln(2)} = \frac{-\ln(2-2\frac{\left(2^{a_1+1}-2\right)2^{a_1+1}-1}{\left(2^{a_1+1}-1\right)^2-1})}{\ln(2)} = a_1 .$$

Таким образом, приходим к известной формуле: $S_2 = 2^{a_1}(2^{a_1+1}-1)$, где $(2^{a_1+1}-1)$ и a_1+1 – простые.

Для системы (5) при $n=2$ получаем

$$\begin{cases} 1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{a_1} = \dfrac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)} = 2^{\delta(a_1,p_1)}\,p_2^{a_2}; \\ 1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{a_2} = \dfrac{p_2^{1+a_2}-1}{(p_2-1)} = 2^{\delta(a_2,\,p_2)}\,p_1^{a_1}. \end{cases}$$

Если $2^{\delta(a_2,\,p_2)} = 2$, то сумма $(1+p_2+\ldots+p_2^{a_2})$ чётна, следовательно, при $p_2 \neq 2$ (по условию $p_2 \geq 3$) a_2 – нечётное при нечётном p_2, значит,

$$\frac{p_2^{1+a_2}-1}{(p_2-1)} = \frac{\left(p_2^{(1+a_2)/2}-1\right)}{(p_2-1)}\left(p_2^{\frac{1+a_2}{2}}+1\right) = 2p_1^{a_1}.$$

Если $\dfrac{\left(p_2^{(1+a_2)/2}-1\right)}{(p_2-1)}$ чётно, то $2p_1^{a_1}$ кратно 4, откуда $p_1 = 2$. Если $\dfrac{\left(p_2^{(1+a_2)/2}-1\right)}{(p_2-1)}$ нечётно, то получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\left(p_2^{(1+a_2)/2}-1\right)}{(p_2-1)} = p_1^{a_1-k} \\ p_2^{\frac{1+a_2}{2}}+1 = 2p_1^k \end{cases} \Rightarrow 2\frac{\left(p_1^k-1\right)}{(p_2-1)} = p_1^{a_1-k} \Rightarrow 2\left(p_1^k-1\right) = p_1^{a_1-k}\,(p_2-1).$$

Поскольку p_1^k-1 не делится на $p_1^{a_1-k}$ при $a_1-k>1$, то $p_1=2$ либо $\dfrac{\left(p_2^{(1+a_2)/2}-1\right)}{(p_2-1)} = 1$, т.е. $a_2 = 1$ или $p_2+1 = 2p_1^{a_1}$. С учётом второго уравнения получаем $\dfrac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)} = p_2^{a_2}$. Если $a_2 = 1$, то

$$\frac{p_1^{1+a_1}-1}{(p_1-1)} = p_2 = 2p_1^{a_1}-1;\quad p_1^{1+a_1}-1 = 2p_1^{a_1+1}-p_1-2p_1^{a_1}+1;\quad p_1+2p_1^{a_1} = p_1^{a_1+1}+2,$$

значит, 2 делится на p_1. Таким образом, во всех случаях $p_1 = 2$.

Из аналогичных соображений приходим к выводу, что случай $2^{\delta(a_1,\, p_1)} = 2$ невозможен (по условию $p_2 \ge 3$), кроме случая $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ a_1 = a_2 = 1$.

Подстановка значения $p_1 = 2$ в систему (5) при $n = 2$ в итоге даёт ту же формулу: $S_2 = 2^{a_1}(2^{a_1+1} - 1)$, где $2^{a_1+1} - 1$ и $a_1 + 1$ – простые. Заметим, что при $p_1 = 2$ также следует обратное: $n = 2$ (согласно Л. Эйлеру), поэтому при $n > 2$ можно считать, что $p_1 \ge 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Совершенное* число // Википедия – свободная энциклопедия: электронный ресурс. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Совершенное_число, 14.01.14.
2. *Бухштаб А.А.* Теория чисел. М., 1966. 386 с.

Статья поступила 02.02.2014г.

Ahmadullin R.Z. ON ODD PERFECT NUMBERS

A perfect number is a natural number equal to the sum of all its proper divisors (all positive divisors other than the number itself). Perfect numbers form a sequence: 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328 ...

Let $S = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_{n-1}^{a_{n-1}} \cdot p_n^{a_n}$ be a perfect number, where p_i are primes, a_i are some natural numbers, $a_i \ge 1$, $i = 1,...,n$, and n is the number of factors of the number S. Then

$$\frac{p_1^{1+a_1} - 1}{(p_1 - 1)\, p_1^{a_1}} \frac{p_2^{1+a_2} - 1}{(p_2 - 1) * p_2^{a_2}} \cdots \frac{p_n^{1+a_n} - 1}{(p_n - 1) * p_n^{a_n}} = 2\,. \tag{1}$$

Equation (1) is a Diophantine equation with an indefinite number of unknowns; it contains $2n$ unknowns, the value of n (the number of factors of the number) is not fixed. This equation is equivalent to the two systems:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{Q_1 - 1} \ge 2, & a_1 = \dfrac{-ln(Q_1 - p_1(Q_1 - 1))}{ln(p_1)} \ge 1; \\ & \ldots; \\ p_n = \dfrac{1}{Q_n - 1} \ge p(n), & a_n = \dfrac{-ln(Q_n - p_n(Q_n - 1))}{ln(p_n)} \ge 1, \end{cases} \tag{2}$$

where

$$Q_i = 2\frac{(p_1 - 1)\, p_1^{a_1}}{p_1^{1+a_1} - 1} \cdots \frac{(p_{i-1} - 1)\, p_{i-1}^{a_{i-1}}}{p_{i-1}^{1+a_{i-1}} - 1} \frac{(p_{i+1} - 1)\, p_{i+1}^{a_{i+1}}}{p_{i+1}^{1+a_{i+1}} - 1} \cdots \frac{(p_n - 1)\, p_n^{a_n}}{p_n^{1+a_n} - 1} =$$
$$= 2\prod_{j=1}^{n\setminus i} \frac{(p_j - 1)\, p_j^{a_j}}{p_j^{1+a_j} - 1}; \quad i = 1, \ldots, n,$$

and

$$\begin{cases} \dfrac{p_1^{1+a_1} - 1}{(p_1 - 1)} = 2^{\delta(a_1, p_1)} \prod\limits_{j=1}^{n\setminus 1} p_i^{a^{(1,j)}(a_1, p_1)}; \ \ldots; \\ \dfrac{p_n^{1+a_n} - 1}{(p_n - 1)} = 2^{\delta(a_n,\, p_n)} \prod\limits_{j=1}^{n-1} p_i^{a^{(n,j)}(a_n, p_n)}; \ \sum\limits_{j=1}^{n} a^{(j)} = a_i; \ i = 1,...,n, \end{cases} \tag{3}$$

where $\delta(a_1, p_1)$ is formally defined as follows:

$$\delta(a_1,p_1)=\begin{cases} 0, & \text{if } p_1=2, \\ 0, & \text{if } p_1 \neq 2 \text{ and } a_1 - \text{even}, \\ 1, & if\ p_1 \neq 2 \text{ and } a_1 - \text{odd}. \end{cases}$$

With allowance for the fact that the factorization of natural numbers is determined uniquely, the system of equations (5) is a system of $2n$ equations and $2n$ unknowns (not with $(n^2 + n)$ unknowns). The numbers $a^{(i,j)}$ are uniquely determined by a factorization function $F(p_1, a_1, i, j)$ and are considered as parameters.

From the system of equations (2) we obtain the equation

$$a=-\frac{\ln\left(q-\frac{1}{q-1}(q-1)\right)^{-1}}{\ln\frac{1}{q-1}} \tag{4}$$

at $2 > q > 1$. This function has an infinite number of (infinite) left discontinuities of the second kind at the points $q = (l + 1) / l$ $(l \in \mathrm{N})$. Hypothetically, beginning from some values of n, most of exponents of a_n in system (2) can be equal only to 1.

It is proved that for a given (fixed) value $n \geq 3$ there exists only a finite number of odd perfect numbers.

Keywords: odd perfect number, amicable numbers, number theory.

AHMADULLIN Robert Zabitovich (M. Sc., Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla, Ufa, Russian Federation)

E-mail: AhmadullinRobert@yandex.ru

REFERENCES

1. Sovershennoe chislo. *Vikipediya – svobodnaya entsiklopediya: elektronnyy resurs*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Perfect_number, 14.01.14. (in Russian)
2. Bukhshtab A.A. *Teoriya chisel*. Moskow, 1966. 386 p. (in Russian)