УДК 517.982.22

И.В. Корытов

РАВНОМЕРНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ ВЕСОВОГО ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

Приводится вывод первого и второго неравенств Кларксона для негильбертовых весовых пространств функций нескольких переменных. Пространство Соболева нормировано без помощи псевдодифференциальных операторов. Норма включает производные всех промежуточных порядков. Весовая функция рассматривается в наиболее общем виде. При выводе применяются обратные неравенства Минковского с участием интегралов и конечных сумм, интегрирование правой и левой частей неравенств.

Ключевые слова: *равномерно выпуклое банахово пространство*, *весовое пространство Соболева*, *негильбертово пространство*, *весовая функция*, *первое неравенство Кларксона*, *второе неравенство Кларксона.*

1. Введение

Функционально-аналитический подход к оценке погрешностей численных методов требует рассмотрения самих погрешностей как функционалов на функциях из банаховых пространств. Оценка связана с нормой функционала в сопряженном пространстве. Интегральное представление функционала через локально суммируемую функцию дает возможность получить числовое значение нормы. Единственность представления обеспечивается рефлексивностью пространства основных функций. Рефлексивным является всякое равномерно выпуклое банахово пространство. Свойство равномерной выпуклости пространств впервые описано Дж.Э. Кларксоном.

В работе [1] Дж. Э. Кларксона приводятся следующие утверждения.

Предложение (J. A. Clarkson). Все гильбертовы пространства равномерно выпуклы, что следует из равенства

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

Теорема (J.A. Clarkson). Для пространства L_p, $p \geq 2$, справедливы следующие неравенства, связывающие нормы двух произвольных элементов этого пространства:

$$2\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)\leq\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\leq 2^{p-1}\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right);$$

$$2\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)^{q-1}\leq\|x+y\|^q+\|x-y\|^q;$$

$$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\leq 2\left(\|x\|^q+\|y\|^q\right)^{p-1}.$$

Здесь q – сопряженный показатель, $q = p / (p - 1)$.

Для $1 < p \leq 2$ неравенства становятся обратными.

В настоящее время в литературе используется другое представление данных утверждений. Для каждого из случаев $p \geq 2$ и $1 < p \leq 2$ приводится по одному неравенству, которые называются соответственно первым и вторым неравенствами Кларксона

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p\le\frac{1}{2}\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right),\quad p\ge 2; \tag{1}$$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^q\le\left(\frac{1}{2}\|x\|^p+\frac{1}{2}\|y\|^p\right)^{q-1},\quad 1<p\le 2. \tag{2}$$

С. Л. Соболев в [2] приводит для пространства $L_p\,(\Omega)$ доказательство таких утверждений. В этом представлении возможны варианты написания показателей степеней и норм функций. Независимо от формы неизменным остается смысл свойства выпуклости, выраженный в геометрических терминах. Середина переменной хорды единичной сферы пространства не может достигнуть поверхности сферы за исключением предельного случая, когда длина хорды достигнет нуля [1]. Другими словами, середина хорды лежит существенно в глубине шара [2]. Действие каждого из неравенств Кларксона распространяется на определенный диапазон показателя p суммируемости функций рассматриваемого банахова пространства. Границей диапазонов является показатель суммируемости $p = 2$, что соответствует гильбертову пространству. При этом оба неравенства превращаются в одно единственное равенство.

Покажем выполнение свойства равномерной выпуклости для негильбертова пространства Соболева с нормой, содержащей производные всех промежуточных порядков и произвольную положительную функцию в качестве веса. Интегрируемость основных функций в $\boldsymbol{R}_n$ необходима в тех задачах, где предполагается применение интегральных преобразований для нахождения обобщенных решений дифференциальных уравнений в частных производных.

2. Исходные положения

Норма функции φ в пространстве $L_p\,(\Omega)$, где $\Omega\subset\boldsymbol{R}_n$, – ограничена, $1<p<\infty$, $1/p+1/q=1$, равна

$$\left\|\varphi\middle|L_p\,(\Omega)\right\|=\left(\int\limits_{\Omega}|\varphi(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Норма функции φ в весовом пространстве $L_p\,(\boldsymbol{R}_n,\,\omega)$ функций, заданных на $\boldsymbol{R}_n$,

$$\left\|\varphi\middle|L_p\,(\boldsymbol{R}_n)\right\|=\left(\int\limits_{\boldsymbol{R}_n}\omega(x)|\varphi(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Здесь функция $\omega(x)>0$ такая, что произведение $\omega^{1/p}(x)|\varphi\,(x)|$ суммируемо в p-й степени.

Норма в весовом пространстве Соболева $W_p^{(m)}$ $(\boldsymbol{R}_n,\,\omega)$ функций, заданных на $\boldsymbol{R}_n$,

$$\left\|\varphi\middle|W_p^{(m)}\,(\boldsymbol{R}_n,\omega)\right\|=\left(\int\limits_{\boldsymbol{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega(x)\left|D^{\alpha}\varphi(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Здесь функция $\omega(x)>0$ такая, что произведение $\omega^{1/p}(x)|D^{\alpha}\,\varphi(x)|$, $|\alpha|\le m$, суммируемо в p-й степени. На весовую функцию при решении конкретных задач могут налагаться дополнительные ограничения [3, 4].

При доказательстве утверждений будут использованы следующие неравенства [2].

Обратное неравенство Минковского для сумм

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}|\right)^{r}\right)^{1/r} \geq \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_{ik}|^{r}\right)^{1/r}, \quad 0<r<1. \tag{6}$$

Обратное неравенство Минковского для интегралов

$$\left(\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{m}|f_k(x)|\right)^{r}dx\right)^{1/r} \geq \sum_{k=1}^{m}\left(\int_{\Omega}|f_k(x)|^{r}dx\right)^{1/r}, \quad 0<r<1. \tag{7}$$

Лемма 1 (С. Л. Соболев). При $p \geq 2$, $0 \leq x \leq 1$

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^{p}+\left(\frac{1-x}{2}\right)^{p} \leq \frac{1}{2}\left(1+x^{p}\right). \tag{8}$$

Лемма 2 (С. Л. Соболев). При $p \leq 2$ и любых x и y

$$\left(\left|\frac{x+y}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|\frac{x-y}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1} \leq \frac{1}{2}\left(|x|^{p}+|y|^{p}\right). \tag{9}$$

3. Неравенства Кларксона для весового пространства суммируемых в некоторой степени функций

С.Л. Соболев [2] привел доказательства неравенств (1) и (2) с нормами (3). Вначале покажем справедливость неравенств Кларксона для весового пространства $L_p(\boldsymbol{R}_n, \omega)$ с нормой (4). Следуя [2], для функций $\varphi, \psi \in L_p(\boldsymbol{R}_n, \omega)$, $p \geq 2$, где для определенности примем $|\psi| \leq |\varphi|$ в данной точке и, следовательно, $|\psi / \varphi| \leq 1$, преобразуем сумму

$$\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{p}+\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{p}=|\varphi|^{p}\left[\left(\frac{1+\left|\frac{\psi}{\varphi}\right|}{2}\right)^{p}+\left(\frac{1-\left|\frac{\psi}{\varphi}\right|}{2}\right)^{p}\right]. \tag{10}$$

Согласно лемме 1, для выражения, стоящего в квадратных скобках (10), выполняется неравенство (8), где $x = |\psi / \varphi|$:

$$\left(\frac{1+\left|\frac{\psi}{\varphi}\right|}{2}\right)^{p}+\left(\frac{1-\left|\frac{\psi}{\varphi}\right|}{2}\right)^{p} \leq \frac{1}{2}\left(1+\left|\frac{\psi}{\varphi}\right|^{p}\right), \quad 2 \leq p<\infty. \tag{11}$$

Тогда для суммы из левой части (10) будет верным неравенство

$$\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{p}+\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{p} \leq |\varphi|^{p}\left[\frac{1}{2}\left(1+\left|\frac{\psi}{\varphi}\right|^{p}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(|\varphi|^{p}+|\psi|^{p}\right),$$

$$2 \leq p<\infty.$$

При поточечном умножении обеих частей на значение функции ω > 0 знак неравенства сохраняется

$$\omega\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{p}+\omega\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{p}\le\frac{1}{2}\left(\omega|\varphi|^{p}+\omega|\psi|^{p}\right),\qquad(12)$$

$$2\le p<\infty .$$

Далее интегрируя обе части (12) по $\boldsymbol{R}_n$, а интегралы по условию существуют, получаем

$$\int\limits_{\boldsymbol{R}_n}\omega\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{p}dx+\int\limits_{\boldsymbol{R}_n}\omega\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{p}dx\le\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\boldsymbol{R}_n}\omega|\varphi|^{p}dx+\int\limits_{\boldsymbol{R}_n}\omega|\psi|^{p}dx\right),\qquad(13)$$

$$2\le p<\infty .$$

Переходя к записи в нормах (4), получаем первое неравенство Кларксона для весового пространства L_p ($\boldsymbol{R}_n$, ω):

$$\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\middle|L_p(\boldsymbol{R}_n,\omega)\right\|^{p}+\left\|\frac{\varphi-\psi}{2}\middle|L_p(\boldsymbol{R}_n,\omega)\right\|^{p}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\left\|\varphi\middle|L_p(\boldsymbol{R}_n,\omega)\right\|^{p}+\left\|\psi\middle|L_p(\boldsymbol{R}_n,\omega)\right\|^{p}\right),\quad 2\le p<\infty .$$

Для установления второго неравенства Кларксона в весовом пространстве L_p ($\boldsymbol{R}_n$, ω) необходимо к левой части неравенства (9) леммы 2

$$\left(\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}\le\frac{1}{2}\left(|\varphi|^{p}+|\psi|^{p}\right),$$

$$1<p\le 2 ,$$

осложненного весом

$$\left(\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}\le\frac{1}{2}\left(\omega|\varphi|^{p}+\omega|\psi|^{p}\right),\qquad(14)$$

$$1<p\le 2 ,$$

применить обратное неравенство Минковского (7), которое верно для показателей $r=p-1$, таких, что $0<p-1<1$:

$$\left[\int\limits_{\boldsymbol{R}_n}\left(\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}dx\right]^{\frac{1}{p-1}}\ge$$

$$\ge\left[\int\limits_{\boldsymbol{R}_n}\left(\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}dx\right]^{\frac{1}{p-1}}+\left[\int\limits_{\boldsymbol{R}_n}\left(\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}dx\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Далее после упрощения

$$\left[\int_{\boldsymbol{R}_n}\left(\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}dx\right]^{\frac{1}{p-1}} \geq \tag{15}$$

$$\geq\left[\int_{\boldsymbol{R}_n}\omega\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{p}dx\right]^{\frac{1}{p-1}}+\left[\int_{\boldsymbol{R}_n}\omega\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{p}dx\right]^{\frac{1}{p-1}}.$$

С другой стороны, из интегрирования неравенства (14)

$$\int_{\boldsymbol{R}_n}\left(\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}dx \leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\int_{\boldsymbol{R}_n}\omega|\varphi|^{p}dx+\int_{\boldsymbol{R}_n}\omega|\psi|^{p}dx\right),\quad 1<p\leq 2,$$

и возведения обеих частей в степень $1 / (p - 1) > 0$

$$\left[\int_{\boldsymbol{R}_n}\left(\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}dx\right]^{\frac{1}{p-1}} \leq$$

$$\leq\left[\frac{1}{2}\left(\int_{\boldsymbol{R}_n}\omega|\varphi|^{p}dx+\int_{\boldsymbol{R}_n}\omega|\psi|^{p}dx\right)\right]^{\frac{1}{p-1}},\quad 1<p\leq 2,$$

с учетом (15) следует

$$\left[\int_{\boldsymbol{R}_n}\omega\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{p}dx\right]^{\frac{1}{p-1}}+\left[\int_{\boldsymbol{R}_n}\omega\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{p}dx\right]^{\frac{1}{p-1}} \leq$$

$$\leq\left[\frac{1}{2}\left(\int_{\boldsymbol{R}_n}\omega|\varphi|^{p}dx+\int_{\boldsymbol{R}_n}\omega|\psi|^{p}dx\right)\right]^{\frac{1}{p-1}},\quad 1<p\leq 2.$$

Переходя к записи в нормах (4), получим второе неравенство Кларксона для пространства $L_p(\boldsymbol{R}_n, \omega)$:

$$\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|L_p(\boldsymbol{R}_n,\omega)\right\|^{\frac{p}{p-1}}+\left\|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|L_p(\boldsymbol{R}_n,\omega)\right\|^{\frac{p}{p-1}} \leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{2}\|\varphi|L_p(\boldsymbol{R}_n,\omega)\|^{p}+\frac{1}{2}\|\psi|L_p(\boldsymbol{R}_n,\omega)\|^{p}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

$$1<p\leq 2.$$

4. Неравенства Кларксона для весового пространства Соболева

Для функций из весового пространства Соболева $\varphi, \psi \in W_p^{(m)}(\boldsymbol{R}_n, \omega)$, по определению $D^\alpha \varphi$, $D^\alpha \psi \in L_p(\boldsymbol{R}_n, \omega)$, $|\alpha| \le m$. В силу принадлежности производных пространству $L_p(\boldsymbol{R}_n, \omega)$ верным остается неравенство (13) для каждой из них:

$$\int_{\boldsymbol{R}_n} \omega \left| \frac{D^\alpha\varphi + D^\alpha\psi}{2} \right|^p dx + \int_{\boldsymbol{R}_n} \omega \left| \frac{D^\alpha\varphi - D^\alpha\psi}{2} \right|^p dx \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\int_{\boldsymbol{R}_n} \omega \left| D^\alpha\varphi \right|^p dx + \int_{\boldsymbol{R}_n} \omega \left| D^\alpha\psi \right|^p dx \right), \quad 2 \le p < \infty, \quad |\alpha| \le m .$$

Верным неравенство будет и при суммировании всех производных с постоянным общим множителем:

$$\sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \int_{\boldsymbol{R}_n} \omega \left| \frac{D^\alpha\varphi + D^\alpha\psi}{2} \right|^p dx + \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \int_{\boldsymbol{R}_n} \omega \left| \frac{D^\alpha\varphi - D^\alpha\psi}{2} \right|^p dx \le \tag{16}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \int_{\boldsymbol{R}_n} \omega \left| D^\alpha\varphi \right|^p dx + \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \int_{\boldsymbol{R}_n} \omega \left| D^\alpha\psi \right|^p dx \right),$$

$$2 \le p < \infty, \quad |\alpha| \le m .$$

Переход к записи (16), выраженной через нормы (5), дает первое неравенство Кларксона для весового пространства Соболева $W_p^{(m)}(\boldsymbol{R}_n, \omega)$:

$$\left\| \frac{\varphi+\psi}{2} \right| W_p^{(m)}(\boldsymbol{R}_n, \omega) \Big\|^p + \left\| \frac{\varphi-\psi}{2} \right| W_p^{(m)}(\boldsymbol{R}_n, \omega) \Big\|^p \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\left\| \varphi \right| W_p^{(m)}(\boldsymbol{R}_n, \omega) \big\|^p + \left\| \psi \right| W_p^{(m)}(\boldsymbol{R}_n, \omega) \big\|^p \right), \quad 2 \le p < \infty .$$

Для вывода второго неравенства Кларксона введем производные функций в неравенство (14):

$$\left(\omega^{\frac{1}{p-1}} \left| \frac{D^\alpha\varphi + D^\alpha\psi}{2} \right|^{\frac{p}{p-1}} + \omega^{\frac{1}{p-1}} \left| \frac{D^\alpha\varphi - D^\alpha\psi}{2} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{p-1} \le \tag{17}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\omega \left| D^\alpha\varphi \right|^p + \omega \left| D^\alpha\psi \right|^p \right), \quad |\alpha| \le m, \quad 1 < p \le 2 .$$

Обе части (17) суммируем с общим множителем:

$$\sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left(\omega^{\frac{1}{p-1}} \left| \frac{D^\alpha\varphi + D^\alpha\psi}{2} \right|^{\frac{p}{p-1}} + \omega^{\frac{1}{p-1}} \left| \frac{D^\alpha\varphi - D^\alpha\psi}{2} \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{p-1} \le$$

$$\le \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left(\omega \left| D^\alpha\varphi \right|^p + \omega \left| D^\alpha\psi \right|^p \right), \quad 1 < p \le 2 ,$$

интегрируем по $\boldsymbol{R}_n$:

$$\int\limits_{R_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left(\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi+D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi-D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}dx\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int\limits_{R_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left(\omega\left|D^\alpha\varphi\right|^p+\omega\left|D^\alpha\psi\right|^p\right)dx,\quad 1<p\le 2,$$

после чего возводим в степень $1/(p-1)>0$:

$$\left(\int\limits_{R_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left(\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi+D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi-D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}dx\right)^{\frac{1}{p-1}}\le \qquad (18)$$

$$\le\left(\frac{1}{2}\int\limits_{R_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left(\omega\left|D^\alpha\varphi\right|^p+\omega\left|D^\alpha\psi\right|^p\right)dx\right)^{\frac{1}{p-1}},\quad 1<p\le 2.$$

Подготовим левую часть (18) так, чтобы можно было применить обратное неравенство Минковского (6) с показателем $r=p-1$ к сумме по мультииндексу α, стоящей под знаком интеграла:

$$\left(\int\limits_{R_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left(\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi+D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi-D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}dx\right)^{\frac{1}{p-1}}=$$

$$=\left(\int\limits_{R_n}\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left(\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi+D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi-D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-1}}dx\right)^{\frac{1}{p-1}}=$$

$$=\left(\int\limits_{R_n}\left(\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left(\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi+D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi-D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}dx\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Далее применяем обратное неравенство Минковского (6) к сумме внутри скобок:

$$\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left(\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi+D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi-D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\ge$$

$$\ge\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi+D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right|^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}+\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|\omega^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi-D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right|^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}=$$

$$=\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|\omega^{\frac{p-1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi+D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p(p-1)}{p-1}}\right|\right)^{\frac{1}{p-1}}+\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|\omega^{\frac{p-1}{p-1}}\left|\frac{D^\alpha\varphi-D^\alpha\psi}{2}\right|^{\frac{p(p-1)}{p-1}}\right|\right)^{\frac{1}{p-1}}=$$

$$=\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|\omega\left|\frac{D^\alpha\varphi+D^\alpha\psi}{2}\right|^{p}\right|\right)^{\frac{1}{p-1}}+\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|\omega\left|\frac{D^\alpha\varphi-D^\alpha\psi}{2}\right|^{p}\right|\right)^{\frac{1}{p-1}}=$$

$$=\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega\left|\frac{D^\alpha\varphi+D^\alpha\psi}{2}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}+\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega\left|\frac{D^\alpha\varphi-D^\alpha\psi}{2}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Последнее равенство получено с учетом положительности весовой функции ω. Возвращая сумму под знак интеграла, применим теперь обратное неравенство Минковского (7) к этому интегралу

$$\left(\int_{\boldsymbol{R}_n}\left(\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega\left|\frac{D^\alpha\varphi+D^\alpha\psi}{2}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}+\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega\left|\frac{D^\alpha\varphi-D^\alpha\psi}{2}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}dx\right)^{\frac{1}{p-1}}\ge$$

$$\ge\left(\int_{\boldsymbol{R}_n}\left(\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega\left|\frac{D^\alpha\varphi+D^\alpha\psi}{2}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}dx\right)^{\frac{1}{p-1}}+$$

$$+\left(\int_{\boldsymbol{R}_n}\left(\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega\left|\frac{D^\alpha\varphi-D^\alpha\psi}{2}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}dx\right)^{\frac{1}{p-1}}=$$

$$=\left(\int_{\boldsymbol{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega\left|\frac{D^\alpha\varphi+D^\alpha\psi}{2}\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p-1}}+\left(\int_{\boldsymbol{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega\left|\frac{D^\alpha\varphi-D^\alpha\psi}{2}\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

С учетом линейности оператора дифференцирования D^α можно перейти к записи в нормах (5):

$$\left(\int_{\boldsymbol{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega\left|D^\alpha\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p-1}}+\left(\int_{\boldsymbol{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega\left|D^\alpha\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p-1}}=$$

$$=\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\middle|W_p^{(m)}(\boldsymbol{R}_n,\omega)\right\|^{\frac{p}{p-1}}+\left\|\frac{\varphi-\psi}{2}\middle|W_p^{(m)}(\boldsymbol{R}_n,\omega)\right\|^{\frac{p}{p-1}}.$$

Таким образом, получено второе неравенство Кларксона для весового пространства Соболева $W_p^{(m)}(\boldsymbol{R}_n, \omega)$:

$$\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\middle|W_p^{(m)}(\boldsymbol{R}_n,\omega)\right\|^{\frac{p}{p-1}}+\left\|\frac{\varphi-\psi}{2}\middle|W_p^{(m)}(\boldsymbol{R}_n,\omega)\right\|^{\frac{p}{p-1}}\le$$

$$\le\left(\frac{1}{2}\left\|\varphi\middle|W_p^{(m)}(\boldsymbol{R}_n,\omega)\right\|^p+\frac{1}{2}\left\|\psi\middle|W_p^{(m)}(\boldsymbol{R}_n,\omega)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

$$1<p\le 2.$$

5. Заключение

Справедливость неравенств Кларксона, связывающих нормы двух произвольных элементов весового пространства Соболева с показателем суммируемости $p \in (1, \infty)$ означает выполнение свойства равномерной выпуклости единичной сферы. Вывод основан на числовых неравенствах, которые рассматривались для значений функций в точках n-мерного пространства, по которому затем проводилось интегрирование. Результат предназначен для использования в задачах, где необходимо представление обобщенных функций через суммируемые в пространствах, нормируемых с различными весами. Расширение области интегрирования до $\boldsymbol{R}_n$ дает основу для применения в таких задачах интегральных преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Clarkson J.A.* Uniformly convex spaces // Transactions of the American Mathematical Society. 1936. Vol. 40. No. 3. P. 396–414.
2. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
3. *Корытов И.В.* Представление функционала погрешности кубатурной формулы в весовом пространстве Соболева // Вычислительные технологии. Новосибирск, 2006. Т. 11. Специальный выпуск. С. 59–66.
4. *Корытов И.В.* Экстремальная функция линейного функционала в весовом пространстве Соболева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 2 (14). С. 5–15.

Статья поступила 20.05.2014 г.

Korytov I.V. UNIFORM CONVEXITY OF THE WEIGHTED SOBOLEV SPACE

In this paper, uniform convexity of the non-Hilbert weighted Sobolev space of functions of several variables is established. The Sobolev space is normed without pseudodifferential operators. The norm contains partial derivatives of all intermediate orders from zero to the given one. The norm includes a weight function represented in this work in the most general form. The norm is expressed in terms of an improper integral over the entire space of several variables. The first and second Clarkson inequalities are established for such norms. Validity of the two inequalities may be expressed in geometrical terms. It means that the mid-point of a variable chord of a unit sphere of the space cannot approach the surface of the sphere unless the length of the chord tends to zero. Each of the two Clarkson inequalities is valid on a certain range of the summability index of the Banach space under consideration. The limit value of the range is $p = 2$, which corresponds to the Hilbert space. In this case, the two inequalities turn into a single identity. The proof is based on well-known numerical inequalities. The derivation involves reverse Minkowski inequalities for finite sums and integrals, as well as integration of the right- and left-hand sides of the inequalities.

Keywords: uniformly convex Banach space, weighted Sobolev space, non-Hilbert space, weight function, first Clarkson inequality, second Clarkson inequality.

Korytov Igor Vitalievich (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: korytov@tpu.ru

REFERENCES

1. Clarkson J.A. Uniformly convex spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1936, vol. 40, no. 3, pp. 396–414.
2. Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike*. Moskow, Nauka Publ., 1988. (in Russian)
3. Korytov I.V. Predstavlenie funktsionala pogreshnosti kubaturnoy formuly v vesovom prostranstve Soboleva. *Vychislitel'nye tekhnologii*. Novosibirsk, 2006, vol. 11, spetsial'nyy vypusk, pp. 59–66. (in Russian)
4. Korytov I.V. Ekstremal'naya funktsiya lineynogo funktsionala v vesovom prostranstve Soboleva. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2011, no. 2 (14), pp. 5–15. (in Russian)