УДК 514.76

Я.В. Славолюбова

КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА НЕЧЕТНОМЕРНЫХ ЕДИНИЧНЫХ СФЕРАХ[1]

Рассмотрены контактные метрические структуры на единичных сферах S^3 и S^7, получены выражения в координатах стереографической проекции контактной метрической структуры на 3-мерной единичной сфере S^3, изучена связь между контактной структурой на 7-мерной единичной сфере S^7 и почти комплексной структурой на 3-мерном проективном пространстве $\mathbf{CP}^3$.

Ключевые слова: *контактные структуры*, *контактные метрические структуры*, *3-мерная сфера*, *7-мерная сфера*, *риманова метрика.*

1. Предварительные сведения

Напомним основные понятия о контактных многообразиях.

Определение 1 ([1]). Дифференцируемое (2*n*+1)-мерное многообразие M^{2n+1} класса (C^∞) называется контактным многообразием или имеет контактную структуру, если на нем задана глобальная дифференциальная 1-форма η, такая, что $\eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$ всюду на M^{2n+1}.

Контактная структура задает 2*n*-мерное распределение *E*,

$$E=\left\{X\in TM^{2n+1}:\eta(X)=0\right\},$$

которое называют контактным распределением, и ненулевое векторное поле ξ, такое, что $\eta(\xi)=1$, $d\eta(\xi,X)=0$ для всех векторных полей *X* на M^{2n+1}. Это векторное поле определяет 1-мерное распределение, дополнительное к *E*, и называется характеристическим векторным полем контактной структуры.

Определение 2 ([1]). Говорят, что дифференцируемое многообразие M^{2n+1} имеет (η, ξ, φ)-структуру, если оно допускает поле φ эндоморфизмов касательных пространств, векторное поле ξ и 1-форму η, удовлетворяющую условиям

$$\eta(\xi)=1,\ \varphi^2=-I+\eta\otimes\xi, \tag{1}$$

где *I* – тождественное преобразование TM^{2n+1}.

Также имеют место следующие условия: $\varphi\xi=0$ и $\eta\circ\varphi=0$ в определении (η, ξ, φ)-структуры, вытекающие из условий (1).

Определение 3 ([1]). Если многообразие M^{2n+1} с заданной (η, ξ, φ)-структурой допускает риманову метрику *g*, такую, что

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y), \tag{2}$$

$$d\eta(X,Y)=g(X,\varphi Y)$$

для любых векторных полей *X*, *Y*, тогда говорят, что M^{2n+1} имеет (η, ξ, φ, *g*)-струк-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке фонда гранта Президента РФ (проект НШ-4382.2014.1).

туру или контактную метрическую структуру. Риманова метрика g контактной метрической структуры называется ассоциированной метрикой.

Полагая $Y=\xi$ в равенстве (2), получим

$$\eta(X)=g(\xi,X).$$

2. Контактная метрическая структура на S^3

Определим контактную структуру на S^3 и вычислим ее основные характеристики в координатах стереографической проекции. Рассмотрим S^3 как сферу в $\mathbf{C}^2$, т.е. $S^3=\{(z^1,z^2)\in\mathbf{C}^2: |z^1|^2+|z^2|^2=1\}$.

На сфере S^3 подействуем справа группой $G=\{e^{it}, 0\le t\le 2\pi\}$. Ее можно отождествить с единичной сферой S^1. Группа G действует по правилу

$$z\cdot e^{it}=(z^1\cdot e^{it}, z^2\cdot e^{it}).$$

Тогда $S^3/S^1=\mathbf{CP}^1$. Получим отображение $S^3\to\mathbf{CP}^1$, которое называется расслоением Хопфа. Прообразом каждой точки из $\mathbf{CP}^1$ при этом отображении является окружность $S^1=\{e^{it}\}$. Так как $\mathbf{CP}^1$ диффеоморфно двумерной сфере S^2, тогда получим отображение $S^3\to S^2$.

Контактная структура на S^3 строится следующим образом.

Действие S^1 на S^3 порождает характеристическое векторное поле ξ. Его значение в комплексных координатах $\mathbf{C}^2$

$$\xi(z)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(z\cdot e^{it})= =z\cdot i\cdot e^{it}\,\Big|_{t=0}=i\cdot z=i(z^1,z^2).$$

Контактная форма определяется как $\eta(X)=g_0(\xi,X)$ для всех векторных полей X на S^3, где g_0 – риманова метрика.

Аффинор φ определяется из соотношения $d\eta(X,Y)=g_0(X,\varphi Y)$ для любых векторных полей X, Y на S^3.

Контактное распределение E определяется следующим образом:

$$E=\left\{X\in TS^3:\eta(X)=0\right\}.$$

Найдем контактную структуру на S^3 в локальных координатах.

Пусть i: $S^3\to\mathbf{R}^4$ – вложение сферы S^3 в $\mathbf{R}^4$ и пусть (y_1, y_2, y_3, y_4) – декартовы координаты на $\mathbf{R}^4$. Рассмотрим стереографическую проекцию из северного полюса $S(0,0,0,1)$ и соответствующие координаты (x_1, x_2, x_3).

Локальные координаты (x_1, x_2, x_3) на сфере S^3 следующие:

$$x_1=\frac{y_1}{1-y_4},\ x_2=\frac{y_2}{1-y_4},\ x_3=\frac{y_3}{1-y_4}.$$

Координаты (y_1, y_2, y_3, y_4) точки сферы S^3 выражаются через стереографические координаты следующим образом:

$$y_1=\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2},\ y_2=\frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2},$$

$$y_3=\frac{2x_3}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2},\ y_4=\frac{2x_4}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

Под действием группы $S^1 = \{e^{it}\}$ получим отображение

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) \to (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)),$$

где
$$y_1(t) = y_1 \cos t - y_2 \sin t\ ,\ \ y_2(t) = y_1 \sin t + y_2 \cos t\ ,$$
$$y_3(t) = y_3 \cos t - y_4 \sin t\ ,\ \ y_4(t) = y_3 \sin t + y_4 \cos t\ .$$

Также получим

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1(t), x_2(t), x_3(t)),$$

где
$$x_1(t) = \frac{y_1(t)}{1 - y_4(t)}\ ,\ \ x_2(t) = \frac{y_2(t)}{1 - y_4(t)}\ ,\ \ x_3(t) = \frac{y_3(t)}{1 - y_4(t)}\ .$$

Введем предварительные обозначения:

$$x_{123}{}^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2\ ,\ \ x_{-1-23}{}^2 = -x_1{}^2 - x_2{}^2 + x_3{}^2\ .$$

Характеристическое векторное поле ξ задается:

$$\xi = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \frac{dx_3(t)}{dt} \right),$$

где

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{4x_1x_3 + 2x_2(x_{123}{}^2 - 1)}{(x_{123}{}^2 + 1 - 2x_3 \sin t - (x_{123}{}^2 - 1)\cos t)^2} -$$
$$- \frac{2(x_{123}{}^2 + 1)(x_1 \sin t + x_2 \cos t)}{(x_{123}{}^2 + 1 - 2x_3 \sin t - (x_{123}{}^2 - 1)\cos t)^2}\ ;$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{4x_2x_3 - 2x_1(x_{123}{}^2 - 1)}{(x_{123}{}^2 + 1 - 2x_3 \sin t - (x_{123}{}^2 - 1)\cos t)^2} +$$
$$+ \frac{2(x_{231}{}^2 + 1)(x_1 \cos t - x_2 \sin t)}{(x_{123}{}^2 + 1 - 2x_3 \sin t - (x_{123}{}^2 - 1)\cos t)^2}\ ;$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{4x_3{}^2 + (x_{123}{}^2 - 1)}{(x_{123}{}^2 + 1 - 2x_3 \sin t - (x_{123}{}^2 - 1)\cos t)^2} -$$
$$- \frac{(x_{123}{}^2 + 1)(2x_3 \sin t + (x_{123}{}^2 - 1)\cos t)}{(x_{123}{}^2 + 1 - 2x_3 \sin t - (x_{123}{}^2 - 1)\cos t)^2}\ .$$

Характеристическое векторное поле ξ в локальных координатах имеет вид

$$\xi\,|_{t=0} = \left(\mathrm{x}_1 x_3 - x_2, x_2 x_3 + x_1, \frac{1 + x_{-1-23}{}^2}{2} \right).$$

Метрика g_0 на сфере S^3 в локальных координатах

$$g_0 = \frac{4}{(x_{123}{}^2 + 1)^2} \left((dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \right).$$

Матрица $G=(g_{ij})$ метрики g_0:

$$G=\begin{pmatrix} \dfrac{4}{({x_{123}}^2+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{({x_{123}}^2+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{4}{({x_{123}}^2+1)^2} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Вычислим дифференциал контактной формы $d\eta$ в локальных координатах. Для всех векторных полей X на S^3 имеет место следующее равенство: $\eta(X)=g_0(\xi,X)$.

Поскольку

$$\eta = g_{ij}(x)\xi^i(x)X^j(x) = g_{ij}(x)\xi^i(x)dx^j(X),$$

следовательно,

$$d\eta = \frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij}\xi^i)dx^k\wedge dx^j = \xi^i\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}dx^k\wedge dx^j + g_{ij}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\wedge dx^j =$$

$$= \frac{8}{({x_{123}}^2+1)^3}((1+{x_{-1-23}}^2)dx^1\wedge dx^2 + 2(x_2x_3+x_1)dx^3\wedge dx^1 + 2(x_1x_3-x_2)dx^2\wedge dx^3).$$

Окончательно получим

$$d\eta = \frac{8}{({x_{123}}^2+1)^3}((1+{x_{-1-23}}^2)dx^1\wedge dx^2 +$$

$$+2(x_2x_3+x_1)dx^3\wedge dx^1 + 2(x_1x_3-x_2)dx^2\wedge dx^3). \qquad (4)$$

Матрица $A=(a_{ij})$ дифференциала контактной формы $d\eta$ имеет следующий вид:

$$A = l\begin{pmatrix} 0 & 1+{x_{-1-23}}^2 & -2(x_2x_3+x_1) \\ -(1+{x_{-1-23}}^2) & 0 & 2(x_1x_3-x_2) \\ 2(x_2x_3+x_1) & -2(x_1x_3-x_2) & 0 \end{pmatrix},$$

где $l=\dfrac{8}{(1+{x_{123}}^2)^3}$.

Вычислим в локальных координатах аффинор φ. Из определения ассоциированной метрики $d\eta(X,Y)=g(X,\varphi Y)$ для любых векторных полей X, Y. Используя данное равенство, имеем

$$a_{ij}(x)X^iY^j = g_{ik}(x)X^i\varphi^k_j(x)Y^j;$$

$$a_{ij}(x) = g_{ik}(x)\varphi^k_j(x);$$

$$\varphi^k_j(x) = g^{ki}(x)a_{ij}(x).$$

Используя (3), запишем

$$g_{ij} = \frac{4}{(1+x_{123}{}^2)^2}\delta_{ij}.$$

В матричном виде

$$G = \frac{4}{(1+x_{123}{}^2)^2} I, \; G^{-1} = \frac{(1+x_{123}{}^2)^2}{4} I.$$

Пусть $F = (\varphi_{ij})$ – матрица аффинора φ. Тогда получим

$$F = G^{-1}A = \frac{(1+x_{123}{}^2)^2}{4} IA = \frac{(1+x_{123}{}^2)^2}{4} A =$$

$$= m\begin{pmatrix} 0 & 1+x_{-1-23}{}^2 & -2(x_2x_3+x_1) \\ -(1+x_{-1-23}{}^2) & 0 & 2(x_1x_3-x_2) \\ 2(x_2x_3+x_1) & -2(x_1x_3-x_2) & 0 \end{pmatrix},$$

где $m = \dfrac{2}{(1+x_{123}{}^2)^3}$.

Контактная 1-форма η на сфере S^3 задается как

$$\eta = i^*(y^1dy^2 - y^2dy^1 + y^3dy^4 - y^4dy^3).$$

Вычислим ее в локальных координатах. Она имеет вид

$$\eta = p(2(x_1x_3 - x_2)dx_1 + 2(x_2x_3 + x_1)dx_2 + (1 + x_{-1-23}{}^2)dx_3),$$

где $p = \dfrac{2}{(1+x_{123}{}^2)^2}$.

Вычислим внешний дифференциал 1-формы $\eta = \eta_i dx^i$ по формуле $d\eta = \dfrac{\partial \eta_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$ [2]. В результате вычислений

$$d\eta = \frac{8}{(x_{123}{}^2+1)^3}((1+x_{-1-23}{}^2)dx^1 \wedge dx^2 +$$

$$+2(x_2x_3+x_1)dx^3 \wedge dx^1 + 2(x_1x_3 - x_2)dx^2 \wedge dx^3).$$

Сравнивая полученное выражение с (4), видим, что они совпадают.

Легко проверить в матричном виде выполнение следующих равенств: $\varphi\xi = 0$ и $\eta \circ \varphi = 0$.

Таким образом получены выражения в координатах стереографической проекции (локальных координатах) контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) на сфере S^3. Сведем их в следующую теорему.

Теорема 1. Пусть (x_1, x_2, x_3) – стереографические координаты на сфере S^3, тогда контактная метрическая структура $(\eta, \xi, \varphi, g_0)$ в данных координатах задается контактной формой η:

$$\eta = p(2(x_1x_3 - x_2)dx_1 + 2(x_2x_3 + x_1)dx_2 + (1 + x_{-1-23}{}^2)dx_3),$$

где $p=\dfrac{2}{(1+x_{123}{}^2)^2}$; характеристическим векторным полем ξ:

$$\xi\,|_{t=0}=\left(\mathrm{x}_1x_3-x_2,\,x_2x_3+x_1,\,\frac{1+x_{-1-23}{}^2}{2}\right);$$

аффинором φ с матрицей вида

$$m\begin{pmatrix} 0 & 1+x_{-1-23}{}^2 & -2(x_2x_3+x_1) \\ -(1+x_{-1-23}{}^2) & 0 & 2(x_1x_3-x_2) \\ 2(x_2x_3+x_1) & -2(x_1x_3-x_2) & 0 \end{pmatrix},$$

где $m=\dfrac{2}{(1+x_{123}{}^2)^3}$, и метрикой g_0 с матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \dfrac{4}{(x_{123}{}^2+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{(x_{123}{}^2+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{4}{(x_{123}{}^2+1)^2} \end{pmatrix},$$

где $x_{123}{}^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $x_{-1-23}{}^2=-x_1^2-x_2^2+x_3^2$.

2. Контактная метрическая структура на S^7

Рассмотрим S^7 как сферу в $\mathbf{C^4}$, т.е. $S^7=\{(z^1,z^2,z^3,z^4)\in\mathbf{C^4}\colon |z^1|^2+|z^2|^2+|z^3|^2+|z^4|^2=1\}$.

На сфере S^7 подействуем справа группой $G=\{e^{it},\,0\le t\le 2\pi\}$. Ее можно отождествить с единичной сферой S^1. Группа G действует по правилу

$$z\cdot e^t=(z^1\cdot e^{it},z^2\cdot e^{it},z^3\cdot e^{it},z^4\cdot e^{it}).$$

Тогда $S^7/S^1=\mathbf{CP^3}$. Получим отображение $S^7\to\mathbf{CP^3}$, которое называется расслоением Хопфа. Прообразом каждой точки из $\mathbf{CP^3}$ при этом отображении является окружность $S^1=\{e^{it}\}$. Контактная структура на S^7 строится следующим образом.

Действие S^1 на S^7 порождает характеристическое векторное поле ξ. Его значение в комплексных координатах $\mathbf{C^4}$

$$\xi(z)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\,(z\cdot e^{it})=z\cdot i\cdot e^{it}\,|_{t=0}=i\cdot z=i\left(z^1,z^2,z^3,z^4\right).$$

Контактная форма определяется $\eta(X)=g_0(\xi,X)$ для всех векторных полей X на S^7, где g_0 – риманова метрика на S^7.

Вычислим риманову метрику g_0 в комплексных координатах

$$g_0(\xi,X)=(\xi,X)|_{\mathrm{C}^4}\,,\ \ X=(X^1,X^2,X^3,X^4).$$

$$(\xi, X) = (i \cdot z, X) = i(z^1 \overline{X^1} + z^2 \overline{X^2} + z^3 \overline{X^3} + z^4 \overline{X^4}),$$

где $d\overline{z^i}(X) = \overline{X^i}$, $i = \overline{1,4}$, получим выражение формы η в комплексных координатах $\mathbf{C^4}$:

$$\eta = iz^1 d\overline{z^1} + iz^2 d\overline{z^2} + iz^3 d\overline{z^3} + iz^4 d\overline{z^4}.$$

Полагая в данном выражении для формы η на координаты (z^1, z^2, z^3, z^4) соотношение $z^1\overline{z^1} + z^2\overline{z^2} + z^3\overline{z^3} + z^4\overline{z^4} = 1$, получим ограничение формы η в $\mathbf{C^4}$ на S^7.

Проверим условие $\eta \wedge (d\eta)^3 \neq 0$ на S^7. Для этого найдем это выражение в $\mathbf{C^4}$, а затем ограничим его на S^7:

$$\eta \wedge (d\eta)^3 = 6z^4 \wedge dz^1 \wedge d\overline{z^1} \wedge dz^2 \wedge d\overline{z^2} \wedge dz^3 \wedge d\overline{z^3} \wedge d\overline{z^4} +$$

$$+6z^3 \wedge dz^1 \wedge d\overline{z^1} \wedge dz^2 \wedge d\overline{z^2} \wedge dz^4 \wedge d\overline{z^4} \wedge d\overline{z^3} +$$

$$+6z^2 \wedge dz^1 \wedge d\overline{z^1} \wedge dz^3 \wedge d\overline{z^3} \wedge dz^4 \wedge d\overline{z^4} \wedge d\overline{z^2} +$$

$$+6z^1 \wedge dz^2 \wedge d\overline{z^2} \wedge dz^3 \wedge d\overline{z^3} \wedge dz^4 \wedge d\overline{z^4} \wedge d\overline{z^1} = 6i_z\mu,$$

где $\mu = dz^1 \wedge d\overline{z^1} \wedge dz^2 \wedge d\overline{z^2} \wedge dz^3 \wedge d\overline{z^3} \wedge dz^4 \wedge d\overline{z^4}$. Нетрудно заметить, что вычисленное выражение $\eta \wedge (d\eta)^3 \neq 0$ в ограничении на S^7. Следовательно, так определенная 1-форма $\eta(X) = g_0(\xi, X)$ является контактной формой.

Определим по контактной форме η контактное распределение E:

$$E = \{X \in TS^7 : \eta(X) = 0\}.$$

Так как $X \in TS^7$, тогда $X \perp r$, где r – радиус сферы, $r = (z^1, z^2, z^3, z^4)$. Контактное распределение задается уравнениями

$$\begin{cases} i(z^1\overline{X^1} + z^2\overline{X^2} + z^3\overline{X^3} + z^4\overline{X^4}) = 0, \\ z^1X^1 + z^2X^2 + z^3X^3 + z^4X^4 = 0, \end{cases}$$

где $X \in E$, $X = (X^1, ..., X^4)$ – искомые координаты.

Аффинор φ определяется из соотношения $d\eta(X, Y) = g_0(X, \varphi Y)$ и обладает свойствами $\varphi^2|_E = -I$ и $\varphi(\xi) = 0$.

Таким образом определены все характеристики контактной структуры на S^7: η, dη, ξ, E, φ.

3. Связь между контактной структурой на S^7 и почти комплексной структурой на $\mathbf{CP^3}$

При отображении $S^7 \to \mathbf{CP^3}$ контактные метрические структуры и почти комплексные структуры соответствуют друг другу, т.е. данное отображение аффинор φ переводит в почти комплексную структуру J.

Рассмотрим проекцию $\pi: \mathbf{C^4} \backslash \{0\} \to \mathbf{CP^3}$. Используя естественную комплексную координатную систему (z^1, z^2, z^3, z^4) в $\mathbf{C^4} \backslash \{0\}$, имеем фундаментальную форму Φ на $\mathbf{CP^3}$, а также метрику Фубини – Штуди $g(X, Y) = \Phi(JX, Y)$ для любых X, Y.

Докажем, что $d\eta = \pi^*\Phi$. Рассмотрим в $\mathbf{C}^4\backslash\{0\}$ форму

$$\tilde{\Phi} = -4i\partial\bar{\partial}\ln\left(\sum_{k=1}^{4} z^k \overline{z^k}\right) = -4i\partial\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{4} z^k d\overline{z^k}}{\sum\limits_{k=1}^{4} z^k \overline{z^k}}\right) =$$

$$= -4i\left(\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{4} z^k \overline{z^k}\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{4} dz^k d\overline{z^k}\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{4} \overline{z^k} dz^k\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{4} z^k d\overline{z^k}\right)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{4} z^k \overline{z^k}\right)^2}\right).$$

Форма $\tilde{\Phi}$ проектируется на Ф, т.е. $\pi^*\Phi = \tilde{\Phi}$. Рассмотрим ограничение формы $\tilde{\Phi}$ в $\mathbf{C}^4\backslash\{0\}$ на сферу S^7:

$$S^7 = \{(z^1, z^2, z^3, z^4) \in \mathbf{C}^4\colon |z^1|^2 + |z^2|^2 + |z^3|^2 + |z^4|^2 = 1\},$$

$$z \in S^7\colon\ z^1\overline{z^1} + z^2\overline{z^2} + z^3\overline{z^3} + z^4\overline{z^4} = 1 .$$

Продифференцировав равенство $z^1\overline{z^1} + z^2\overline{z^2} + z^3\overline{z^3} + z^4\overline{z^4} = 1$, получим

$$\sum_{k=1}^{4} \overline{z^k} dz^k + \sum_{k=1}^{4} z^k d\overline{z^k} = 0 ,$$

$$\sum_{k=1}^{4} \overline{z^k} dz^k = -\sum_{k=1}^{4} z^k d\overline{z^k} .$$

$$\tilde{\Phi}|_{S^7} = -4i\left(\left(\sum_{k=1}^{4} dz^k \wedge d\overline{z^k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{4} z^k d\overline{z^k}\right) \wedge \left(\sum_{k=1}^{4} z^k d\overline{z^k}\right)\right) = -4i\sum_{k=1}^{4} dz^k \wedge d\overline{z^k} .$$

Рассмотрим глобальную дифференциальную 1-форму η, определенную в разделе 3:

$$\eta = iz^1 d\overline{z^1} + iz^2 d\overline{z^2} + iz^3 d\overline{z^3} + iz^4 d\overline{z^4} = i\sum_{k=1}^{4} z^k d\overline{z^k} .$$

Вычислим внешний дифференциал формы η:

$$d\eta = i\sum_{k=1}^{4} dz^k \wedge d\overline{z^k} .$$

Сравнивая выражения для $\tilde{\Phi}|_{S^7}$ и $d\eta$, получим $d\eta = \tilde{\Phi}|_{S^7}$ или $d\eta = \pi^*\Phi|_{S^7}$ с точностью до коэффициента.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blair D.E.* Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds // Progress in Mathematics. Vol. 203. Birkhäuser Boston, 2002. 304 p.
2. *Кобаяси Ш.*, *Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1 и Т. 2. М.: Наука, 1981. 344 с.

Статья поступила 09.07.2014 г.

Slavolyubova Y.V. CONTACT METRIC STRUCTURES ON ODD-DIMENSIONAL UNIT SPHERES

In this work, the contact structure on the 3-dimensional unit sphere $S^3 \subset R^4 = C^2$ which arises in Hopf's map $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ is considered. The group S^1 acts on the sphere $S^3 \subset R^4 = C^2$ by the rule $(z_1, z_2)e^{i\varphi} = (z_1e^{i\varphi}, z_2e^{i\varphi})$. The field of speeds of this action defines a characteristic vector field ξ and 2-dimensional subspaces E_x orthogonal to the vector field ξ form a contact structure. The contact form η is defined by the equality $\eta(X) = (\xi, X)$. These constructions are generalized in the case of considering the 7-dimensional unit sphere S^7. On the 3-dimensional unit sphere S^3, expressions of the contact metric structure in local coordinates of a stereographic projection are received, the corresponding characteristics are determined: contact form η, external differential of the contact form dη, characteristic vector field ξ, contact distribution E, and affinor φ. A contact metric structure on the 7-dimensional unit sphere is constructed. For the sphere, main characteristics are determined: contact form η, external differential of the contact form dη, characteristic vector field ξ, contact distribution E, and affinor φ are determined. The relation between the contact structure on the 7-dimensional unit sphere S^7 and almost complex structure J established by means of a projection $\pi: S^7 \rightarrow \mathbf{CP}^3$ on the 3-dimensional projective.

Keywords: contact structures, contact metric structures, 3-dimensional sphere, 7-dimensional sphere, Riemannian metrics.

SLAVOLYUBOVA Yaroslavna Viktorovna (Candidate of Physics and Mathematics, Kemerovo Institute of Plekhanov Russian University of Economics, Kemerovo, Russian Federation)

E-mail: jar1984@mail.ru

REFERENCES

1. Blair D.E. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. *Progress in Mathematics*, vol. 203. Birkhäuser Boston, 2002. 304 p.
2. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii*, vol. 1, 2. Moskow, Nauka Publ., 1981. 344 p. (in Russian)