УДК 515.127

А.А. Фёдоров

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТОПОЛОГИИ ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ

Рассматриваются топологические свойства пространств отображений в топологии поточечной сходимости (не обязательно непрерывных). В частности, доказано, что верно неравенство $|T_1| \le nw(P) \le |T|$ для некоторого подмножества P вещественных функций вещественного переменного, имеющих не более чем счётные множества точек разрыва, где T – объединение всех множеств точек разрыва функций из P и T_1 – объединение всех множеств точек разрыва первого рода функций *из* P.

Ключевые слова: *топология поточечной сходимости, сетевой вес, топологические пространства отображений.*

Все неопределенные топологические понятия можно найти в [1]. Все рассматриваемые в статье топологические пространства – тихоновские и кардинальнозначные инварианты считаются бесконечными, то есть, если по обычному определению кардинальный инвариант τ получается конечным, то считаем $\tau = \aleph_0$. В частности, nw(X) – сетевой вес топологического пространства X, w(X) – вес топологического пространства X. Через $C_p(X, Y)$ обозначается пространство всех непрерывных отображений из X в Y с топологией поточечной сходимости и через $C_p(X)$ обозначается $C_p(X, R)$.

Теорема 1. Пусть $P \subset Y^X$ – множество отображений из тихоновского пространства X в тихоновское пространство Y в топологии поточечной сходимости. Пусть T – объединение всех множеств точек разрыва отображений из P. Тогда $nw(P) \le nw(X) \cdot w(Y) \cdot |T|$.

Доказательство. Каждое отображение f из P непрерывно во всех точках из $X \setminus T$ (если бы существовали точка $x \in X \setminus T$ и отображение $f \in P$, такие, что f не является непрерывной в точке x, то $x \in T$, но это противоречит тому, что $x \in X \setminus T$), следовательно, сужение $f|_{X \setminus T}$ непрерывно. Поэтому $f \in C_p(X \setminus T, Y) \times Y^T$ для любого f из P. Таким образом, $P \subset C_p(X \setminus T, Y) \times Y^T$. Из [2] имеем $nw\left(C_p(X \setminus T, Y)\right) \le nw(X \setminus T) \cdot w(Y)$. Тогда

$$nw(P) \le nw\left(C_p(X \setminus T, Y) \times Y^T\right) = nw\left(C_p(X \setminus T, Y)\right) \cdot nw\left(Y^T\right) \le$$
$$\le nw(X \setminus T) \cdot w(Y) \cdot nw(Y) \cdot |T| \le nw(X) \cdot w(Y) \cdot w(Y) \cdot |T| = nw(X) \cdot w(Y) \cdot |T|.$$

Следствие 2. Пусть $P \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ – множество отображений из $\mathbb{R}$ в себя. Пусть T – объединение всех множеств точек разрыва отображений из P. Тогда $nw(P) \le |T|$.

Доказательство. Как известно, $nw(\mathbb{R}) = w(\mathbb{R}) = \aleph_0$, следовательно, по теореме 1 $nw(P) \le nw(\mathbb{R}) \cdot w(\mathbb{R}) \cdot |T| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot |T| = |T|$.

Лемма 3. Пусть T – несчётное множество, $p: T \to (0;+\infty)$, α – несчётный регулярный кардинал, такой, что $\alpha \le |T|$. Тогда существуют $T' \subset T$ и $p_0 > 0$, такие, что $|T'| \ge \alpha$ и $p(t) \ge p_0$ для любого $t \in T'$.

Доказательство.

$$T = p^{-1}(0;\,+\infty) = p^{-1}\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n};+\infty\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}p^{-1}\left(\frac{1}{n};+\infty\right).$$

Допустим, что $\left|p^{-1}\left(\frac{1}{n};\,+\infty\right)\right| < \alpha$ для каждого n. Тогда $|T| < \alpha$, так как α – регулярно. Противоречие. Следовательно, существует n такое, что $\left|p^{-1}\left(\frac{1}{n};\,+\infty\right)\right| \ge \alpha$. Таким образом, $p_0 = \frac{1}{n}$, $T' = p^{-1}\left(\frac{1}{n};\,+\infty\right)$ – искомые.

Теорема 4. Пусть T – несчётное подмножество в $\mathbb{R}$, $X = \{f_t\}_{t\in T} \subset M^{\mathbb{R}}$ – множество отображений из $\mathbb{R}$ в метрическое пространство M в топологии поточечной сходимости, α – несчётный регулярный кардинал, такой, что $\alpha \le |T|$, $\forall t \in T$ $\exists \lim\limits_{x\to t-0} f_t(x) \ne f_t(t)$ (или $\forall t \in T$ $\exists \lim\limits_{x\to t+0} f_t(x) \ne f_t(t)$). Тогда существует $\tilde{T} \subset T$, такое, что $|\tilde{T}| \ge \alpha$ и для любой точки $t \in \tilde{T}$ существует окрестность U_t функции f_t, которая не содержит точек $s \in \tilde{T}$, таких, что $s > t$.

Доказательство. Если $|T| \le \aleph_0$, теорема очевидно верна. Допустим, что $|T| > \aleph_0$. Пусть $\varepsilon(t) = \rho(f_t(t), f_t(t-0))$, где $f_t(t-0) = \lim\limits_{x\to t-0} f_t(x)$. Из условий теоремы ε($t$)>0. По предыдущей лемме существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $T' \subset T$, такие, что $|T'| \ge \alpha$ и $\varepsilon(t) \ge \varepsilon_0$ для любого $t \in T'$. Из определения одностороннего предела функции следует, что для каждого $t \in T'$ существует $\delta(t) > 0$, такое, что $\rho(f_t(t-0), f_t(x)) < \frac{\varepsilon_0}{5}$ для любого $x \in (t-\delta(t);t)$. Используя предыдущую лемму, выберем $\delta_0 > 0$ и $T'' \subset T'$, такие, что $|T''| \ge \alpha$ и $\delta(t) \ge \delta_0$ для любого $t \in T''$. $T'' = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} T'' \cap [\frac{k\delta_0}{2};\frac{(k+1)\delta_0}{2})$, следовательно, существует n такое, что $\tilde{T} = T'' \cap [\frac{n\delta_0}{2};\frac{(n+1)\delta_0}{2})$ имеет мощность, равную мощности T'' (а следовательно, и мощности T). Обозначим $\tilde{X} = \{f_t\}_{t\in\tilde{T}}$. Рассмотрим

$$U_t = \left\{ f \in \tilde{X};\ \rho(f(t), f_t(t)) < \frac{\varepsilon_0}{5},\ \rho(f\left(t-\frac{\delta_0}{2}\right), f_t\left(t-\frac{\delta_0}{2}\right)) < \frac{\varepsilon_0}{5} \right\}$$

– окрестность f_t в $\tilde{X}$. Докажем, что $f_s \notin U_t$ при $s > t$. Допустим, что это не так, т.е. $s > t$ и $\rho(f_s(t), f_t(t)) < \frac{\varepsilon_0}{4}$, $\rho\left(f_s\left(t-\frac{\delta_0}{2}\right), f_t\left(t-\frac{\delta_0}{2}\right)\right) < \frac{\varepsilon_0}{4}$;

$$\varepsilon_0 \le \varepsilon(t) = \rho(f_t(t-0), f_t(t)) \le \rho(f_t(t-0), f_t(t-\frac{\delta_0}{2})) +$$
$$+\rho(f_t\left(t-\frac{\delta_0}{2}\right), f_s(t-\frac{\delta_0}{2})) + \rho(f_s\left(t-\frac{\delta_0}{2}\right), f_s(s-0)) +$$
$$+\rho(f_s(s-0), f_s(t)) + \rho(f_s(t), f_t(t)) < \frac{\varepsilon_0}{5}+\frac{\varepsilon_0}{5}+\frac{\varepsilon_0}{5}+\frac{\varepsilon_0}{5}+\frac{\varepsilon_0}{5} = \varepsilon_0$$

(второе и пятое слагаемые меньше $\frac{\varepsilon_0}{5}$ по предположению; $t-\frac{\delta_0}{2} \in (t-\delta(t);t)$, отсюда по выбору $\delta(t)$ следует, что первое слагаемое меньше $\frac{\varepsilon_0}{5}$; $t-\frac{\delta_0}{2} < s$ и $s-\left(t-\frac{\delta_0}{2}\right) = s-t+\frac{\delta_0}{2} < \frac{(n+1)\delta_0}{2} - \frac{n\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} = \delta_0$, следовательно, третье слагаемое меньше $\frac{\varepsilon_0}{5}$; аналогично четвёртое слагаемое меньше $\frac{\varepsilon_0}{5}$). Получаем $\varepsilon_0 < \varepsilon_0$. Противоречие. Следовательно, $f_s \notin U_t$ при $s > t$.

Следствие 5. В условиях теоремы 4 $nw(X) = |T|$.

Доказательство. Пусть α – несчётный регулярный кардинал, такой, что $\alpha \le |T|$. По теореме 4 существует $\tilde{T} \subset T$, такое, что $\left|\tilde{T}\right| \ge \alpha$ и для любой точки $t \in \tilde{T}$ существует окрестность U_t функции f_t, которая не содержит точек $s \in \tilde{T}$, таких, что $s > t$. Обозначим $\tilde{X} = \{f_t\}_{t\in\tilde{T}}$. Отождествим $f_t \in \tilde{X}$ и $t \in \tilde{T}$, наделив $\tilde{T}$ топологией так, чтобы отображение $h:\tilde{X} \to \tilde{T}$, действующее по правилу $h(f_t) = t$ было гомеоморфизмом. Пусть N – произвольная сеть в $\tilde{T}$. Для каждого $t \in \tilde{T}$ выберем N_t – элемент сети N, такой, что $t \in N_t \subset hU_t$. Так как $s > t$, $s \notin hU_t$, то $s \notin N_t$ при $s>t$, $t \in N_t$, следовательно, $maxN_t = t$ для каждого $t \in \tilde{T}$. Поэтому $N_t \ne N_s$ при $t \ne s$. Таким образом $|N| \ge \left|\tilde{T}\right| \ge \alpha$. Следовательно, $nw(X) \ge nw(\tilde{X}) \ge \alpha$. Таким образом, для любого несчётного регулярного кардинала $\alpha \le |T|$, $\alpha \le nw(X) \le |X| = |T|$, следовательно, $nw(X) = |T|$.

Теорема 6. Пусть $P \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ – множество вещественных функций вещественного переменного, такое, что каждая функция из P имеет не более чем счётное число точек разрыва. Пусть T – объединение всех множеств точек разрыва функций из P, T_1 – объединение всех множеств точек разрыва первого рода функций из P. Тогда $|T_1| \le nw(P) \le |T|$.

Доказательство. По следствию 2, $nw(P) \le |T|$. Если $|T_1| = \aleph_0$, то левое неравенство очевидно. Допустим, что $|T_1| > \aleph_0$. Построим по трансфинитной индукции множество $S = \{s_\lambda\}_{1\le\lambda<\omega_{|T_1|}}$ точек из T_1 и множество $F = \left\{f_{s_\lambda}\right\}_{1\le\lambda<\omega_{|T_1|}}$ функций из P, таких, что f_{s_λ} имеет точку разрыва первого рода в точке s_λ. Для каждого ординала $\mu < \omega_{|T_1|}$ выберем $s_\mu \in T_1$, такую, что s_μ не является точкой разрыва первого рода для всех функций f_{s_λ} при $\lambda<\mu$ (множество всех точек разрыва первого рода функций f_{s_λ} при $\lambda<\mu$ имеет мощность меньше $|T_1|$, так как $|\mu|<|T_1|$ и множество точек разрыва каждой функции f_{s_λ} счётное, следовательно, требуемая точка s_μ существует). Выберем также функцию $f_\mu \in P$, имеющую точку разрыва первого рода в точке s_μ. Полученное множество функций F имеет сетевой вес равный $|T_1|$. Тогда $|F| \le |T_1| \le nw(P) \le |T|$.

Следствие 7. Пусть $P \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ – множество монотонных функций, T – объединение всех множеств точек разрыва функций из P. Тогда $nw(P) = |T|$.

Следствие 8. Пусть $P \subset C_p(\mathbb{S})$ – подпространство пространства непрерывных функций из прямой Зоргенфрея в топологии поточечной сходимости. Рассмотрим функции из P как функции из $\mathbb{R}$ в евклидовой топологии. Пусть T – объединение всех множеств точек разрыва функций из P, T_1 – объединение всех множеств точек разрыва первого рода функций из P. Тогда $|T_1| \le nw(P) \le |T|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
2. *Асанов М.О.* О пространстве непрерывных отображений // Изв. вузов. Математика. 1980. № 4. С. 6–10
3. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 25.
4. *Куратовский К.*, *Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

Статья поступила 21.11.2014 г.

Fedorov A.A. SOME PROPERTIES OF THE SET OF MAPS IN THE POINTWISE TOPOLOGY

This paper discusses topological properties of spaces of mappings (not necessarily continuous) in the pointwise topology. In particular, it is proved that $|T_1| \le nw(P) \le |T|$, where P is a subset of real functions of a real variable having an at most countable sets of points of discontinuity, T is the union of all sets of discontinuities of functions from P, and T_1 is the union of all sets of first kind discontinuities of functions from P.

Keywords: topology of pointwise convergence, net weight, topological spaces of mappings.

FEDOROV Anton Aleksandrovich (Student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: antfed1991@yandex.ru

REFERENCES

1. Engel'king R. *Obshchaya topologiya*. Moskow, Mir Publ., 1986. (in Russian)
2. Asanov M.O. O prostranstve nepreryvnykh otobrazheniy. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 1980, no. 4, pp. 6–10. (in Russian)
3. Arkhangel'skiy A.V. *Topologicheskie prostranstva funktsiy*. Moskow, Moskow St. Univ. Publ., 1989, pp. 25. (in Russian)
4. Kuratovskiy K., Mostovskiy A. *Teoriya mnozhestv*. Moskow, Mir Publ., 1970. 416 p. (in Russian)