

УДК 532.5:532.517.4

И.В. Ершов

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА КРИТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА
В СВЕРХЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ КУЭТТА КОЛЕБАТЕЛЬНО-
ВОЗБУЖДЕННОГО ДВУХАТОМНОГО ГАЗА¹**

В рамках энергетической теории гидродинамической устойчивости исследовано сверхзвуковое плоское течение Куэтта колебательно-возбужденного двухатомного газа. Течение газа описывалось системой уравнений двухтемпературной аэродинамики, в которых учитывалась зависимость коэффициентов переноса от температуры потока. Соответствующая спектральная задача для критических значений числа Рейнольдса Re_{cr} , определяющих возможное начало ламинарно-турбулентного перехода, решалась численно с помощью метода коллокаций и QZ-алгоритма. Расчеты показали, что в сверхзвуковом диапазоне, когда $M > 1$, рассчитанные значения Re_{cr} могут превосходить соответствующие значения для дозвуковых чисел Маха $M \leq 1$ примерно на два порядка. Исследование влияния изменения степени возбуждения колебательной энергии молекул газа, времени колебательной релаксации, объемной вязкости и числа Маха на Re_{cr} показали, что наибольшее воздействие на возрастание Re_{cr} при $M > 1$ оказывает рост числа Маха (сжимаемость). При этом в диапазоне значений $M = 2 \div 5$ критические числа Рейнольдса увеличиваются более чем на порядок. Вместе с тем степень влияния возбуждения колебательных мод молекул и времени колебательной релаксации, определявших основное воздействие при $M \leq 1$, при переходе к сверхзвуковому режиму остаются на прежнем уровне.

Ключевые слова: энергетическая теория, гидродинамическая устойчивость, колебательная релаксация, уравнения двухтемпературной аэродинамики, критическое число Рейнольдса.

В [1] на основе энергетической теории исследовалась устойчивость дозвукового плоского течения Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа. Течение газа описывалось системой уравнений двухтемпературной аэродинамики, в которых учитывалась зависимость коэффициентов переноса от температуры потока. Найденные значения Re_{cr} по порядку величины совпадали с результатами, полученными в аналогичной постановке для несжимаемого течения [2]. Это еще раз подтвердило известное представление о том, что дозвуковое течение Куэтта можно считать практически несжимаемым. Вместе с тем немногочисленные исследования [3–5], выполненные в постановке классической линейной теории, показывают, что в рамках данного подхода вопрос гидродинамической устойчивости течения Куэтта сжимаемого совершенного газа до последнего времени не имеет однозначного решения. В частности, в работе [3] было констатировано абсолютное стабилизирующее влияние вязкости и отсутствие неустойчивости вплоть до чисел $Re = 5 \cdot 10^6$ при сверхзвуковых числах Маха $M = 2 \div 5$. В то же вре-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00064).

мя в более поздних публикациях [4, 5] были рассчитаны критические числа Рейнольдса в пределах $Re_{cr} \sim (2 \div 5) \cdot 10^4$ при числах $M = 3 \div 12$.

Таким образом, исходя из результатов численных расчетов [3–5], имеет место следующая ситуация. В рамках линейной теории устойчивости течение Куэтта совершенного газа устойчиво в ближней сверхзвуковой области $M < 3$ и может проявлять неустойчивость при дальнейшем возрастании числа Маха. Такое положение определило интерес к распространению начатых в [1] исследований на сверхзвуковой диапазон $M = 2 \div 5$, которым посвящена настоящая работа. Полученные данные для зависимостей критических чисел Рейнольдса от параметров течения представляют самостоятельный интерес. Кроме того, использованная в работе модель двухтемпературной газодинамики при отсутствии возбуждения колебательной моды переходит в модель совершенного газа, что позволяет провести сравнение с результатами линейной теории устойчивости [4, 5].

Постановка задачи и основные уравнения

Задача устойчивости течения Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа рассматривается в расчетной области Ω , представляющей собой прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям декартовой системы (x_1, x_2, x_3) , а центр совпадает с началом координат. Непроницаемые бесконечные пластины, вдоль которых направлено основное течение, перпендикулярны оси x_2 .

Исходной математической моделью течения газа служит система уравнений двухтемпературной аэродинамики, в которых учитывается зависимость коэффициентов переноса от температуры потока. В качестве температурной зависимости коэффициентов переноса выбран степенной закон T^n с показателем $n \leq 1$. Выбранная зависимость соответствует условиям относительно холодного несущего потока (мягким потенциалам межмолекулярного взаимодействия [6, 7]). Предполагается, что удельные теплоемкости не зависят от статической и колебательной температур потока и постоянны. В соответствии с физическими представлениями [7–9] модель двухтемпературной аэродинамики является общепринятой физико-математической моделью течений колебательно-возбужденного молекулярного газа, когда диссоциацией молекул, возбуждением верхних колебательных уровней и поправками на ангармонизм колебаний можно пренебречь.

В качестве характерных величин для обезразмеривания использованы полуширина канала L по оси x_2 , модуль скорости потока U_0 на непроницаемых стенках канала, постоянные плотность ρ_0 и температура T_0 основного течения и образованные из них время $\rho_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$. Коэффициенты переноса обезразмеривались на их значения при температуре T_0 : сдвиговая и объемная вязкости на η_0 и $\eta_{b,0}$, а коэффициенты теплопроводности, обусловленные упругими энергообменами между поступательными степенями свободы молекул и неупругими обменами энергией вращательных и колебательных степеней свободы молекул с поступательными модами молекул, соответственно на $\lambda_{tr,0}$, $\lambda_{rot,0}$, $\lambda_{vib,0}$.

В качестве основного (несущего) потока выбрано плоское течение Куэтта с линейным профилем скорости и однородным распределением плотности и температур:

$$U_S(x_2) = (x_2, 0, 0), T_S = T_{vib,S} = \rho_S = 1, p_S = 1/(\gamma M^2),$$

где p_S – статическое давление, постоянное поперек канала.

Представление мгновенных значений гидродинамических величин возмущенного течения в виде

$$u_i = U_{S,i} + u'_i, \rho = 1 + \rho', T = 1 + T', T_{\text{vib}} = 1 + T'_{\text{vib}}, p = 1/(\gamma M^2) + p'$$

позволяет получить из системы уравнений двухтемпературной аэродинамики уравнения для возмущений ρ' , u'_i , T' , T'_{vib} , p' основного течения, которые с точностью до членов первого порядка малости по возмущениям примут вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + U_{S,i} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_{S,j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_j} + \\ &+ \frac{n}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[T' \left(\frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{S,j}}{\partial x_i} \right) \right], \quad (1) \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + U_{S,j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} + (\gamma - 1) \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} &= \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2} + \frac{\gamma_{\text{vib}} (T'_{\text{vib}} - T')}{\tau_{\text{VT}} (1 - \gamma_{\text{vib}})}, \\ \frac{\gamma_{\text{vib}}}{(1 - \gamma_{\text{vib}})} \left(\frac{\partial T'_{\text{vib}}}{\partial t} + U_{S,j} \frac{\partial T'_{\text{vib}}}{\partial x_j} \right) &= \frac{20 \gamma \gamma_{\text{vib}}}{33 \text{Re Pr} (1 - \gamma_{\text{vib}})} \frac{\partial^2 T'_{\text{vib}}}{\partial x_j^2} - \frac{\gamma_{\text{vib}} (T'_{\text{vib}} - T')}{\tau_{\text{VT}} (1 - \gamma_{\text{vib}})}, \\ \gamma M^2 p' &= \rho' + T', \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

По повторяющимся индексам в уравнениях системы (1) подразумевается суммирование, а параметры, входящие в эти уравнения, определяются следующим образом: $\alpha_1 = \eta_{b,0} / \eta_0$ – отношение объемной и сдвиговой вязкостей; $\alpha_2 = \lambda_{\text{vib},0} / (\lambda_{\text{tr},0} + \lambda_{\text{rot},0})$; параметр $\gamma_{\text{vib}} = c_{\text{vib}} / (c_{\text{tr}} + c_{\text{rot}} + c_{\text{vib}})$ определяет долю внутренней энергии газа, приходящуюся на колебательные моды молекул, и в каком-то смысле характеризует степень неравновесности последних [1, 9]; безразмерные критерии $\text{Re} = U_0 L \rho_0 / \eta_0$, $M = U_0 / \sqrt{\gamma R T_0}$ и $\text{Pr} = \eta_0 (c_{\text{tr}} + c_{\text{rot}}) / (\lambda_{\text{tr},0} + \lambda_{\text{rot},0})$ есть соответственно числа Рейнольдса, Маха и Прандтля несущего потока, где $\gamma = (c_{\text{tr}} + c_{\text{rot}} + R) / (c_{\text{tr}} + c_{\text{rot}})$ – показатель адиабаты, R – газовая постоянная и c_{tr} , c_{rot} , c_{vib} – соответственно удельные теплоемкости при постоянном объеме, определяющие энергоемкость поступательных, вращательных и колебательной мод молекул газа.

В качестве краевых условий в задаче устойчивости принималось, что при $x_1 = \pm \pi / \alpha$ и $x_1 = \pm \pi / \delta$ возмущения гидродинамических переменных удовлетворяют периодическим граничным условиям, а на непроницаемых границах $x_2 = \pm 1$ принимают нулевые значения. Здесь α , δ – модули проекций волнового вектора возмущения \mathbf{k} на оси координат (x_1, x_3) .

Нижний предел $\gamma_{\text{vib}} = 0$ соответствует случаю невозбуждения колебательной моды молекул. С другой стороны, равномерное распределение энергии по степеням свободы молекул не является здесь верхним пределом для параметра γ_{vib} , поскольку

закон равномерного распределения энергии неприменим в неравновесной ситуации, описываемой системой уравнений (1), когда разрыв между статической температурой потока T и колебательной температурой T_{vib} может быть достаточно велик. В [8] показано, что при $T = 300$ К неравновесная теплоемкость $c_{\text{vib}} \approx 1,8R$. Используя равномерное распределение энергии в состоянии термодинамического квазиравновесия по поступательным и вращательным модам молекул, получаем, что параметр $\gamma_{\text{vib}} \approx 0,42$. С ростом разрыва между температурами T_{vib} и T значение γ_{vib} увеличивается, приближаясь в пределе к единице, когда энергия колебательной моды молекул существенно превышает температуру квазиравновесного термостата, определяемого поступательными и вращательными степенями свободы молекул. В расчетах максимальное значение параметра γ_{vib} было выбрано равным 0,4, с тем, чтобы остаться в рамках используемой модели, избежав возбуждения высоких колебательных уровней энергии.

В работе [1] из системы уравнений (1) было выведено уравнение энергетического баланса для полной пульсационной энергии возмущений колебательно-неравновесного молекулярного газа, которое записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\Sigma}}{dt} \equiv \Phi = & - \left\langle u'_i u'_j \frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{\gamma_{\text{vib}}}{\gamma(\gamma-1)(1-\gamma_{\text{vib}})\tau_{\text{VT}} M^2} \left\langle (T'_{\text{vib}} - T')^2 \right\rangle - \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \left\langle \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \right)^2 + nT' \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{S,j}}{\partial x_i} \right) \right\rangle - \\ & - \frac{1}{(\gamma-1)\text{Re Pr} M^2} \left\langle \left(\frac{\partial T'}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{20\gamma_{\text{vib}}}{33(1-\gamma_{\text{vib}})} \left(\frac{\partial T'_{\text{vib}}}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь положительно определенная квадратичная форма

$$E_{\Sigma}(t) = \frac{1}{2} \left\langle u_i'^2 + \frac{1}{\gamma M^2} \left[\rho'^2 + \frac{1}{\gamma-1} \left(T'^2 + \frac{\gamma_{\text{vib}} T_{\text{vib}}'^2}{1-\gamma_{\text{vib}}} \right) \right] \right\rangle$$

определяет полную пульсационную энергию возмущений, а угловые скобки обозначают усреднение по пространству расчетной области Ω в виде

$$\langle \dots \rangle = \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} dx_1 \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} dx_2 \int_{-1}^1 dx_3 (\dots).$$

Из уравнения (2) следует, что для фиксированных значений параметров M , α_1 , τ_{VT} и γ_{vib} уменьшение числа Рейнольдса, начиная с некоторого критического значения $\text{Re}_{\text{кр}}$, сделают правую часть уравнения (2) отрицательной. При этом $dE_{\Sigma}/dt < 0$ и любые возмущения будут затухать. Критическое число Рейнольдса $\text{Re}_{\text{кр}}$ соответствует нейтральным возмущениям, когда $dE_{\Sigma}/dt = 0$, и вычисляется как минимум функционала Φ в правой части энергетического уравнения (2).

Спектральная задача и ее качественные свойства

Из условия экстремума функционала Φ (2) на множестве допустимых функций следуют уравнения Эйлера – Лагранжа, определяющие обобщенную дифференциальную задачу на собственные значения со спектральным параметром Re .

С учетом профилей гидродинамических величин основного потока (2) эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}\Delta u'_1 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) \frac{\partial D}{\partial x_1} + \frac{n}{2} \frac{\partial T'}{\partial x_2} &= \frac{\text{Re}}{2} u'_2, \\ \Delta u'_2 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) \frac{\partial D}{\partial x_2} + \frac{n}{2} \frac{\partial T'}{\partial x_1} &= \frac{\text{Re}}{2} u'_1, \\ \Delta u'_3 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) \frac{\partial D}{\partial x_3} &= 0,\end{aligned}\quad (3)$$

$$\Delta T' - \varepsilon_1 \left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} \right) = -\frac{20\varepsilon_2 \gamma_v}{33} \text{Re} (T'_{\text{vib}} - T'), \quad \Delta T'_{\text{vib}} = \varepsilon_2 \text{Re} (T'_{\text{vib}} - T'),$$

где

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3^2}, \quad D = \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_3},$$

а параметры ε_1 , ε_2 и γ_v записываются следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} n (\gamma - 1) \text{M}^2 \text{Pr}, \quad \varepsilon_2 = \frac{33 \text{Pr}}{20 \gamma \tau_{\text{VT}}}, \quad \gamma_v = \frac{\gamma_{\text{vib}}}{1 - \gamma_{\text{vib}}}.$$

Граничные условия, которым удовлетворяют амплитудные функции u'_i , T' и T'_{vib} в уравнениях системы (3), аналогичны условиям, поставленным для системы уравнений (1).

После подстановки в уравнения (3) вектора возмущений

$$\mathbf{q}'(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{q}(x_2) \exp[-i(\alpha x_1 + \delta x_3)]$$

(где $\mathbf{q}' = (u'_1, u'_2, u'_3, T', T'_{\text{vib}})$, $\mathbf{q}(x_2) = (u, v, w, \theta, \theta_v)$, а i – мнимая единица) спектральная задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд пульсаций u , v , w , θ и θ_v :

$$\begin{aligned}u'' - \left[\alpha^2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) + \delta^2 \right] u + i\alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) v' - \alpha \delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) w + \frac{n}{2} \theta' &= \frac{\text{Re} v}{2}, \\ \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) v'' - (\alpha^2 + \delta^2) v + i\alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) u' + i\delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) w' - \frac{i\alpha n}{2} \theta &= \frac{\text{Re} u}{2}, \\ w'' - \left[\alpha^2 + \delta^2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \right] w - \alpha \delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) u + i\delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) v' &= 0,\end{aligned}\quad (4)$$

$$\theta'' - (\alpha^2 + \delta^2) \theta - \varepsilon_1 (v' - i\alpha u) = \frac{20\varepsilon_2 \gamma_v}{33} \text{Re}(\theta - \theta_v),$$

$$\theta_v'' - (\alpha^2 + \delta^2) \theta_v = \varepsilon_2 \text{Re}(\theta_v - \theta),$$

$$u|_{x_2=\pm 1} = v|_{x_2=\pm 1} = w|_{x_2=\pm 1} = \theta|_{x_2=\pm 1} = \theta_v|_{x_2=\pm 1} = 0, \quad (5)$$

где штрихи у неизвестных функций обозначают производные соответствующего порядка по переменной x_2 .

Спектральная задача (4), (5) имеет следующие свойства.

1. Спектр собственных значений Re задачи (4), (5) вещественен. Это свойство следует из энергетического тождества для системы (4), (5), которое получается умножением уравнений (4) на комплексно-сопряженные функции $u^*, v^*, w^*, \theta^*, \theta_v^*$, суммированием их и интегрированием по интервалу $x_2 \in [-1, 1]$. С учетом однородных граничных условий (5) имеет место следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{Re}{2} \int_{-1}^1 \left[(u^* v + u v^*) + \frac{2\gamma_v |\theta - \theta_v|^2}{\gamma(\gamma-1)M^2 \tau_{VT}} \right] dx_2 + \\ & + \int_{-1}^1 \left[|u'|^2 + \left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right) |v'|^2 + |w'|^2 + \left(\delta^2 + \left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right)\alpha^2\right) |u|^2 + \left(\alpha^2 + \delta^2\right) |v|^2 + \right. \\ & \left. + \left(\alpha^2 + \left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right)\delta^2\right) |w|^2 + \frac{|\theta'|^2 + (\alpha^2 + \delta^2)|\theta|^2}{(\gamma-1)M^2 Pr} + \frac{20\gamma_v(|\theta_v'|^2 + (\alpha^2 + \delta^2)|\theta_v|^2)}{33(\gamma-1)PrM^2} \right] dx_2 + \\ & + \alpha\delta \left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right) \int_{-1}^1 (u^* w + u w^*) dx_2 - n \int_{-1}^1 (u_r \theta_r' - u_i' \theta_i) dx_2 + 2\alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) \int_{-1}^1 (u_r v_r' + u_i' v_r) dx_2 + \\ & + 2\delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) \int_{-1}^1 (v_r w_r' + v_i' w_r) dx_2 + \alpha n \int_{-1}^1 (v_r \theta_r - v_i \theta_r) dx_2 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где индексы r и i обозначают вещественную и мнимую части соответствующих комплекснозначных функций.

Вещественность спектрального параметра Re определяется вещественностью всех слагаемых равенства (6). Вместе с тем квадратичная форма, которую определяет энергетическое тождество (8), не является положительно определенной. Это означает, что собственные значения могут быть также отрицательными, поэтому в расчетах следует искать минимальное по модулю собственное значение $\min |Re|$.

2. Спектр собственных значений $Re(\alpha, \delta)$ задачи (4), (5) симметричен относительно осей $\alpha = 0, \delta = 0$ на плоскости волновых чисел (α, δ) . Действительно, из уравнений системы (4) следует, что каждому собственному значению $Re(\alpha, \delta)$ с собственными функциями $u, v, w, \theta, \theta_v$ соответствует равное ему собственное значение $Re(-\alpha, -\delta)$ с собственными функциями $u^*, v^*, w^*, \theta^*, \theta_v^*$. Также то же собственное значение $Re(\alpha, \delta)$ соответствует паре волновых чисел $(\alpha, -\delta)$ с набором собственных функций $u, v, -w, \theta, \theta_v$ и паре волновых чисел $(-\alpha, \delta)$ с набором собственных функций $u^*, v^*, -w^*, \theta^*, \theta_v^*$.

В [10] показано, что если в качестве молекул несущего газа рассматриваются «максвелловские» молекулы [6, 7], то для задачи (4), (5) в случае длинноволновых продольных ($\alpha \ll 1, \delta = 0$) и поперечных ($\alpha = 0, \delta \ll 1$) возмущений имеют место асимптотические оценки критических чисел Рейнольдса в виде

$$\begin{aligned} Re_{cr}^{(\alpha)} &= \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}} \left[1 - \frac{(\gamma-1) M^2 Pr}{2\pi^2} \left(1 - \frac{20\gamma_{vib} Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10\gamma \tau_{VT} + 33 Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right) \right] - \pi \alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right), \\ Re_{cr}^{(\delta)} &= \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}} \left[1 - \frac{(\gamma-1) M^2 Pr}{2\pi^2} \left(1 - \frac{20\gamma_{vib} Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10\gamma \tau_{VT} + 33 Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Численное решение спектральной задачи

Для произвольных значений волновых чисел α , δ (длин волн возмущений) спектральная задача (4), (5) решалась численно с помощью метода коллокаций [11, 12], в основе которого лежит алгебраическое интерполирование искомого решения по некоторой чебышевской системе функций. В данном случае использовался инструментарий математического пакета Matlab, где в случае непериодических функций применяется полиномиальная интерполяция полиномами Чебышева $T_k(x_2) = \cos(k \arccos x_2)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Такой выбор обеспечивает экспоненциально быструю сходимость аппроксимирующего ряда для произвольных граничных условий, по крайней мере, в классе бесконечно дифференцируемых функций. На практике этим достигается высокая точность вычислений даже на грубых сетках. В качестве узлов коллокации (интерполяции) выбирались точки Гаусса – Лобатто $x_{2,k} = \cos(\pi k / N)$, $k = 0, 1, \dots, N$, в которых полином Чебышева N -й степени имеет экстремумы на отрезке $x_2 \in [-1, 1]$.

Дифференциальные операторы первого порядка, входящие в спектральную задачу, аппроксимируются на данном шаблоне матрицей коллокационных производных D_N^1 [11, 12] размером $(N+1) \times (N+1)$, элементы которой определяются по формулам

$$D_{N,ij}^1 = \begin{cases} \frac{(-1)^{\ell+j} s_\ell}{s_j(x_{2,\ell} - x_{2,j})}, & \ell \neq j, \\ -\frac{x_{2,j}}{2(1-x_{2,j}^2)}, & 1 \leq \ell = j \leq N-1, \\ \frac{2N^2+1}{6}, & \ell = j = 0, \\ -\frac{2N^2+1}{6}, & \ell = j = N, \end{cases} \quad s_j = \begin{cases} 2, & j = 0, N, \\ 1, & j = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

При этом элементы ℓ -й строки матрицы D_N^1 являются коэффициентами разностной аппроксимации первой производной в ℓ -м узле коллокации на шаблоне $\{x_{2,k}\}$, $k = 0, 1, \dots, N$. Дифференциальные операторы второго порядка аппроксимируются суперпозицией $D_N^2 = D_N^1 D_N^1$.

В терминах введенных аппроксимаций задача (4), (5) сводится к обобщенной задаче на собственные значения (линейному матричному пучку) относительно спектрального параметра $\lambda = \text{Re}/2$:

$$\sum_{j=0}^{5N+4} (G_{kj} - \lambda F_{kj}) r_j = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 5N+4. \quad (8)$$

Вектор неизвестных r размером $5(N+1)$ в (8) состоит из значений собственных функций в узлах коллокации:

$$r(x_2) = (u_0, u_1, \dots, u_N, v_0, v_1, \dots, v_N, w_0, w_1, \dots, w_N, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N, \theta_{v,0}, \theta_{v,1}, \dots, \theta_{v,N}),$$

а матрицы G , F размером $5(N+1) \times 5(N+1)$ вычисляются с использованием специальной процедуры Matlab по формулам

$$G = A \otimes D_N^2 + B \otimes D_N^1 + C \otimes I_N, \quad F = K \otimes I_N,$$

где знак « \otimes » обозначает прямое (тензорное) произведение матриц [13]; I_N – единичная матрица размером $(N+1) \times (N+1)$; A, B, C – матрицы размером 5×5 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 + \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{20\gamma_{\text{vib}}}{33(1-\gamma_{\text{vib}})} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) & 0 & \frac{n}{2} & 0 \\ i\alpha\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) & 0 & i\delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & i\delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n}{2}(\gamma-1)M^2 \text{Pr} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\left(\delta^2 + \left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right)\alpha^2\right) & 0 & -\alpha\delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha^2 + \delta^2) & 0 & \frac{i\alpha n}{2} & 0 \\ -\alpha\delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right) & 0 & -\left(\alpha^2 + \left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right)\delta^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i\alpha n}{2}(\gamma-1)M^2 \text{Pr} & 0 & -(\alpha^2 + \delta^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{20\gamma_{\text{vib}}(\alpha^2 + \delta^2)}{33(1-\gamma_{\text{vib}})} \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma_{\text{vib}} \text{Pr}}{\gamma(1-\gamma_{\text{vib}})\tau_{\text{VT}}} & -\frac{\gamma_{\text{vib}} \text{Pr}}{\gamma(1-\gamma_{\text{vib}})\tau_{\text{VT}}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_{\text{vib}} \text{Pr}}{\gamma(1-\gamma_{\text{vib}})\tau_{\text{VT}}} & \frac{\gamma_{\text{vib}} \text{Pr}}{\gamma(1-\gamma_{\text{vib}})\tau_{\text{VT}}} \end{pmatrix}.$$

Однородные граничные условия (5) для уравнения (8) учитываются неявно через оператор D_N^1 и на дискретном уровне реализуются заменой матриц D_N^k ($k = 1, 2$) на окаймленные матрицы размером $(N-1) \times (N-1)$ [11, 12]. Последние получаются при выполнении условий

$$D_{0,j}^\ell = D_{N,j}^\ell = 0, \quad D_{i,0}^\ell = D_{i,N}^\ell = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad \ell = 1, 2.$$

Для нахождения всех собственных значений и функций обобщенной спектральной задачи (10) использовалась процедура Matlab, реализующая QZ-алгоритм [14], который позволяет одновременным ортогональным преобразованием привести пару матриц G, F к обобщенной верхней треугольной форме.

В результате применения данной процедуры для фиксированных значений числа Маха M , объемной вязкости α_1 , степени неравновесности колебательной энергии γ_{vib} , времени колебательной релаксации τ_{VT} и каждой пары волновых чисел (α, δ) получался набор $N+1$ собственных значений, среди которых находилось минимальное по модулю число Рейнольдса $\text{Re}(\alpha, \delta) = 2 \mid \lambda_{\min}(\alpha, \delta) \mid$. Значение критического числа Рейнольдса Re_{cr} для данных $M, \alpha_1, \tau_{\text{VT}}$ и γ_{vib} принималось равным минимальному значению Re во всем диапазоне волновых чисел $\text{Re}(\alpha, \delta)$: $\text{Re}_{\text{cr}} = \min_{(\alpha, \delta)} \text{Re}(\alpha, \delta)$. Затем вычислялись соответствующие Re_{cr} собственные функции $u, v, w, \theta, \theta_v$.

Вычисления спектров собственных значений $\lambda(\alpha, \delta, M, \alpha_1, \tau_{VT}, \gamma_{vib})$ выполнялись для случая, когда в качестве молекул несущего газа рассматриваются «максвелловские» молекулы, тогда $n = 1$ [6, 7]. Все расчеты велись в диапазоне волновых чисел $\alpha = -10 \div 10$, $\delta = -10 \div 10$ при следующих значениях параметров: $\gamma_{vib} = 0 \div 0,4$; $\tau_{VT} = 1 \div 4$; $\alpha_1 = 0 \div 2$; $M = 2 \div 5$; $Pr = 3/4$; $\gamma = 7/5$. Шаги изменения волновых чисел были выбраны равными $h_\alpha = h_\delta = 0,001$. Число узлов коллокации в интервале $x_2 \in [-1, 1]$ принималось равным $N+1 = 50$. Для проверки точности расчетов проводилось варьирование числа узлов коллокации в диапазоне $N+1 = 32 \div 100$.

Результаты расчетов и их обсуждение

Расчеты показали, что при всех рассматриваемых значениях степени неравномерности колебательной энергии γ_{vib} , времени колебательной релаксации τ_{VT} , объемной вязкости α_1 и числа Маха M минимальные по модулю собственные значения $Re(\alpha, \delta) = 2 | \lambda_{min}(\alpha, \delta) |$ достигаются на оси $\alpha \neq 0$ (при $\delta = 0$) в плоскости волновых чисел (α, δ) . Изолинии $Re(\alpha, \delta)$ приведены на рис. 1.

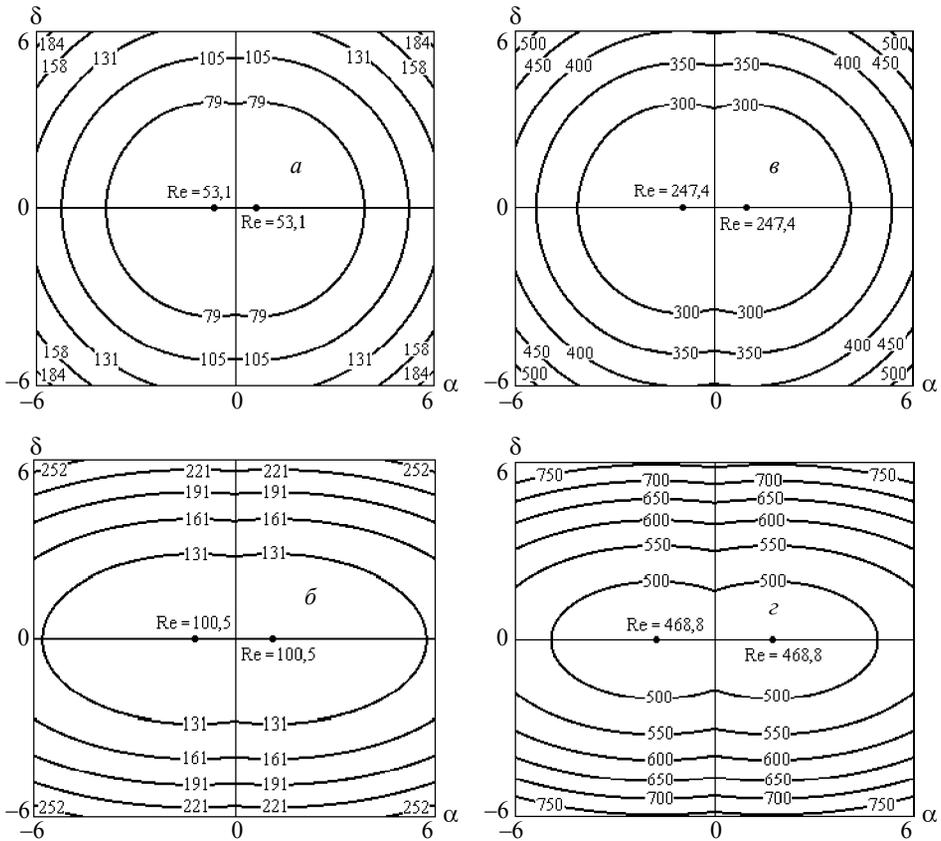


Рис. 1. Изолинии поверхностей $Re(\alpha, \delta)$ для $M = 3$ (а, б) и $M = 5$ (в, г) при $\alpha_1 = 0$, $\tau_{VT} = 2$ (а, б - $\gamma_{vib} = 0$, в, г - $\gamma_{vib} = 0,4$; точки на линии $\delta = 0$ фиксируют критические значения числа Рейнольдса для данного режима)

Как и в случае дозвуковых числе Маха [1], наиболее «опасными» являются возмущения продольной моды. С учетом периодичности полученного решения по продольной координате x_1 эти возмущения представляют собой пары двумерных вихрей, вращающихся в противоположных направлениях, с осями, перпендикулярными несущему потоку. Распределение завихренности в этих вихрях вычисляется по формуле

$$\omega(x_1, x_2) = -\frac{1}{\omega_0} \left[\left(\alpha v_i + \frac{d u_r}{dx_2} \right) \cos(\alpha x_1) + \left(\alpha v_r - \frac{d u_i}{dx_2} \right) \sin(\alpha x_1) \right].$$

Здесь $u_r(x_2)$, $u_i(x_2)$, $v_r(x_2)$, $v_i(x_2)$ – вещественные и мнимые части собственных функций u , v , а нормировочный множитель ω_0 представляет собой безразмерный поток завихренности через расчетную область (циркуляцию вектора скорости по границе), вычисляемый по формуле

$$\omega_0 = \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \int_{-1}^1 \omega(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

На рис. 2 представлены изолинии завихренности $\omega(x_1, x_2)$, при различных критических числах Рейнольдса $Re_{cr}(\alpha, M, \alpha_1, \tau_{vT}, \gamma_{vib})$ и значениях амплитуд возмущений скорости, составляющих 10 % значения модуля скорости несущего потока на непроницаемых границах.

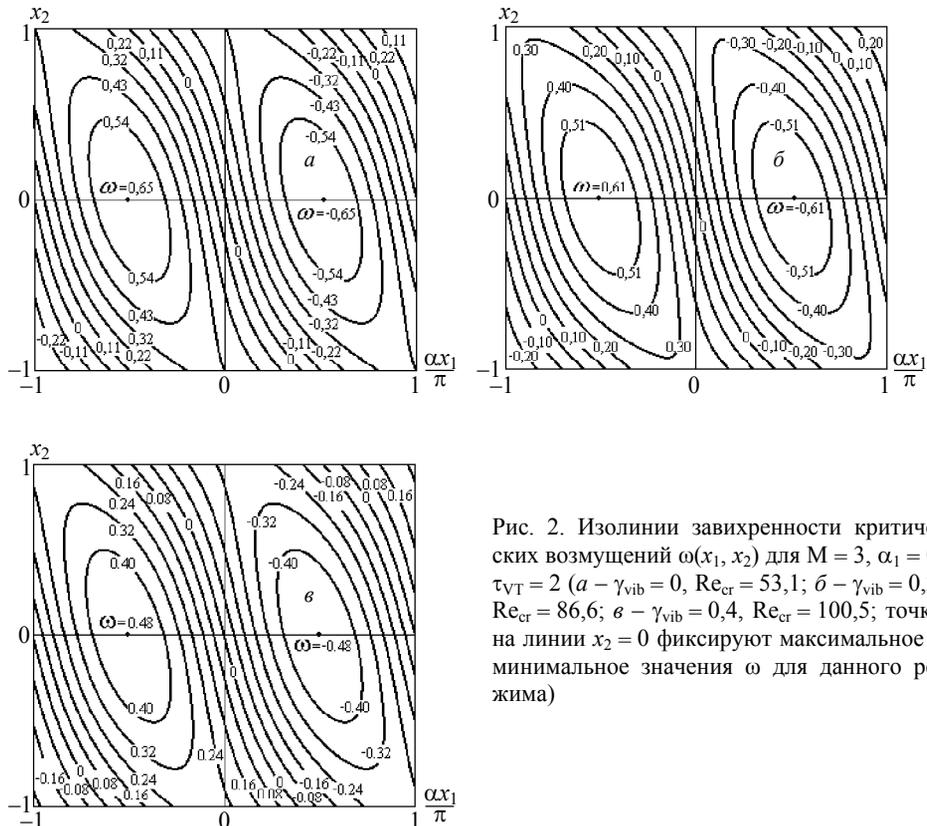


Рис. 2. Изолинии завихренности критических возмущений $\omega(x_1, x_2)$ для $M = 3, \alpha_1 = 0, \tau_{vT} = 2$ ($a - \gamma_{vib} = 0, Re_{cr} = 53,1; б - \gamma_{vib} = 0,2, Re_{cr} = 86,6; в - \gamma_{vib} = 0,4, Re_{cr} = 100,5$; точки на линии $x_2 = 0$ фиксируют максимальное и минимальное значения ω для данного режима)

Зависимость числа Рейнольдса для продольных мод возмущений от волнового числа α представлена на рис. 3, где штрихпунктирные линии соединяют значения абсолютных минимумов на параметризованных по γ_{vib} и τ_{VT} кривых $\text{Re}(\alpha)$, что позволяет проследить эволюцию Re_{cr} . На рис. 4 приведена зависимость Re_{cr} от степени неравновесности γ_{vib} . На рис. 1, 3, 4 видно, что с увеличением значений параметров M , α_1 , τ_{VT} , γ_{vib} критические числа Рейнольдса Re_{cr} и соответствующие им значения волнового числа α возрастают. Сопоставление полученных результатов с формулой для $\text{Re}_{\text{cr}}^{(\alpha)}$ из (7) показывает, что длинноволновая асимптотика $\text{Re}_{\text{cr}}^{(\alpha)}$ на качественном уровне правильно воспроизводит зависимость Re_{cr} от параметров течения в области волновых чисел $\alpha \sim O(1)$.

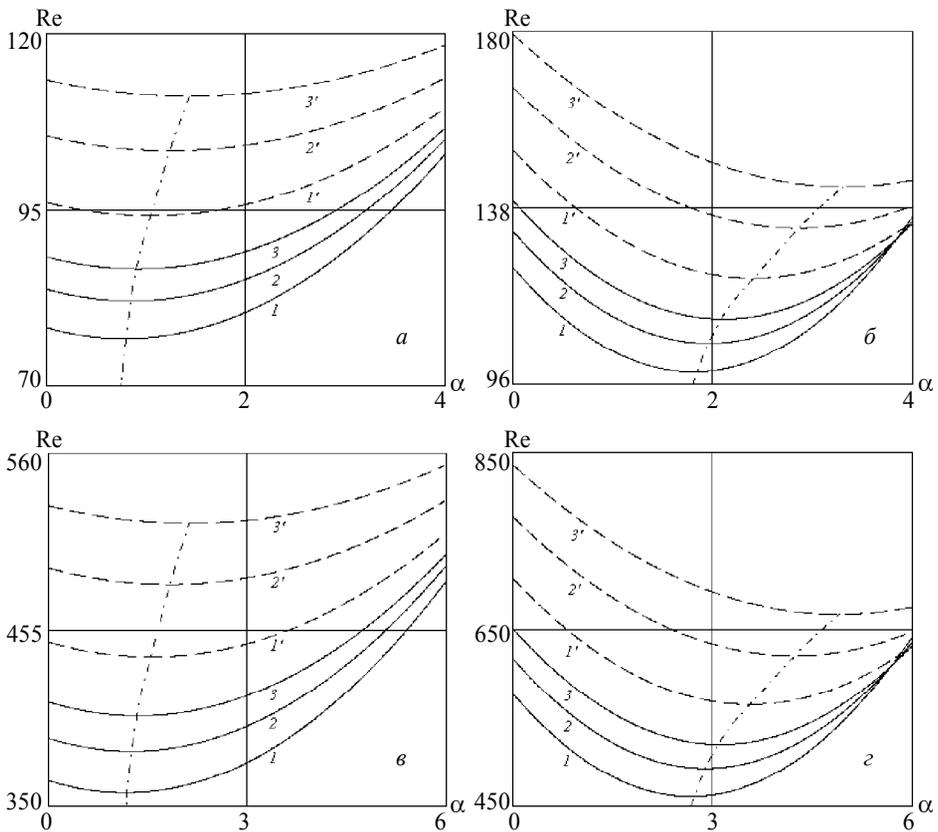


Рис. 3. Зависимость $\text{Re}(\alpha)$ для продольных мод возмущений при числах Маха $M = 3$ (*а, б*) и $M = 5$ (*в, г*) (*а, в* — $\alpha_1 = 0$; *б, г* — $\alpha_1 = 2$; *1, 1'* — $\gamma_{\text{vib}} = 0,2$; *2, 2'* — $\gamma_{\text{vib}} = 0,3$; *3, 3'* — $\gamma_{\text{vib}} = 0,4$; сплошные линии — $\tau_{\text{VT}} = 1$, штриховые — $\tau_{\text{VT}} = 3$, штрихпунктирные — зависимость критического числа Рейнольдса Re_{cr} от волнового числа α)

Критические значения числа Рейнольдса $\text{Re}_{\text{cr}}(\alpha_1, \tau_{\text{VT}}, \gamma_{\text{vib}}, M)$ и соответствующие им значения волновых чисел α приведены в сводной таблице. Из данных таблицы следует, что максимальный диапазон изменения Re_{cr} при рассмотренных вариациях параметров задачи приближается к полутора порядкам, что существенно больше, чем было получено в [1] для дозвукового течения.

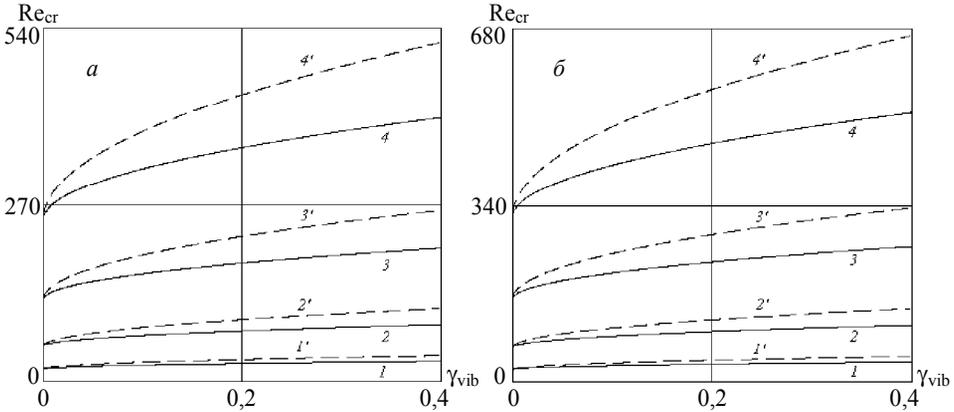


Рис. 4. Зависимость критического числа Рейнольдса Re_{cr} от степени неравновесности колебательной моды γ_{vib} (а – $\alpha_1 = 0$; б – $\alpha_1 = 2$; 1, 1' – $M = 2$; 2, 2' – $M = 3$; 3, 3' – $M = 4$; 4, 4' – $M = 5$; сплошные линии – $\tau_{VT} = 1$, штриховые – $\tau_{VT} = 3$)

Значения критических чисел Рейнольдса $Re_{cr}(M, \alpha_1, \tau_{VT}, \gamma_{vib})$ и соответствующие им значения волновых чисел α

M	$\tau_{VT} = 1$			$\tau_{VT} = 4$		
	$\gamma_{vib} = 0,1$	$\gamma_{vib} = 0,2$	$\gamma_{vib} = 0,4$	$\gamma_{vib} = 0,1$	$\gamma_{vib} = 0,2$	$\gamma_{vib} = 0,4$
$\alpha_1 = 0$						
2	$Re_{cr} = 24,11$	26,51	29,91	29,91	34,71	41,49
	$\alpha = 0,672$	0,733	0,855	0,855	1,099	1,587
3	$Re_{cr} = 69,85$	76,81	86,64	86,64	100,5	120,2
	$\alpha = 0,718$	0,784	0,914	0,914	1,175	1,689
4	$Re_{cr} = 164,4$	180,8	203,9	203,9	236,6	282,9
	$\alpha = 0,868$	0,947	1,105	1,105	1,421	2,052
5	$Re_{cr} = 325,7$	358,1	403,9	403,9	468,8	560,4
	$\alpha = 1,063$	1,160	1,353	1,353	1,739	2,513
$\alpha_1 = 2$						
2	$Re_{cr} = 31,04$	34,13	38,49	38,49	44,67	53,41
	$\alpha = 1,548$	1,689	1,970	1,970	2,533	3,658
3	$Re_{cr} = 89,91$	98,86	111,5	111,5	129,4	154,7
	$\alpha = 1,656$	1,806	2,107	2,107	2,709	3,913
4	$Re_{cr} = 211,6$	232,7	262,5	262,5	304,6	364,1
	$\alpha = 2,001$	2,183	2,547	2,547	3,275	4,731
5	$Re_{cr} = 419,2$	460,9	519,9	519,9	603,4	721,3
	$\alpha = 2,450$	2,673	3,118	3,118	4,009	5,791

Действительно, при $M > 1$ критические значения числа Рейнольдса лежат в пределах $Re_{cr} \approx (0,24 \div 7,21) \cdot 10^2$, а при $M \leq 1$ и тех же значениях параметров $\alpha_1, \tau_{VT}, \gamma_{vib}$, что и в данной работе, соответствующие пределы составляют $Re_{cr} \approx (0,75 \div 1,85) \cdot 10^1$ [1]. Рассматривая степень влияния каждого параметра на Re_{cr} при фиксированных значениях остальных параметров, можно заметить, что наибольшее воздействие на возрастание Re_{cr} здесь оказывает рост числа Маха (сжимаемость). При этом в диапазоне значений $M = 2 \div 5$ критические числа Рейнольдса увеличиваются более чем на порядок. В то же время при изменении числа Маха

в дозвуковом диапазоне $M = 0,2 \div 0,8$ возрастание Re_{cr} лежит в пределах 10 % [1]. Вместе с тем степень влияния коэффициента возбуждения γ_{vib} и времени релаксации τ_{VT} , определявших основное воздействие при $M \leq 1$, при переходе к сверхзвуковому режиму остаются на прежнем уровне. Тем не менее сделанный в [1] вывод о возможности управления потоком с помощью лазерного возбуждения колебательной моды остается в силе, так как в расчетных пределах изменения γ_{vib} число Re_{cr} возрастает здесь приблизительно на 30 %.

В заключение следует отметить, что полученные значения Re_{cr} почти на два порядка меньше значений критических чисел Рейнольдса, рассчитанных в рамках линейной теории устойчивости для совершенного газа [4, 5]. Кроме того, имеется качественное различие в зависимостях $Re_{cr}(M)$. Если в данном случае Re_{cr} с ростом числа Маха в диапазоне $M = 2 \div 5$ монотонно возрастает, то в рамках линейной теории в этом диапазоне Re_{cr} , наоборот, убывает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов И.В. Устойчивость течения Куэтта колебательно-неравновесного молекулярного газа. Энергетический подход // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3(25). С. 76–88.
2. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 367 с.
3. Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y. On the linear stability of compressible plane Couette flow // J. of Fluid Mech. 1994. Vol. 258. P 131–165.
4. Hu S., Zhong X. Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow // Phys. of Fluids. 1998. Vol. 10. No. 3. P. 709–729.
5. Malik M., Dey J., Alam M. Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow // Physical Rev. E. 2008. V. 77, Issue 3. P. 036322(1)–036322(15).
6. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
7. Жданов В. М., Алиевский М.Е. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 336 с.
8. Нагнибеда Е. А., Кустова Е.В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2003. 272 с.
9. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Устойчивость течений релаксирующих молекулярных газов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012. 230 с.
10. Ершов И.В. Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в течении Куэтта колебательно- неравновесного молекулярного газа // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2(20). С. 99–112 .
11. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. Spectral methods in fluid dynamics: Springer series in Computational Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 564 p.
12. Trefethen L.N. Spectral methods in Matlab. Philadelphia: Soc. for Industr. and Appl. Math., 2000. 160 p.
13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1970. 720 с.
14. Moler C.B., Stewart G.W. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal. 1973. Vol. 10. No. 2. P. 241–256.

Статья поступила 11.12.2013 г.

Ershov I.V. ENERGY ESTIMATE OF CRITICAL REYNOLDS NUMBERS IN THE SUPERSONIC COUETTE FLOW OF A VIBRATIONALLY EXCITED DIATOMIC GAS

The supersonic plane Couette flow of a vibrationally excited diatomic gas is investigated within the energy theory of hydrodynamic stability. The flow was described by a system of equations of two-temperature aerodynamics, which takes into account the dependence of the transport coefficients on the flow temperature. The corresponding spectral problem for the critical

Reynolds number Re_{cr} determining the possible start of the laminar-turbulent transition was solved numerically using the method of collocations and QZ-algorithm. The calculations showed that in the supersonic range, when $M > 1$, the calculated values Re_{cr} may exceed the corresponding values for subsonic Mach numbers $M > 1$ by about two orders of magnitude. Investigation of how Re_{cr} is affected by changes in the degree of vibrational energy excitation of gas molecules, vibrational relaxation time, bulk viscosity, and Mach number showed that the greatest impact on the increase in Re_{cr} at $M > 1$ is exerted by the growth of the Mach number (compressibility). In the range of $M = 2 \div 5$, critical Reynolds numbers increase more than by an order of magnitude. However, the excitation of vibrational modes of gas molecules and the vibrational relaxation time which determine main effects at $M \leq 1$ have an effect at the same level with the transition to the supersonic regime.

Keywords: energy theory, hydrodynamic stability, equations of two-temperature aerodynamics, vibrational relaxation, critical Reynolds number.

Ershov Igor Valer'evich (Candidate of of Physics and Mathematics, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russian Federation)

E-mail: i_ershov@ngs.ru

REFERENCES

1. Ershov I.V. Ustoychivost' techeniya Kuetta kolebatel'no-neravnovesnogo molekulyarnogo gaza. Energeticheskiy podkhod. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 3(25), pp. 76–88. (in Russian)
2. Gol'dshtik M.A., Shtern V.N. *Gidrodinamicheskaya ustoychivost' i turbulentsnost'*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1977. 367 p. (in Russian)
3. Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y. On the linear stability of compressible plane Couette flow. *J. of Fluid Mech.*, 1994, vol. 258. P 131–165.
4. Hu S., Zhong X. Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow. *Phys. of Fluids*, 1998, vol. 10, no. 3, pp. 709–729.
5. Malik M., Dey J., Alam M. Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow. *Physical Rev. E.*, 2008, vol. 77, issue 3, pp. 036322(1)–036322(15).
6. Chepmen S., Kauling T. *Matematicheskaya teoriya neodnorodnykh gazov*. Moscow, IL Publ., 1960. 510 p. (in Russian)
7. Zhdanov V.M., Alievskiy M.E. *Protsessy perenosa i relaksatsii v molekulyarnykh gazakh*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 336 p. (in Russian)
8. Nagnibeda E. A., Kustova E.V. *Kineticheskaya teoriya protsessov perenosa i relaksatsii v potokakh neravnovesnykh reagiruyushchikh gazov*. St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Publ., 2003. 272 p. (in Russian)
9. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. *Ustoychivost' techeniy relaksiruyushchikh molekulyarnykh gazov*. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN, 2012. 230 p. (in Russian)
10. Ershov I.V. Energeticheskaya otsenka kriticheskikh chisel Reynol'dsa v techenii Kuetta kolebatel'no-neravnovesnogo molekulyarnogo gaza. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2012, no. 2(20), pp. 99–112. (in Russian)
11. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. *Spectral methods in fluid dynamics: Springer series in Computational Physics*. Berlin, Springer-Verlag, 1988. 564 p.
12. Trefethen L.N. *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia, Soc. for Industr. and Appl. Math., 2000. 160 p.
13. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike*. Moscow, Nauka Publ., 1970. 720 p. (in Russian)
14. Moler C.B., Stewart G.W. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1973, vol. 10, no. 2, pp. 241–256.