

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2014

№ 2 (27)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.



EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Science, Prof., Head of the Operation Research Department, Dean of the Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics.
Tel: +72822529599

Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Science, Prof. of the Applied Mathematics Department.
Tel: +72822529599

Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Cand. of Science, Associate Prof. of the Operation Research Department. E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Science, Prof. of the Higher Mathematics and Mathematical Modeling Department

Gennady Koshkin – Doctor of Science, Prof. of the Theoretical Cybernetics Department

Yury Kostyuk – Doctor of Science, Prof. of the Theoretical Informatics Department

Anjela Matrosova – Doctor of Science, Prof., Head of the Programming Department

Anatoly Nazarov – Doctor of Science, Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department

Sergey Sushchenko – Doctor of Science, Prof., Head of the Applied of Information Department, Dean of the Faculty of Informatics

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli
PhD, Prof.
University VII
Paris, France

Vladimir Dombrovskii
Doctor of Science, Prof.
Tomsk State University
Russia

Alexander Dudin
Doctor of Science, Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Enco Orzinger
PhD, Prof.
University of Rome
Italy

Paolo Prinetto
Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Gilbert Saporta
PhD, Prof.
Pierre and Marie Curie
University, Paris, France

Raimund Ubar
Doctor of Science, Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia

Nina Yevtushenko
Doctor of Science, Prof.
Tomsk State University
Russia

Yervant Zorian
PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. каф. исследования операций, декан факультета прикладной математики и кибернетики ТГУ.
Тел. +72822529599

Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. каф. прикладной математики ТГУ.
Тел. +72822529599

Нежелская Людмила Алексеевна – ответ. секретарь, доц., канд. техн. наук, доц. каф. исследования операций ТГУ.
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики и математического моделирования ТГУ

Коскин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической кибернетики ТГУ

Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф., каф. теоретической информатики ТГУ

Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, зав. каф. программирования ТГУ

Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. каф. теории вероятностей и математической статистики ТГУ

Сущенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. каф. прикладной информатики, декан факультета информатики ТГУ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Ковали
д-р философии, проф.
Университет VII
Париж, Франция

Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Александр Дудин
д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Енцо Орзингер
д-р философии, проф.
Римский университет
Италия

Паоло Принетто
проф.
Политехнический институт
Турин, Италия

Жильберт Сапорта
д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии
Кюри, Париж, Франция

Раймонд Убар
д-р техн. наук, проф.
Технологический университет,
Таллинн, Эстония

Нина Евтушенко
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Ервант Зориан
д-р философии,
гл. науч. сотр. фирмы
«Синописис», США

JORNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031).

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- *control of dynamical systems,*
- *mathematical modeling,*
- *data processing,*
- *informatics and programming,*
- *discrete function and automation,*
- *designing and diagnostics of computer systems.*

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>
ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке, его подписной индекс 44031 в объединённом каталоге «Пресса России». Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- *управление динамическими системами,*
- *математическое моделирование,*
- *обработка информации,*
- *информатика и программирование,*
- *дискретные функции и автоматы,*
- *проектирование и диагностика вычислительных систем.*

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» включен в Перечень изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций, а также входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ). Правила оформления статей приведены на сайте:
<http://journals.tsu.ru/informatics/>

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Сперанский Д.В. Нечеткое двоичное логическое моделирование цифровых устройств	4
--	---

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Дёмин В.А., Чимитова Е.В., Щеколдин В.Ю. Исследование метода выбора оптимального параметра сглаживания при непараметрическом оценивании регрессионных моделей надежности	10
Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мёртвом времени	19
Иванов Д.В. Оценивание параметров линейных ARX-систем дробного порядка с помехой наблюдения во входном сигнале	30
Назаров А.А., Яковлев Н.И. Исследование RQ-системы M M 1 с фазовым распределением повторного времени	39
Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Расчёт гиперэкспоненциальной системы обслуживания M/H ₂ /n-H ₂ с заявками, нетерпеливыми в очереди	47
Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Вычисление вероятности разорения в дискретной модели риска с зависимыми финансовым и страховым рисками	54

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Бабанов А.М. Синонимия элементов ERM-схем и ее использование в методике ERM-моделирования для графической нотации	63
--	----

ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ И АВТОМАТЫ

Кондратьева О.В., Евтушенко Н.В., Кавалли А.Р. Параллельная композиция конечных автоматов с таймаутами	73
---	----

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Матросова А.Ю., Останин С.А., Бухаров А.В., Кириенко И.Е. Поиск всех тестовых наборов для неисправности логической схемы и представление их ROBDD-графом	82
---	----

ХРОНИКИ

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

Матросова А.Ю. Памяти Аркадия Дмитриевича Закревского	90
Сведения об авторах	92

CONTENTS

MATHEMATICAL MODELING

Speranskiy D.V. Fuzzy binary logic modeling of a digital devices	4
---	---

DATA PROCESSING

Demin V.A., Chimitova E.V., Schekoldin V.Yu. The research of optimal choice method of bandwidth parameter for nonparametric estimation of reliability regression models	10
Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhelskaya L.A. The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time	19
Ivanov D.V. Estimation of parameters of linear fractional order ARX systems with noise in the input signal	30
Nazarov A.A., Yakovlev N.I. Investigation of retrieval queue system M M 1 with phase-type retrieval times	39
Ryzhikov Yu.I., Ulanov A.V. The method of calculating M/H ₂ /n-H ₂ queuing system with impatient customers	47
Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A. Calculation of ruin probability in discrete risk model with dependent insurance and financial risks	54

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Babanov A.M. Synonymy of ERM-scheme's elements and its use in ERM-modeling technique for the graphic notation	63
--	----

DISCRETE FUNCTION AND AUTOMATION

Kondratyeva O.V., Yevtushenko N.V., Cavalli Ana R. Parallel composition of nondeterministic Finite State Machines with Timeouts	73
--	----

DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS

Matrosova A.Y., Ostanin S.A., Bucharov A.V., Kirienko I.E. Generating all test patterns for a given stuck-at fault of a logical circuit and its ROBDD implementation	82
---	----

CHRONICLE

MEMOIRS, MEMORABLE DATE, PERSONALITIES

Matrosova A.Y. Memory Arkady D. Zakrevsky	90
Brief information about the authors	92

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.11

Д.В. Сперанский

НЕЧЕТКОЕ ДВОИЧНОЕ ЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ

Предложен метод нечеткого логического моделирования цифровых устройств, основанный на сведении проблемы к моделированию систем в пространстве вещественных чисел.

Ключевые слова: цифровые устройства; нечеткое моделирование; двоичное моделирование.

Традиционное логическое моделирование цифровых устройств (ЦУ) основано на применении классического математического аппарата, требующего выполнения операций с точными значениями данных. Для реальных ЦУ исходные данные для моделирования часто являются неточными (нечеткими) в силу объективных причин (погрешность измерений, нечеткость в описании функционирования ЦУ и т.п.). Понятно, что нечеткие данные приводят к огрублению результатов моделирования. Для отражения нечеткости данных необходимо иметь подходящие средства. Важным этапом на пути создания таких средств явилось введение Л. Заде [1] концепции нечетких множеств.

На этой основе начали бурно развиваться нечеткая логика, теория нечеткого управления, нечеткая алгебра и т.п. Позднее, с 80-х гг. прошлого века, начались активные исследования в области нечеткой арифметики, с которой непосредственно связана тематика предлагаемой статьи. Не останавливаясь на обзоре работ в упомянутом направлении, назовем лишь некоторые известные обобщающие публикации по этой тематике. Так, к их числу относится обзор Д. Дюбуа и Г. Прайда [2], монографии А. Кауфмана и М.М. Гупта [3], А. Кандела [4], М. Ханса [5] и Г.Э. Яхьяевой [6].

Ниже рассматриваются вопросы двоичного логического моделирования ЦУ в условиях нечетких данных. Результаты такого моделирования востребованы в различных предметных областях: при решении задач проектирования и идентификации ЦУ, задач управления, задач контроля и технической диагностики ЦУ и т.д.

1. Постановка задачи и идея метода решения

Далее в качестве ЦУ, в том числе с памятью, рассматриваются устройства, в которых зависимость между входными и выходными сигналами, а также между состояниями системы в настоящий и следующий моменты времени представляются в виде некоторого логического выражения. Это выражение может содержать различные логические операции, включая отрицание (НЕ), конъюнкцию (И), дизъюнкцию (ИЛИ), импликацию (ЕСЛИ...ТО) и т.д. Известно [7], что любую дискретную систему с памятью всегда можно преобразовать в эквивалентную ей итеративную комбинационную схему (комбинационный эквивалент).

Реальные ЦУ состоят из микросхем, реализующих логические функции с использованием операций НЕ, И, ИЛИ, которые образуют базис, т.е. полную систему функций [8]. Последнее означает, что любая логическая функция может быть записана в виде формулы, содержащей только эти три упомянутые операции. Именно поэтому далее для простоты изложения (хотя это не принципиально) в качестве объекта исследования будет рассматриваться комбинационное ЦУ с несколькими входами и одним выходом.

В классической модели ЦУ на каждом из упомянутых полюсов могут появляться только точные двоичные сигналы «0» или «1». Исследуемая здесь задача нечеткого двоичного логического моделирования предполагает, что поступающие на вход ЦУ сигналы являются нечеткими. Понятно, что получаемые при этом выходные сигналы ЦУ также являются нечеткими. Рассматриваемая ниже задача состоит в получении на этой основе в качестве результата моделирования четкого двоичного значения (0 или 1) выхода ЦУ.

Известно, что логические операции над логическими значениями «истина» и «ложь» могут быть выражены через арифметические операции, если упомянутые логические значения интерпретировать как целые числа 1 и 0. В частности, для операций упомянутого выше базиса имеют место следующие равенства:

$$\bar{a} = 1 - a, \quad a \vee b = a + b - ab, \quad a \wedge b = a \cdot b. \quad (1)$$

Идея предлагаемого ниже метода моделирования ЦУ базируется на сведении его к вычислению по правилам нечеткой арифметики вещественных чисел (для заданных нечетких исходных данных) логического выражения, представляющего собой модель рассматриваемого ЦУ.

Известно, что в любом ЦУ нулевые и единичные сигналы представлены в виде значений напряжений (в вольтах) в некоторых конкретных диапазонах. Каждый из этих диапазонов подвергнем калибровке, сопоставив каждому делению шкалы некоторое целое положительное число, меньшее или равное единице. На этой основе могут быть построены функции принадлежности нечетких сигналов «0» и «1», значения которых на соответствующих им диапазонах полагаются равными числу 1.

Условимся далее в правых частях равенств (1) в качестве значений переменных a и b использовать их нечеткие значения, выраженные в делениях выбранной и зафиксированной калибровочной шкалы. Легко показать, что при любых значениях переменных a и b из отрезка $[0, 1]$ результат каждой из трех логических операций в (1) лежит на том же отрезке.

Понятно, что каждой структурной схеме комбинационного ЦУ можно сопоставить соответствующее арифметическое выражение, содержащее операции сложения, вычитания и умножения. Если все переменные этого выражения интерпретировать как нечеткие вещественные числа, то для моделирования ЦУ можно применять все известные методы и приемы вычислений в рамках нечеткой арифметики над полем вещественных чисел. Соответствующие методы и различные аспекты такого моделирования в настоящее время достаточно хорошо разработаны. В частности, проблемы и методы нечеткого моделирования в поле вещественных чисел изложены в монографии А. Пегата [9].

Заметим, что используемые далее терминология и понятия трактуются так, как они определены в [9].

2. Этапы нечеткого двоичного логического моделирования

Из изложенного в предыдущем разделе следует, что для решения исследуемой задачи можно воспользоваться типовой структурой нечеткой модели исследуемой системы, детально описанной в [9]. Напомним, что структура модели состоит из трех последовательно соединенных блоков, выполняющих следующие функции:

1. Блок FUZZIFICATION (фаззификация) для поступающих на него нечетких значений входов ЦУ вычисляет их степени принадлежности входным нечетким множествам A_i и B_j . Содержательный смысл этих множеств будет уточнен позже.

2. Блок INFERENCE (вывод) на входе получает степени принадлежности, вычисленные предыдущим блоком, и на выходе вычисляет так называемую результирующую функцию $\mu_{res}(y)$ принадлежности выходного значения модели. Для выполнения вычислений этот блок включает в себя базу правил, механизм вывода и функции принадлежности выходного значения y ЦУ.

3. Блок DEFUZZIFICATION (дефаззификация) на основе $\mu_{res}(y)$ вычисляет четкое значение y^* выхода ЦУ, являющегося результатом для нечетких входных значений ЦУ. Этот блок включает в себя вычисление степеней выполнения условий отдельных правил, определение активизированных

функций принадлежности заключений отдельных правил, определение результирующей функции принадлежности вывода из всех правил, входящих в базу.

Отметим, что реализация приведенной нечеткой модели представляет собой достаточно трудоемкий процесс. Основную часть в нем составляют затраты на блоки вывода и дефаззификации. Опишем предлагаемую нами процедуру нечеткого моделирования ЦУ, отличающуюся существенно меньшей трудоемкостью. Суть этой процедуры кратко изложим и проиллюстрируем на примере простого комбинационного ЦУ с тремя входами $X1$, $X2$, $X3$, значение на выходе которого описывается следующей структурной формулой:

$$y = X1 \wedge X2 \vee X3.$$

Используя равенства (1), представим значение на выходе ЦУ в виде соответствующего ему арифметического выражения

$$y = X1 \cdot X2 + X3 - X1 \cdot X2 \cdot X3. \quad (2)$$

Условимся, что на входы ЦУ подаются сигналы, принимающие значения из двух нечетких множеств A_0 = «примерно 0» и A_1 = «примерно 1». Пусть графики функций принадлежности элементов этих множеств есть ломаные, изображенные на рис. 1.

На рисунке ломаная PMS соответствует множеству A_0 , а ломаная QNR – множеству A_1 в предположении, что выбрана и зафиксирована некоторая подходящая для входных сигналов рассматриваемого ЦУ калибровочная шкала. Таким образом, по оси абсцисс выписаны напряжения, определяющие нечеткие множества A_0 и A_1 , но выраженные не в вольтах, а в единицах значений выбранной калибровочной шкалы.

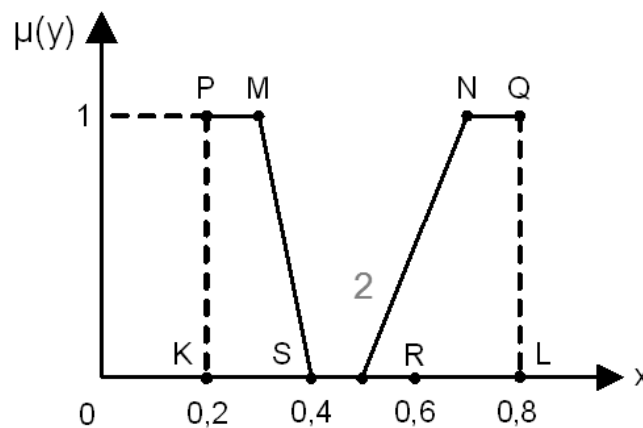


Рис. 1. График функции

Аналитические выражения функций принадлежности, соответствующих изображенным на рис.1, представлены ниже:

$$\mu_{A_0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0,4 < x \leq 0,8 \\ -10x + 4, & \text{если } 0,3 \leq x \leq 0,4 \\ 1, & \text{если } 0,2 \leq x < 0,3 \end{cases}, \quad \mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0,2 \leq x \leq 0,5 \\ 5x - 2,5, & \text{если } 0,5 < x \leq 0,7 \\ 1, & \text{если } 0,7 < x \leq 0,8 \end{cases}. \quad (3)$$

Согласно рис.1 входному сигналу «0» соответствует диапазон (0,2; 0,3), а сигналу «1» – диапазон (0,7; 0,8). Между этими диапазонами, как известно, расположена так называемая «мертвая зона», в пределах которой не гарантируется корректное восприятие уровня сигнала. Для нашего примера мертвая зона – это диапазон (0,3; 0,7). Известно также, что приблизительно в центре этой зоны находится пороговый уровень сигнала. Если сигнал ниже этого уровня, то входной сигнал воспринимает-

ся как «0», а выше – как «1». Для нашего примера будем считать, что пороговый уровень равен $U_n = (0,3 + 0,7) / 2 = 0,5$ (в единицах калибровочной шкалы).

При производстве ЦУ диапазоны напряжений сигналов, генерируемых на их выходе и воспринимаемых на входе, делают различными. При этом диапазон выходов целиком включает в себя диапазон входов. Это объясняется тем, что если ко входному сигналу добавляется помеха, то суммарный сигнал, тем не менее, воспринимается как верный. Учитывая это, условимся, что если при вычислении выхода ЦУ будет получено значение сигнала, уровень которого незначительно выходит за пределы диапазона сигнала «0» («1»), то оно будет полагаться равным сигналу «0» («1»). Для рассматриваемого нами ЦУ будем считать, например, допустимым упомянутое отклонение в 0,1–0,15 единицы калибровочной шкалы.

Опишем и проиллюстрируем далее все этапы по обработке информации, предлагаемой процедурой нечеткого двоичного моделирования ЦУ.

На первом этапе процедуры для заданных (нечетких) значений входов X_1, X_2, X_3 по правилам арифметики вещественных чисел вычисляется значение выхода y в соответствии с формулой (2). Например, пусть заданы входы рассматриваемого ЦУ $X_1 = 0,45, X_2 = 0,32, X_3 = 0,65$, тогда на его выходе получаем значение $y = 0,7004$. Напомним, что это значение выражено в единицах выбранной нами калибровочной шкалы, в которой представлены графики функций принадлежности нечетких входных сигналов ЦУ «примерно 0» и «примерно 1» на рис. 1.

Следующий этап предлагаемой процедуры эквивалентен процессу дефазсификации в типовой структурной нечеткой модели системы.

Сформулируем правила, по которым нечеткое значение выхода ЦУ y , полученное на первом этапе путем вычисления по формуле типа (2), будет преобразовываться в четкое значение сигнала (0 или 1).

Предварительно введем некоторые обозначения. Через $(\underline{v(0)}, \overline{v(0)})$ обозначим диапазон сигнала «0», а через $(\underline{v(1)}, \overline{v(1)})$ – сигнала «1» в единицах калибровочной шкалы (scale calibration unit (s.c.u.)).

В терминах этих обозначений сформулируем правила, по которым нечеткое значение на выходе ЦУ, полученное на первом этапе, будет преобразовываться в четкое значение:

1. Если нечеткое значение выхода y лежит в диапазоне $(\underline{v(0)}, \overline{v(0)})$, то четкое значение сигнала полагается равным 0.
2. Если нечеткое значение выхода y лежит в диапазоне $(\underline{v(1)}, \overline{v(1)})$, то четкое значение сигнала полагается равным 1.
3. Если нечеткое значение выхода y выходит за пределы диапазона $(\underline{v(0)}, \overline{v(0)})$ на 0,1–0,15 s.c.u., то четкое значение сигнала полагается равным 0.
4. Если нечеткое значение выхода y выходит за пределы диапазона $(\underline{v(1)}, \overline{v(1)})$ на 0,1–0,15 s.c.u., то четкое значение сигнала полагается равным 1.
5. Если отклонение сигнала y больше, чем указано в п. 4, но меньше U_n , то четкое значение сигнала полагается равным 0.
6. Если отклонение сигнала y больше, чем указано в п. 5, но больше U_n , то четкое значение сигнала полагается равным 1.

Описанная процедура двоичного логического моделирования ЦУ имеет меньшую трудоемкость, чем трудоемкость применения типовой структурной нечеткой модели [9], поскольку в предложенной процедуре отсутствует блок вывода (inference), представляющий в типовой модели наиболее трудоемкую составляющую. Кроме того, преобразование нечеткого значения выхода в четкое выполняется по предельно простым правилам в отличие от трудоемких преобразований, требующихся в типовой структуре модели.

Известно, что в общем случае адекватность создаваемых алгоритмов нечеткого моделирования и трудоемкость их реализации на основе типовой структуры в существенной степени зависят от мно-

гих факторов [9]. К числу этих факторов относятся, в частности, выбор формы представления нечетких чисел, определение арифметических операций над ними, применяемые способы приближенных рассуждений, позволяющие использовать в условиях и заключениях нечеткие формулировки, выбор способов дефаззификации и т.д. Повышение уровня адекватности алгоритмов нечеткого моделирования достигается за счет варьирования методов реализации перечисленных факторов и представляет собой весьма сложную проблему. Что касается качества алгоритмов, то его, по-видимому, можно оценивать по соотношению числа «корректных» и «некорректных» результатов нечеткого моделирования, получаемых в процессе проводимых численных или натурных экспериментов. Понятно, что от любого такого алгоритма нельзя требовать, чтобы на любых исходных данных он давал корректный результат, поскольку он оперирует с нечеткими данными.

Для рассматриваемого нами примера были проведены расчеты по предложенной процедуре моделирования на различных нечетких исходных данных. Вычисления на всех наборах, когда сигналы «0» и «1» представлены серединами их диапазонов, дают корректные результаты. Более интересна ситуация с результатами на «аномальных» наборах, когда входные сигналы находятся вне пределов их стандартных диапазонов. Такие вычисления были проведены, и на подавляющем большинстве этих наборов получены корректные результаты. Результаты на некоторых из таких «аномальных» наборов приведены в представленной ниже таблице. Из восьми приведенных в ней наборов на одном (втором сверху) был получен некорректный результат (1 вместо 0).

Результаты расчетов для «аномальных» наборов

Входной набор $\left(\begin{smallmatrix} \text{двоичный} \\ \text{нечеткий} \end{smallmatrix}\right)$	Выход ЦУ, вычисленный по формуле (2)	Результат дефаззификации нечеткого выхода	Используемое правило для дефаззификации
$\frac{0 \ 0 \ 0}{0,1;0,45;0,05}$	0,0928	0	Правило 3
$\frac{0 \ 0 \ 0}{0,45;0,45;0,45}$	0,5614	1	Правило 4
$\frac{0 \ 1 \ 0}{0,1;0,85;0,45}$	0,4968	0	Правило 5
$\frac{1 \ 0 \ 1}{0,55;0,4;0,9}$	0,922	1	Правило 4
$\frac{1 \ 0 \ 1}{0,55;0,35;0,85}$	0,879	1	Правило 4
$\frac{1 \ 1 \ 1}{0,55;0,65;0,55}$	0,7109	1	Правило 2
$\frac{1 \ 1 \ 1}{0,55;0,65;0,9}$	0,9358	1	Правило 4
$\frac{1 \ 1 \ 1}{0,9;0,9;0,9}$	0,981	1	Правило 6

Заключение

Предложена процедура двоичного логического моделирования ЦУ, в основу которой положено сведение соответствующей задачи к моделированию систем в пространстве вещественных чисел. Эта процедура по сравнению со стандартной процедурой, базирующейся на использовании известной типовой структуры нечеткой модели исследуемого устройства, обладает существенно меньшей трудоемкостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Inf. and Control. 1965. No. 8. P. 338–353.

2. Dubois D., Prade H. Fuzzy Numbers, on Overview // Analysis of Fuzzy Information (Mathematics). GRC Press, 1988. P. 3–39.
3. Kaufman A., Gupta M.M. Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Applications. N.Y. : Van Nostrand Reinhold Company, 1985. 350 p.
4. Kandel A. Fuzzy Mathematical Techniques with Applications. Mass. : Addison Wesley, Reading, 2000. 70 p.
5. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic: Introduction with Engineering Applications. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2005. 256 p.
6. Яхьяева Г.Э. Нечеткие множества и нейронные сети. М. : Интернет-Университет Информационных Технологий ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 316 с.
7. Скобцов Ю.А., Сперанский Д.В., Скобцов В.Ю. Моделирование, тестирование и диагностика цифровых устройств. М. : Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2012. 439 с.
8. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие. 2-е изд. М. : Наука, 1986. 384 с.
9. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление : пер с англ. 2-е изд. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 798 с.

Сперанский Дмитрий Васильевич, д-р техн. наук, профессор. E-mail: Speranskiy.dv@gmail.com

Московский государственный университет
путей сообщений (г. Москва)

Поступила в редакцию 22 января 2014 г.

Speranskiy Dmitry V. (Moscow State University of Communication Lines, Moscow, Russian Federation).

Fuzzy binary logic modeling for digital devices.

Keywords: digital devices; fuzzy modeling; binary modeling.

The problem of fuzzy binary logic modeling for discrete devices (DD) is investigated. In contrast to the classical problem of logic simulation, it is assumed that inputs are fuzzy signals. In the real DD for each input signals “0” and “1” there is a certain voltage range. If an input signal is out of the range, the correct signal identification is not guaranteed. The fuzziness of input signals means that their observed values can be either within of the defined range, or out of it. It is clear that the corresponding output signal of the DD will be also fuzzy.

It is known that the modeling of every logical DD is the calculation of the value of the certain logical expression. This expression is a mathematical model of the DD. Also, the corresponding expression can be always represented in terms of three logical operations, namely, AND, OR, and NOT. In the article, a method of reducing the investigated problem to the problem of fuzzy modeling systems in the space of real numbers is proposed. This method is based on the presentation of logical operations through operations of addition, subtraction, and multiplication of real numbers in the range [0, 1]. So, it is proposed to convert the input signal range into sub-intervals of the interval [0, 1] forming the specific calibration scale. The problem of fuzzy modeling systems in the space of real numbers has been well studied and the arsenal of tools for its solution is developed. Therefore, we can use this arsenal. However, the implementation of this approach is very time-consuming. The matter is that an exemplary fuzzy modeling system requires the sequential execution of three phases (blocks). Two of them (the INFERENCE block and DEFUZZIFICATION block) are connected with a lot of computing.

The proposed fuzzy binary logic simulation procedure consists of two phases. The first phase is the conversion of voltage ranges representing the input signals into sub-intervals of the interval [0, 1] of the calibration scale. Then, the calculation of the arithmetic expression that is originated by the mathematical model of the considered DD is performed. In the second phase, the transformation of fuzzy value of the expression in the exact value 0 or 1 (defuzzification) is executed. In comparison with the above mention typical fuzzy system modeling, the suggested modeling procedure is significantly less complicated. It is because of the block INFERENCE is absent in our procedure. Moreover, converting fuzzy output value in the exact value is performed by using extremely simple rules, in contrast to the labor-intensive transformations for the typical fuzzy modeling. The results of testing for the combinational circuit are shown. The effectiveness of the procedure is demonstrated by a number of correct results.

REFERENCES

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, no. 8, pp. 338-353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X
2. Dubois D., Prade H. *Fuzzy numbers, on Overview*. In: Bezdek J.C. (ed.) *Analysis of fuzzy information: Mathematics and logic*. CRC Press, 1987, pp. 3-39.
3. Kaufman A., Gupta M.M. *Introduction to fuzzy arithmetic theory and applications*. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1985. 350 p.
4. Kandel A. *Fuzzy Mathematical Techniques with applications*. Mass.: Addison Wesley, Reading, 2000. 70 p.
5. Hanss M. *Applied fuzzy arithmetic: Introduction with engineering applications*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 256 p.
6. Yakhyaeva G.E. *Nechetkie mnozhestva i neyronnye seti* [Fuzzy sets and neural networks]. Moscow: Internet University of Information Technologies: BINOM. Laboratoriya znaniy Publ., 2008. 316 p.
7. Skobtsov Yu.A., Speranskiy D.V., Skobtsov V.Yu. *Modelirovanie, testirovanie i diagnostika tsifrovyykh ustroystv* [Modeling, testing and diagnostics of digital devices]. Moscow: National Public University “INTUIT” Publ., 2012. 439 p.
8. Yablonskiy S.V. *Vvedenie v diskretnuyu matematiku* [Introduction to discrete mathematics]. Moscow: Nauka Publ., 1986. 384 p.
9. Piegat A. *Nechetkoe modelirovanie i upravlenie* [Fuzzy modeling and control]. Moscow: BINOM, Laboratoriya znaniy Publ., 2013. 798 p.

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.2

В.А. Дёмин, Е.В. Чимитова, В.Ю. Щеколдин

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА СГЛАЖИВАНИЯ ПРИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ОЦЕНИВАНИИ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ

Рассматривается один из популярных подходов к непараметрическому оцениванию регрессионной модели надежности, предложенный Р. Бераном, позволяющий оценить условную функцию надёжности при заданном значении объясняющей переменной. Представлены результаты исследования статистических свойств оценки Берана на основе предложенного метода выбора оптимального параметра сглаживания. Выявлены факторы, влияющие на точность оценки Берана, и сформулированы рекомендации по применению предложенного метода выбора оптимального параметра сглаживания.

Ключевые слова: функция надёжности; регрессионная модель; непараметрическая оценка Берана; параметр сглаживания; параметр размытости; робастное оценивание.

Одной из важнейших задач в теории надежности является построение модели зависимости функции надежности от объясняющих переменных (ковариат), в качестве которых обычно выступают воздействия различного типа, такие как температура, давление, напряжение, механические нагрузки и др. На сегодняшний день существует широкий спектр методов, позволяющих решать данную задачу, отличающихся друг от друга спецификой используемых данных, видом привлекаемой априорной информации и степенью точности получаемых результатов. В последнее время большую популярность завоевали непараметрические методы, которые не требуют знания априорной информации о виде регрессионной функции и законе распределения результатов измерений. Однако в большинстве пакетов прикладных программ статистического анализа данных для решения задачи непараметрического оценивания функции надежности привлекаются лишь оценки Каплана – Мейера, которые не позволяют учесть влияние объясняющих переменных на изменение функции надежности. В этом смысле представляются актуальными разработка и развитие более широкого класса методов, учитывающих влияние ковариат. К таким методам относится предложенное в 1981 г. Р. Бераном обобщение оценки Каплана – Мейера на случай построения регрессионных моделей надежности [1].

Несмотря на преимущества оценки Берана как непараметрического метода [8], до сих пор существует весьма ограниченное число публикаций, посвященных исследованию статистических свойств данной оценки, среди которых можно выделить работы [2–5], в которых эти свойства изучаются для случайного плана эксперимента, когда значение ковариаты не фиксировано, а в [6] рассматриваются свойства оценки для неслучайного плана, когда значения ковариаты определяются заранее.

Важнейшую роль при построении непараметрических оценок играет выбор параметра сглаживания, от которого существенно зависит точность получаемых оценок. В случае оценивания классических регрессионных моделей разработано множество методов определения оптимальных значений параметра сглаживания, таких как метод кросс-валидации, метод минимума интегральной среднеквадратической ошибки, методы асимптотической оценки и др. [7, 8]. Применяя тот или иной метод выбора оптимального параметра сглаживания, важно понимать, что смысловая интерпретация этого параметра в оценке Берана существенно отличается от его интерпретации для классических моделей

регрессии, поскольку на его основе могут быть получены лишь весовые коэффициенты, которые впоследствии используются при построении оценки. Среди публикаций на эту тему можно отметить [9], где предлагается решение данной задачи при помощи бутстреп-метода в предположении, что ковариата является случайной величиной и определяется некоторым законом распределения. Однако для теории надёжности такой вариант совершенно не характерен, поскольку трудно представить ситуацию, в которой объясняющие переменные имеют стохастическую природу. Преодоление этой проблемы представляет собой отдельную тему исследований, некоторые направления которых были упомянуты в предыдущих работах авторов [5, 9]. В частности, в [10] предложен метод выбора оптимального параметра сглаживания для оценки Берана, основанный на минимизации среднеквадратического отклонения времен отказов от непараметрической оценки обратной функции надёжности. Выяснено, что оценки Берана, построенные с использованием оптимального параметра сглаживания, оказались точнее, чем для фиксированного значения параметра сглаживания. Тем не менее вопросы о выборе вида ядерной функции, метода определения параметра размытости для непараметрической оценки обратной функции надёжности и типа весовых коэффициентов требуют проведения дополнительных исследований. Целью данной работы являются изучение статистических свойств оценки Берана и разработка практических рекомендаций по применению предложенного метода выбора оптимального параметра сглаживания.

1. Непараметрическая оценка Берана и выбор оптимального параметра сглаживания

Обозначим через T_x время безотказной работы исследуемых технических изделий, которое зависит от скалярной ковариаты x , диапазон значений которой определяется условиями эксперимента и представляет собой отрезок числовой прямой. Без потери общности будем считать этот отрезок равным $[0;1]$. Функция надёжности определяется соотношением

$$S(t|x) = P(T_x \geq t) = 1 - F(t|x), \quad (1)$$

где $F(t|x)$ – условная функция распределения случайной величины T_x .

Главной особенностью данных типа времени жизни является наличие цензурированных справа наблюдений, которые можно представить в виде

$$(Y_1, x_1, \delta_1), (Y_2, x_2, \delta_2), \dots, (Y_n, x_n, \delta_n),$$

где n – объем выборки, x_i – значение ковариаты для i -го объекта, Y_i – время наработки до момента отказа или цензурирования, δ_i – индикатор цензурирования, который принимает значение 1, если наблюдение полное, и 0, если цензурированное.

Оценка Берана, согласно [1], имеет следующий вид:

$$\tilde{S}_{h_n}(t|x) = \prod_{Y_{(i)} \leq t} \left\{ 1 - \frac{W_n^i(x; h_n)}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} W_n^j(x; h_n)} \right\}^{\delta_i}, \quad (2)$$

где x – значение ковариаты, для которой оценивается функция надёжности; $W_n^i(x; h_n)$, $i = 1, \dots, n$, – веса Надарая – Уотсона, которые [5, 8] определяются как

$$W_n^i(x; h_n) = K\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right) / \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - x_j}{h_n}\right), \quad (3)$$

где $K(\cdot)$ – ядерная функция, удовлетворяющая условиям регулярности

$$K(y) = K(-y), 0 \leq K(y) < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} K(y) dy = 1,$$

$h_n > 0$ – параметр сглаживания такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n h_n = \infty$.

В [10] предложен алгоритм выбора оптимального параметра сглаживания h_n для оценки Берана, основанный на минимизации среднеквадратического отклонения времен отказов $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ от непараметрической оценки обратной функции надежности $S_x^{-1}(p)$. В данной работе будем определять значения оптимального параметра как решение следующей оптимизационной задачи:

$$h_n^{\text{opt}} = \arg \min_{h_n} \sum_{i=1}^n \delta_i \cdot |\hat{g}(\hat{p}_i | x_i) - Y_i|, \quad (4)$$

где

$$\hat{g}(\hat{p}_i | x_i) = \sum_{j=1}^n \omega_j(\hat{p}_i) \cdot Y_j. \quad (5)$$

Вероятности $\hat{p}_i$ вычисляются с использованием оценки Берана, веса $\omega_j(\hat{p}_i)$ можно рассчитать, используя различные весовые функции. Далее будем рассматривать веса первого порядка Надарая – Уотсона

$$\omega_j^{(1)}(\hat{p}_i) = W_n^j(\hat{p}_i; b_n) = K\left(\frac{\hat{p}_i - \hat{p}_j}{b_n}\right) / \sum_{k=1}^n K\left(\frac{\hat{p}_i - \hat{p}_k}{b_n}\right)$$

и веса второго порядка Пристли – Чао [1]:

$$\omega_j^{(2)}(\hat{p}_i) = n(\hat{p}_{(i)} - \hat{p}_{(i-1)}) K\left(\frac{\hat{p}_i - \hat{p}_j}{b_n}\right),$$

где b_n – параметр размытости.

Таким образом, для вычисления оптимального параметра сглаживания для оценки Берана необходимы непараметрические оценки вида (5), для которых, в свою очередь, нужно выбирать параметр b_n .

2. Выбор весовой функции, способа вычисления параметра b_n и ядерных функций

Исследуем статистические свойства оценки Берана при использовании оптимального параметра сглаживания (4). Очевидно, что то, насколько хорошо будет подобран оптимальный параметр сглаживания h_n^{opt} , напрямую зависит от качества получаемых оценок (5). Сравним различные веса $\omega_j(\hat{p}_i)$ для ядерной оценки $\hat{g}(\hat{p}_i | x_i)$, а также различные методы выбора параметра размытости b_n с точки зрения точности получаемых оценок Берана.

Поскольку рассматривается задача, предполагающая использование ядерного сглаживания, можно воспользоваться уже разработанными подходами для выбора оптимального параметра сглаживания ядерной оценки регрессии. Рассмотрим следующие методы:

1. Метод кросс-валидации, который чаще всего рассматривается как наиболее точный, однако требующий значительных вычислительных затрат [8].

2. Метод минимума средней интегральной ошибки, в соответствии с которым параметр размытости вычисляется по формуле [8]:

$$b_{NS} = \left[\frac{8\pi^{1/2} R(K)}{3\mu_2(K)^2 n} \right]^{1/5} \hat{\sigma}, \quad (6)$$

где $\mu_2(K) = \int y^2 K(y) dy$, $R(K) = \int K^2(y) dy$. Величина $\hat{\sigma}$ – оценка среднеквадратического отклонения, которую можно вычислять различными способами, чаще всего для этого применяется несмещенная выборочная дисперсия

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{p}_i - \bar{\hat{p}})^2. \quad (7)$$

Однако оценка (7), во-первых, не является робастной, а во-вторых, обладает «хорошими» статистическими свойствами лишь в случае законов распределения, близких к нормальному. Поэтому в данной работе будем также рассматривать робастную оценку среднеквадратического отклонения вида [11]:

$$\hat{\sigma}_{\text{robust}} = 1,4826 \operatorname{med}_{i=1 \dots n} \left| \hat{p}_i - \operatorname{med}_{j=1 \dots n, k=j+1 \dots n} \left(\frac{\hat{p}_j + \hat{p}_k}{2} \right) \right|. \quad (8)$$

Такая оценка представляет собой комбинацию известной робастной оценки Ходжеса – Леманна (Hodges – Lehmann) для параметра сдвига и робастной оценки Русьё (Rousseeuw), называемой медианой абсолютных отклонений, для параметра масштаба.

Исследование свойств получаемых оценок проводилось с помощью методов статического моделирования. В качестве отклонения оценки Берана от истинной условной функции надёжности использовалась статистика:

$$D_{h_n} = \sup_{j=1 \dots k, t < \infty} \left| \tilde{S}_{h_n}(t | x_j) - S_{x_j}(t) \right|, \quad (9)$$

при этом истинной моделью надёжности являлась параметрическая модель пропорциональных интенсивностей Кокса [9]:

$$S_x(t) = (S_0(t))^{r(x;\beta)}, \quad (10)$$

с функцией от ковариат вида $r(x;\beta) = \ln(1 + e^{\beta x})$ и базовой функцией надёжности, соответствующей логнормальному распределению с функцией плотности

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_1 t}} \exp \left(-\frac{1}{2\theta_1^2} \ln^2 \left(\frac{t}{\theta_2} \right) \right) \quad (11)$$

с параметрами $\theta_1 = 21,5$; $\theta_2 = 1,6$.

Для используемых при моделировании весовых функций, методов оценки дисперсии и истинного значения параметра регрессии β примем следующие обозначения: 1 – веса Пристли – Чао, робастная оценка дисперсии (8), $\beta = 2$; 2 – веса Пристли – Чао, неробастная оценка дисперсии (7), $\beta = 2$; 3 – веса Надарая – Уотсона, робастная оценка дисперсии (8), $\beta = 2$; 4 – веса Надарая – Уотсона, неробастная оценка дисперсии (7), $\beta = 2$; 5 – веса Пристли – Чао, робастная оценка дисперсии (8), $\beta = 5$; 6 – веса Пристли – Чао, неробастная оценка дисперсии (7), $\beta = 5$; 7 – веса Надарая – Уотсона, робастная оценка дисперсии (8), $\beta = 5$; 8 – веса Надарая – Уотсона, неробастная оценка дисперсии (7), $\beta = 5$.

На рис. 1–3 приведены усредненные значения отклонения (9), оптимального параметра сглаживания и параметра размытости b_{NS} , соответственно, при объемах выборок $n = 100, 200, 300$. Ковариата x принимала значения из множества $\{0; 0,11; 0,22; 0,33; 0,44; 0,56; 0,67; 0,78; 0,89; 1\}$, $m = 10$. Количество наблюдений, соответствующее различным значениям ковариаты, во всех экспериментах считалось одинаковым.

Из рис. 1 видно, что использование весовой функции Пристли – Чао позволяет получить более точную оценку Берана. При объеме выборки $n = 100$ выигрыш в точности оценок Берана с использованием весов Пристли – Чао в выражении (5) составляет примерно 3% от средней величины отклонения (9) в случае использования весов Надарая – Уотсона, при $n = 200$ выигрыш около 8%, а при $n = 300$ – 11%. Ухудшение точности оценки Берана при использовании весов Надарая – Уотсона может быть вызвано тем, что данная весовая функция не предполагает упорядочивания весов, в результате чего при построении оценки Берана используются «лишние» наблюдения и соответствующая дисперсия увеличивается. Использование робастной оценки дисперсии при вычислении параметра размытости повышает точность оценки Берана, которая также растёт с увеличением объема выборки.

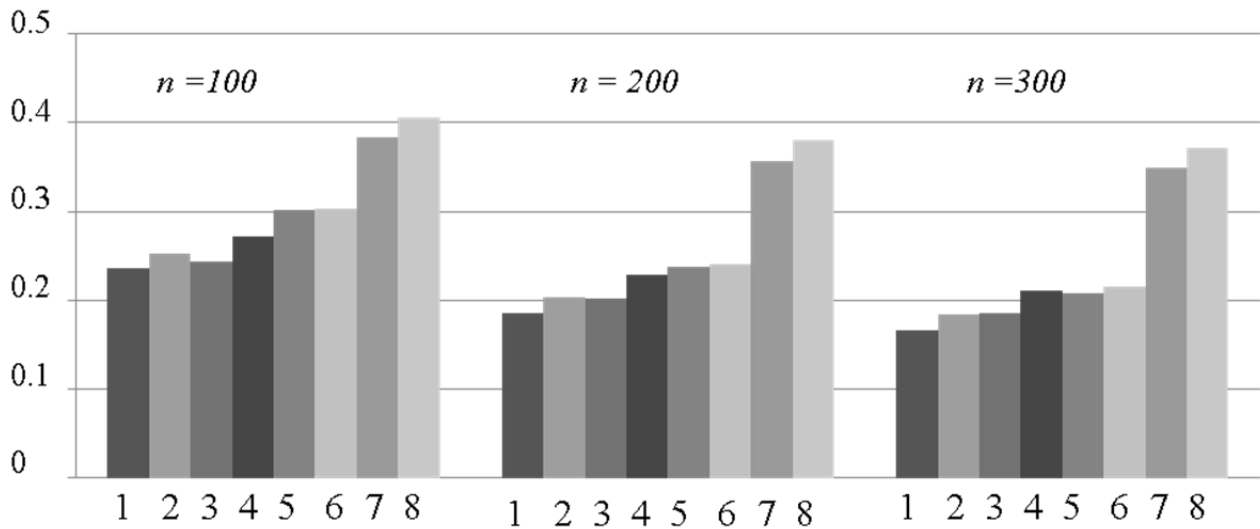


Рис. 1. Усреднённое отклонение между оценкой Берана и истинной условной функцией надежности при различных объёмах выборки

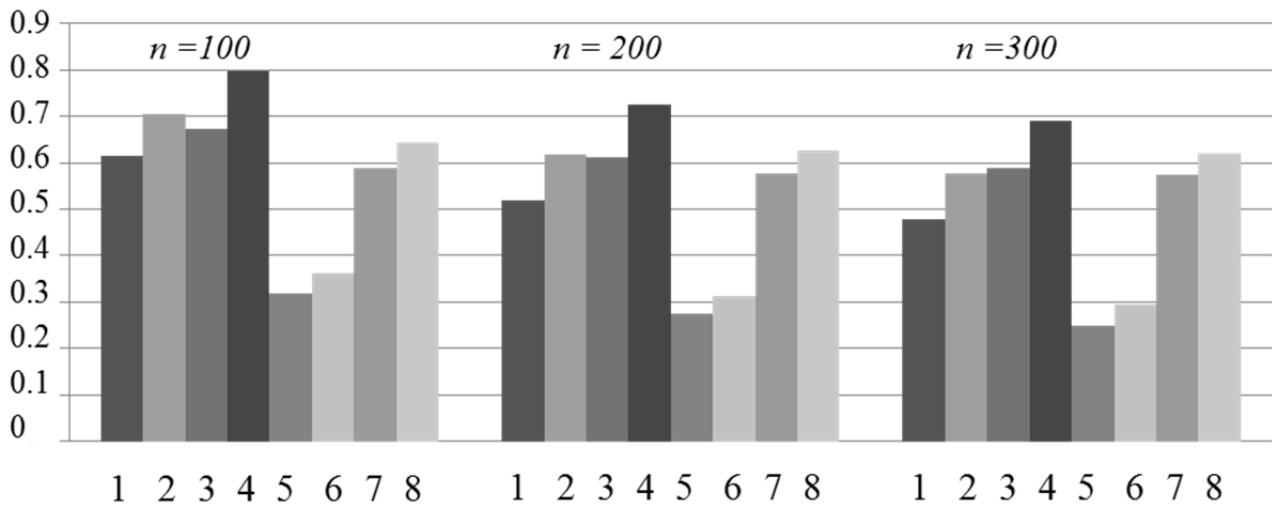


Рис. 2. Усреднённый параметр сглаживания h_n^{opt} при различных объёмах выборки

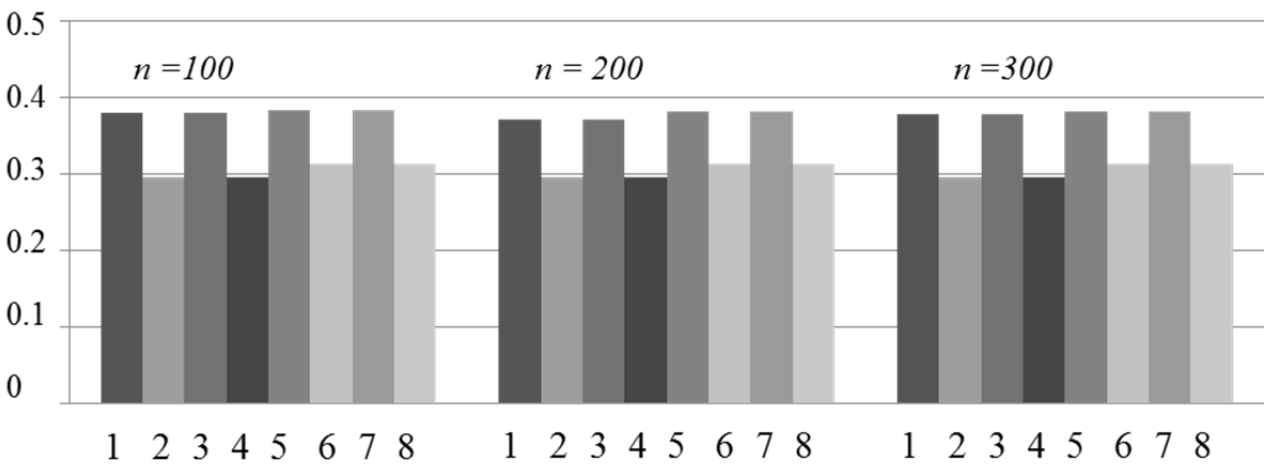


Рис. 3. Усреднённое значение параметра размытости b_{NS} при различных объёмах выборки

Из рис. 2 видно, что с увеличением объёма выборки параметр сглаживания h_n^{opt} уменьшается, что вполне логично, так как число наблюдений при разных значениях ковариаты увеличивается, а значит, растёт и число «лишних» наблюдений. Важно отметить, что с увеличением параметра β в 2,5 раза (т.е. при увеличении влияния ковариаты на функцию надёжности) значение h_n^{opt} уменьшилось почти в два раза при использовании весов Пристли – Чао. Однако в случае весов Надарая – Уотсона такой ситуации не наблюдается, поэтому в данном случае точность оценок Берана с использованием весов Надарая – Уотсона существенно ухудшается.

Как видно из рис. 3, усреднённое значение параметра размытости практически не изменяется при увеличении объёма выборки. Такой результат согласуется с выводами, полученными в работе [12], согласно которым значение параметра b_{NS} не зависит от вида весовой функции.

В рассматриваемых условиях дискретный план эксперимента будет зависеть от числа значений m , которые может принимать ковариата. Следующая часть исследований посвящена изучению зависимости искомой оценки ее свойств от m .

На рис. 4–6 представлены результаты моделирования при фиксированном объёме выборки $n = 200$, при различном числе значений ковариаты m .

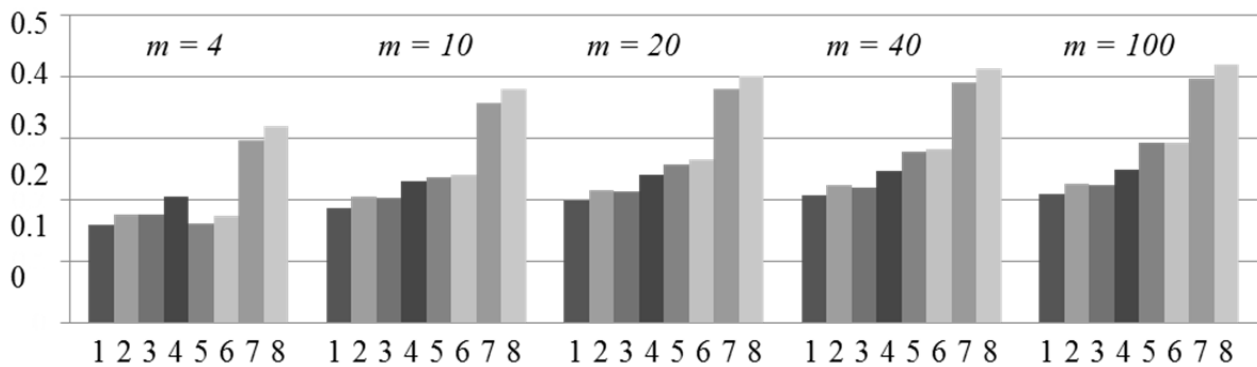


Рис. 4. Усреднённое отклонение между оценкой Берана и истинной условной функцией надёжности при различном числе значений ковариаты

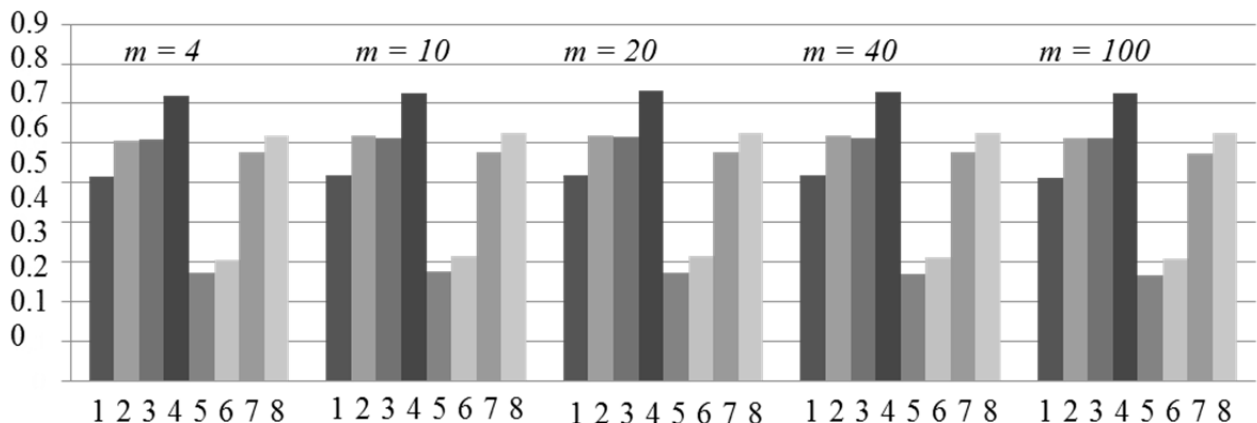


Рис. 5. Усреднённый параметр сглаживания h_n^{opt} при различном числе значений ковариаты

Как видно из рис. 4, с увеличением числа возможных значений ковариаты точность оценки Берана снижается. В частности, при использовании весов Пристли – Чао и робастной оценки дисперсии при $m=10$ относительно $m=4$ ухудшение составляет около 17%, а при $m=20$ относительно $m=10$ – 6%. Этот результат является вполне логичным, поскольку количество наблюдений, соответ-

ствующих фиксированному значению ковариаты, уменьшается, следовательно, объем информации о каждом наблюдении также становится меньше, что приводит к потере точности.

Анализ значений параметра сглаживания на основе рис. 5 показывает, что оптимальные значения параметра практически не изменяются. Аналогичная ситуация наблюдалась при изучении усреднённых значений параметра размытости b_{NS} . Данное свойство оптимальных параметров сглаживания h_n^{opt} и размытости b_{NS} распространяется и на случай других значений регрессионного параметра (при увеличении степени влияния ковариаты на функцию надёжности).

Исследования свойств оценки Берана при различных условиях моделирования были также проведены для экспоненциальной модели Кокса. Выявленные закономерности оказались практически такими же, поэтому конкретные численные результаты для этого случая опускаются.

В большинстве исследований, посвященных непараметрическим методам, отмечается, что выбор ядерной функции практически не влияет на точность получаемых оценок [7, 8]. Однако в данной постановке задачи это свойство может нарушаться. Для проверки этого предположения было проведено исследование точности оценки Берана при использовании различных ядерных функций при решении оптимизационной задачи (4) и оценивании параметра размытости (6). Результаты представлены в таблице.

Усреднённое отклонение (9) при использовании различных ядерных функций

$b_{NS} \backslash h_n$	Квартическое	Епанечникова	Прямоугольное	Гаусса
Квартическое	0,20	0,20	0,21	0,23
Епанечникова	0,21	0,22	0,23	0,26
Прямоугольное	0,25	0,26	0,29	0,30
Гаусса	0,32	0,35	0,36	0,38

Как видно из таблицы, наилучшая точность оценки Берана достигается при использовании квартического и ядра Епанечникова как при оценивании параметра сглаживания, так и при вычислении параметра размытости. Таким образом, изменение в постановке задачи, т.е. при применении ядерных функций для вычисления весовых коэффициентов в непараметрической оценке (2), приводит к тому, что выбор формы ядра оказывает существенное влияние на свойства оценок Берана. Конечно такое влияние обуславливается наличием взаимосвязи между параметрами размытости и сглаживания, определяющими значения оптимизируемого функционала в (4).

Заключение

В настоящей работе методами статистического моделирования проведено исследование свойств оценки Берана на основе разработанного метода выбора оптимального параметра сглаживания. Показано, что на точность оценки Берана оказывают влияние объем выборки, число значений ковариаты, выбор вида весовой функции, способ оценивания параметра размытости, а также вид ядерных функций, используемых при оценивании параметра сглаживания и вычислении параметра размытости.

Полученные результаты позволяют сформулировать ряд рекомендаций по оцениванию условной функции надежности с помощью оценки Берана. На наш взгляд, наилучшие результаты могут быть достигнуты при использовании весовой функции Пристли – Чао с параметром размытости b_{NS} , вычисляемом на основе медианы абсолютных отклонений. Среди рассмотренных вариантов ядерных функций можно рекомендовать квартическое и ядро Епанечникова, поскольку они позволяют получить наиболее точную оценку Берана с точки зрения усредненного отклонения (9).

Следует отметить, что рассмотренные в данной работе методы не охватывают всего многообразия подходов к построению непараметрических оценок регрессионных моделей надежности. В частности, перспективным представляется привлечение техники бутстрепа и разработка адаптивных алгоритмов для выбора оптимальных значений параметра сглаживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beran R.* Nonparametric regression with randomly censored survival data // Technical report. Department of Statistics. Berkeley : University of California, 1981.
2. *Dabrowska D.M.* Nonparametric quantile regression with censored data // *Sankhya Ser. A.* 1992. V. 54. P. 252–259.
3. *Gonzalez M.W., Cadarso S.C.* Asymptotic properties of a generalized Kaplan-Meier estimator with some application // *J. Nonparametric Statistics.* 1994. No. 4. P. 65–78.
4. *McKeague I.W., Utikal K.J.* Inference for a nonlinear counting process regression model // *Ann. Statist.* 1990. V. 18. P. 1172–1187.
5. *Van Keilegom I., Akritas M.G., Veraverbeke N.* Estimation of the conditional distribution in regression with censored data: a comparative study // *Computational Statistics & Data Analysis.* 2001. V. 35. P. 487–500.
6. *Akritas M.G.* Nearest neighbor estimation of a bivariate distribution under random censoring // *Ann. Statist.* 1994. V. 22. P. 1299–1327.
7. *Расин Д.* Непараметрическая эконометрика: вводный курс // *Квантиль.* 2008. № 4. С. 7–26.
8. *Хардле В.* Прикладная непараметрическая регрессия. М. : Мир, 1993. 349 с.
9. *Gang L., Somnath D.* A bootstrap approach to nonparametric regression for right censored data // Technical report #99-8. 1999. P. 6–10.
10. *Демин В.А., Чимитова Е.В.* Выбор оптимального параметра сглаживания для непараметрической оценки регрессионной модели надежности // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2013. № 1(22). С. 59–65.
11. *Rousseeuw P.J., Verboven S.* Robust estimation in very small samples // *Journal Computational Statistics & Data Analysis.* 2002. V. 40(4). P. 741–758.
12. *Кошкин Г.А.* Основы страховой математики : учеб. пособие. Томск : Томский государственный университет, 2002. 116 с.

Демин Виктор Андреевич. E-mail: vicdemin@gmail.com

Чимитова Екатерина Владимировна, канд. техн. наук. E-mail: ekaterina.chimitova@gmail.com

Щеколдин Владислав Юрьевич. E-mail: raix@mail.ru

Новосибирский государственный технический университет

Поступила в редакцию 2 февраля 2014 г.

Demin Viktor A., Chimitova Ekaterina V., Schekoldin Vladislav Yu. (Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation).

The research for optimal choice method of bandwidth parameter in nonparametric estimation of reliability regression models.

Keywords: reliability function; regression model; nonparametric Beran estimator; bandwidth parameter; smoothing parameter; robust estimation.

In the paper, we consider one of the most popular nonparametric estimators of regression reliability models proposed by R. Beran. Such estimator allows to evaluate the conditional reliability function with the given values of covariates by the following formula:

$$\tilde{S}_{h_n}(t|x) = \prod_{Y_{(i)} \leq t} \left\{ 1 - \frac{W_n^i(x; h_n)}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} W_n^j(x; h_n)} \right\},$$

where x is the value of covariate in the reliability function $S(t|x)$; $Y_{(i)}$ is the element of variational series; $W_n^i(x; h_n)$, $i = 1, \dots, n$, are the Nadaraya – Watson weights, i.e.,

$$W_n^i(x; h_n) = K\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right) / \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - x_j}{h_n}\right).$$

It is well-known, the quality of the Beran estimator essentially depends on the chosen value of the bandwidth parameter h_n . In our previous paper, the method of selecting the optimal bandwidth parameter was proposed, which is based on the minimization of

the distance of failure times with kernel estimation for the inverse reliability function. Here, we consider the modification of this method by solving such optimization problem:

$$h_n^{\text{opt}} = \arg \min_{h_n} \sum_{i=1}^n |\hat{g}(\hat{p}_i | x_i) - Y_i|,$$

where

$$\hat{g}(\hat{p}_i | x_i) = \sum_{j=1}^n \omega_j(\hat{p}_i) \cdot Y_j.$$

The probabilities $\hat{p}_i$ are calculated by using the instrumentality of the Beran estimators, $\omega_j(\hat{p}_i)$ are certain weights which can be calculated with various weight functions.

We investigate the statistical properties of the Beran estimators by Monte Carlo simulations. It is shown that the accuracy of this estimators depend on the sample size, the number of covariates' values, the selection of the weight function's form, the method of smoothing parameter estimation and the type of kernel functions used in the smoothing parameter estimation and the bandwidth parameter calculation.

The obtained results allow us to formulate recommendations for estimating the conditional reliability function by the Beran estimator. In our opinion, the most appropriate results are achieved by the Priestley – Chao weight function

$$\omega_j^{(2)}(\hat{p}_i) = n(\hat{p}_{(i)} - \hat{p}_{(i-1)}) K\left(\frac{\hat{p}_i - \hat{p}_j}{b_{NS}}\right),$$

with the smoothing parameter

$$b_{NS} = \left[\frac{8\pi^{1/2} R(K)}{3\mu_2(K)^2 n} \right]^{1/5} \hat{\sigma},$$

where $\mu_2(K) = \int y^2 K(y) dy$, $R(K) = \int K^2(y) dy$. We recommend the robust standard deviation estimator based on the mixing method using the median absolute deviation and the Hodges – Lehmann estimator:

$$\hat{\sigma}_{\text{robust}} = 1.4826 \text{med}_{i=1 \dots n} \left| \hat{p}_i - \text{med}_{j=1 \dots n, k=j+1 \dots n} \left(\frac{\hat{p}_j + \hat{p}_k}{2} \right) \right|.$$

Also, we note that the quartic and Epanechnikov kernel functions lead to the most accurate Beran estimators.

REFERENCES

1. Beran R. *Nonparametric regression with randomly censored survival data. Technical report.* Department of Statistics, University of California, Berkeley. 1981.
2. Dabrowska D.M. Nonparametric quantile regression with censored data. *Sankhya Ser. A*, 1992, no. 54, pp. 252-259.
3. Gonzalez M.W., Cadarso S.C. Asymptotic properties of a generalized Kaplan-Meier estimator with some application. *Journal of Nonparametric Statistics*, 1994, no. 4, pp. 65-78. DOI: 10.1080/10485259408832601
4. McKeague I.W., Utikal K.J. Inference for a nonlinear counting process regression model. *Annals of Statistics*, 1990, no. 18, pp. 1172-1187.
5. Van Keilegom I., Akritas M.G., Veraverbeke N. Estimation of the conditional distribution in regression with censored data: a comparative study. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2001, vol. 35, pp. 487-500. DOI: 10.1016/S0167-9473(00)00025-6
6. Akritas M.G. Nearest neighbor estimation of a bivariate distribution under random censoring. *Annals of Statistics*, 1994, no. 22, pp. 1299-1327.
7. Racine J.S. *Neparametricheskaya ekonometrika: vvodnyy kurs [Nonparametric econometrics: a primer]*. *Quantile*, 2008, no. 4, pp. 7-56.
8. Hardle W., Malyutov M.B. *Prikladnaya neparametricheskaya regressiya [Applied nonparametric regression]*. Moscow: Mir Publ., 1993. 349 p.
9. Gang L., Somnath D. A bootstrap approach to nonparametric regression for right censored data. *Technical report*, 1999, no. 99-8, pp. 6-10. DOI: 10.1023/A:1014644700806
10. Demin V.A., Chimitova E.V. Choice of optimal smoothing parameter for nonparametric estimation of regression reliability model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2013, vol.1(22), pp. 59-65. (In Russian).
11. Rousseeuw P.J., Verboven S. Robust estimation in very small samples. *Journal Computational Statistics & Data Analysis*, 2002, vol. 40(4), pp. 741-758. DOI: 10.1016/S0167-9473(02)00078-6
12. Koshkin G.M. *Osnovy strakhovoy matematiki [Basics of insurance mathematics]*. Tomsk: Tomsk State University Publ., 2002, p. 116.

А.М. Горцев, А.А. Калягин, Л.А. Нежелская

СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ ОБОБЩЕННОГО ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЁРТВОМ ВРЕМЕНИ

Изучается обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок в цифровых сетях интегрального обслуживания. Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени. Приводятся явные выражения плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов, учитывающие эффект непродлевающегося мертвого времени. Формулируются условия рекуррентности наблюдаемого потока событий.

Ключевые слова: обобщенный полусинхронный поток событий; непродлевающееся мертвое время; плотность вероятностей; совместная плотность вероятностей; рекуррентность потока событий.

В настоящей статье проводится дальнейшее исследование обобщенного полусинхронного потока событий, функционирующего в условиях непродлевающегося мёртвого времени, начатое в работах [1–5].

Обобщенный полусинхронный поток событий (далее поток) относится к классу дважды стохастических потоков и является одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦСИО) [6]. В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще не известны, либо (что ещё более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [7]; 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [8].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [9], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мёртвое). В качестве примера приведем CSMA/CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемого в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мёртвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

Для решения задачи оценивания (тем или иным статистическим методом) параметров потока в первую очередь необходимо знание вероятностных свойств потока. В настоящей работе находятся явные виды плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов, учитывающие эффект непродлевающегося мертвого времени.

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный полусинхронный поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен только в момент наступления события, при этом переход осуществляется с вероятностью p ($0 < p \leq 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Тогда длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_1(\tau) = 1 - e^{-p\lambda_1\tau}$. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое состояние может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ ($0 \leq \delta \leq 1$) дополнительное событие. При этом блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ (1-\delta)\alpha & -(\lambda_2 + \alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha & \lambda_2 \end{pmatrix} = \|D_0 | D_1\|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположенным знаком.

В сделанных предпосылках $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс. После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени T и т.д. Вариант возникающей ситуации показан на рис. 1, где 1, 2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, помечены буквой δ ; штриховка – периоды мертвого времени длительности T ; $t_1, t_2, \dots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

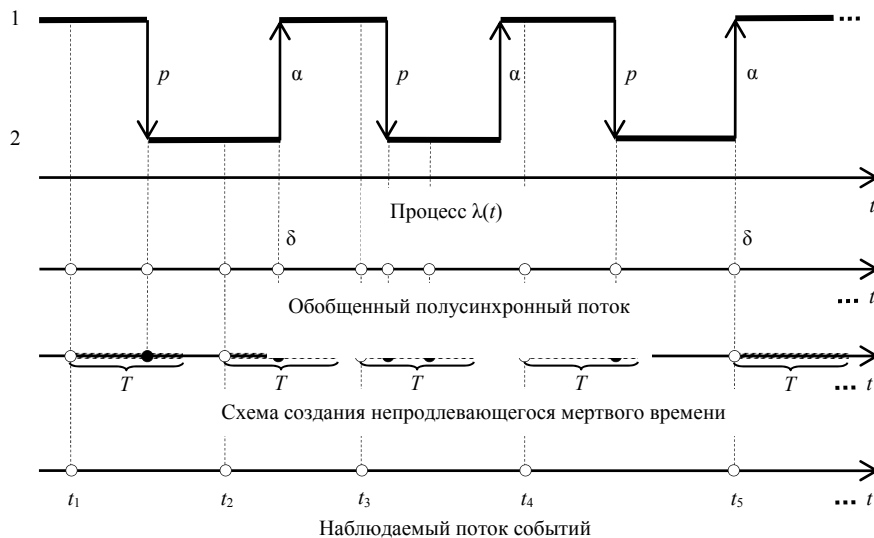


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Подчеркнем, что если $\delta = 0$, то имеет место обычный полусинхронный поток событий [10]. Отметим также, что в соответствии с классификацией МАР-потоков событий, приведенной в [11], обобщенный полусинхронный поток относится к классу МАР-потоков событий второго порядка.

Заметим, что в определении обобщенного полусинхронного потока событий в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса $\lambda(t)$ наступает дополнительное событие потока при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое. Данное обстоятельство при последующем выводе плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов является несущественным, так как наступление дополнительного события и переход процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое происходят мгновенно. В реальных ситуациях возможны два варианта, связанных с наступлением события и переходом процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое: 1) первично наступление события во втором состоянии процесса $\lambda(t)$, затем его переход из второго состояния в первое; 2) первичен переход процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, затем наступление события в первом состоянии. В силу этого при получении численных результатов путем имитационного моделирования наблюдаемого потока необходимо учитывать реальную ситуацию.

Процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только моменты наступления событий $t_1, t_2, \dots$ наблюдаемого потока. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ образует вложенную цепь Маркова, т.е. наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k (момента наступления события), $k = 1, 2, \dots$. Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k -го интервала $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент t_k без потери общности можно положить равным нулю, или, что то же самое, момент наступления события наблюдаемого потока есть $\tau = 0$. Пусть теперь (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала с соответствующими значениями длительностей $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$; их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно положить $k = 1$ и рассматривать соседние интервалы (t_1, t_2) , (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей: $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока; $\tau_2 = 0$ – моменту t_2 наступления следующего события наблюдаемого потока. Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

Задача заключается в нахождении явного вида $p_T(\tau)$ и явного вида $p_T(\tau_1, \tau_2)$, а также в установлении условий рекуррентности наблюдаемого потока событий и при $T = 0$ условий рекуррентности обобщенного полусинхронного потока событий.

2. Вывод плотности вероятностей $p_T(\tau)$

Рассмотрим интервал времени $(0, \tau)$ между соседними событиями в наблюдаемом потоке. С другой стороны, значение длительности этого интервала есть $\tau = T + t$, где t – значение длительности интервала между моментом окончания мертвого времени и следующим событием наблюдаемого потока ($t \geq 0$). Пусть $p_{jk}(t)$ – условная вероятность того, что на интервале $(0, t)$ нет событий наблюдаемого потока и $\lambda(t) = \lambda_k$ при условии, что в момент $t = 0$ имеет место $\lambda(0) = \lambda_j$, $j, k = 1, 2$. Отметим, что переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен только при наступлении события наблюдаемого потока, тогда $p_{12}(t) = 0$, $t \geq 0$. Аналогично обозначим $\tilde{p}_{jk}(t)$ – условная плотность вероятностей значений длительности интервала $(0, t)$ при условии, что $\lambda(0) = \lambda_j$, $\lambda(t) = \lambda_k$, $j, k = 1, 2$. Введем переходную вероятность $q_{ij}(T)$ – вероятность того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния i (момент времени $\tau = 0$) в состояние j (момент времени $\tau = T$), $i, j = 1, 2$, и веро-

ятность $\pi_i(0|T)$ – условная (финальная) вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии i ($i = 1, 2$) при условии, что в этот момент времени наступило событие наблюдаемого потока и наступило мертвое время длительности T . Тогда искомую плотность вероятностей $p_T(\tau)$ можно записать в виде

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau - T), & \tau \geq T. \end{cases} \quad (1)$$

Найдем явные выражения для $\tilde{p}_{jk}(\tau - T)$, $q_{ij}(T)$, $\pi_i(0|T)$, $i, j, k = 1, 2$.

В соответствии с определением обобщенного полусинхронного потока введем вероятность $p_{11}(t)\lambda_1\Delta t(1-p) + o(\Delta t)$ – совместная вероятность того, что без наступления событий наблюдаемого потока процесс $\lambda(t)$ перешел на интервале $(0, t)$, $t = \tau - T$, из первого состояния в первое и на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$, где Δt – здесь и далее достаточно малая величина, произошло событие пуассоновского потока интенсивности λ_1 и процесс $\lambda(t)$ остался в первом состоянии. Аналогичные совместные вероятности для различных j и k ($j, k = 1, 2$) примут вид

$$p_{11}(t)\lambda_1\Delta t p + o(\Delta t); \quad p_{21}(t)\lambda_1\Delta t(1-p) + o(\Delta t); \quad p_{21}(t)\lambda_1\Delta t p + o(\Delta t); \\ p_{22}(t)\lambda_2\Delta t + o(\Delta t); \quad p_{22}(t)\alpha\Delta t\delta + o(\Delta t).$$

Соответствующие введенным совместным вероятностям плотности вероятностей запишутся в виде

$$\tilde{p}_{11}(t) = (1-p)\lambda_1 p_{11}(t); \quad \tilde{p}_{12}(t) = p\lambda_1 p_{11}(t); \quad \tilde{p}_{21}^{(1)}(t) = \delta\alpha p_{22}(t); \quad \tilde{p}_{21}^{(2)}(t) = (1-p)\lambda_1 p_{21}(t); \\ \tilde{p}_{22}^{(1)}(t) = \lambda_2 p_{22}(t); \quad \tilde{p}_{22}^{(2)}(t) = p\lambda_1 p_{21}(t), \quad t \geq 0.$$

Тогда условные плотности вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t)$ того, что без наступления событий наблюдаемого потока на интервале $(0, t)$ и наступления события наблюдаемого потока в момент времени t процесс $\lambda(t)$ перейдет на этом интервале из состояния j в состояние k ($j, k = 1, 2$), запишутся для разных j и k в виде

$$\tilde{p}_{11}(t) = (1-p)\lambda_1 p_{11}(t); \quad \tilde{p}_{12}(t) = p\lambda_1 p_{11}(t); \quad \tilde{p}_{21}(t) = \delta\alpha p_{22}(t) + (1-p)\lambda_1 p_{21}(t); \\ \tilde{p}_{22}(t) = \lambda_2 p_{22}(t) + p\lambda_1 p_{21}(t), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Для вероятностей $p_{jk}(t)$ справедлива следующая система дифференциальных уравнений:

$$p'_{11}(t) = -\lambda_1 p_{11}(t); \quad p'_{22}(t) = -(\alpha + \lambda_2) p_{22}(t); \quad p'_{21}(t) = -\lambda_1 p_{21}(t) + (1-\delta)\alpha p_{22}(t), \quad t \geq 0,$$

с граничными условиями $p_{11}(0) = p_{22}(0) = 1$; $p_{21}(0) = 0$, решая которые находим

$$p_{11}(t) = e^{-\lambda_1 t}; \quad p_{22}(t) = e^{-(\alpha + \lambda_2)t}; \quad p_{21}(t) = \frac{(1-\delta)\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha} \left[e^{-(\alpha + \lambda_2)t} - e^{-\lambda_1 t} \right], \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha \neq 0$.

Подставляя (3) в (2), получаем явный вид плотностей вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$.

Для вероятностей $q_{ij}(\tau)$, $0 \leq \tau \leq T$, справедливы следующие системы дифференциальных уравнений:

$$q'_{11}(\tau) = -p\lambda_1 q_{11}(\tau) + \alpha q_{12}(\tau); \quad q'_{12}(\tau) = p\lambda_1 q_{11}(\tau) - \alpha q_{12}(\tau); \\ q'_{21}(\tau) = -p\lambda_1 q_{21}(\tau) + \alpha q_{22}(\tau); \quad q'_{22}(\tau) = p\lambda_1 q_{21}(\tau) - \alpha q_{22}(\tau),$$

с граничными условиями $q_{11}(0) = q_{22}(0) = 1$, $q_{12}(0) = q_{21}(0) = 0$, решая которые, находим (для $\tau = T$):

$$q_{11}(T) = \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}; \quad q_{12}(T) = \pi_2 - \pi_2 e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}; \\ q_{21}(T) = \pi_1 - \pi_1 e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}; \quad q_{22}(T) = \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \quad (4) \\ q_{11}(T) + q_{12}(T) = 1, \quad q_{21}(T) + q_{22}(T) = 1; \quad \pi_1 = \alpha / (\alpha + p\lambda_1), \quad \pi_2 = p\lambda_1 / (\alpha + p\lambda_1).$$

Перейдем к нахождению вероятностей $\pi_i(0|T)$, $i=1, 2$. Так как моменты наступления событий наблюдаемого потока образуют вложенную цепь Маркова, то для вероятностей $\pi_i(0|T)$ справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\pi_1(0|T) &= \pi_1(0|T)\pi_{11} + \pi_2(0|T)\pi_{21}; \quad \pi_2(0|T) = \pi_1(0|T)\pi_{12} + \pi_2(0|T)\pi_{22}, \\ \pi_1(0|T) + \pi_2(0|T) &= 1,\end{aligned}\tag{5}$$

где π_{ij} – переходная вероятность того, что за время, которое пройдет от момента времени $\tau = 0$ до наступления следующего события наблюдаемого потока, процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из i -го состояния в j -е ($i, j = 1, 2$).

Введем в рассмотрение вероятность p_{ij} – переходная вероятность того, что за время, которое пройдет от момента времени $t = 0$ (момента окончания мертвого времени) до момента наступления следующего события наблюдаемого потока, процесс $\lambda(t)$ перейдет из i -го состояния в j -е ($i, j = 1, 2$). Так как t – произвольный момент времени, то вероятности перехода p_{ij} определяются в виде

$$\begin{aligned}p_{11} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{11}(t)dt = (1-p)\lambda_1 \int_0^\infty p_{11}(t)dt, \quad p_{12} = \int_0^\infty \tilde{p}_{12}(t)dt = p\lambda_1 \int_0^\infty p_{11}(t)dt, \\ p_{21} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{21}(t)dt = (1-p)\lambda_1 \int_0^\infty p_{21}(t)dt + \delta\alpha \int_0^\infty p_{22}(t)dt, \\ p_{22} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{22}(t)dt = p\lambda_1 \int_0^\infty p_{21}(t)dt + \lambda_2 \int_0^\infty p_{22}(t)dt,\end{aligned}\tag{6}$$

где $\tilde{p}_{jk}(t)$ определены в (2), $p_{jk}(t)$ – в (3). Подставляя (3) в (6), находим

$$\begin{aligned}p_{11} &= 1-p, \quad p_{12} = p, \quad p_{21} = \frac{\alpha(1-p+p\delta)}{\alpha+\lambda_2}, \quad p_{22} = \frac{\lambda_2+p\alpha(1-\delta)}{\alpha+\lambda_2}, \\ p_{11} + p_{12} &= 1, \quad p_{21} + p_{22} = 1.\end{aligned}\tag{7}$$

В силу марковости процесса $\lambda(t)$ полученные переходные вероятности $q_{ij}(T)$ и p_{ij} , $i, j = 1, 2$, позволяют выписать выражения для переходных вероятностей π_{ij} :

$$\begin{aligned}\pi_{11} &= q_{11}(T)\pi_{11} + q_{12}(T)\pi_{21}, \quad \pi_{12} = q_{11}(T)\pi_{12} + q_{12}(T)\pi_{22}, \\ \pi_{21} &= q_{21}(T)\pi_{11} + q_{22}(T)\pi_{21}, \quad \pi_{22} = q_{21}(T)\pi_{12} + q_{22}(T)\pi_{22}.\end{aligned}\tag{8}$$

Подставляя в (8) сначала (4), затем (7), получаем

$$\begin{aligned}\pi_{11} &= 1-p - \frac{\pi_2}{\alpha+\lambda_2}[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}], \\ \pi_{12} &= p + \frac{\pi_2}{\alpha+\lambda_2}[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}], \\ \pi_{21} &= \frac{\alpha(1-p+p\delta)}{\alpha+\lambda_2} + \frac{\pi_1}{\alpha+\lambda_2}[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}], \\ \pi_{22} &= \frac{\lambda_2+p\alpha(1-\delta)}{\alpha+\lambda_2} - \frac{\pi_1}{\alpha+\lambda_2}[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}].\end{aligned}\tag{9}$$

Наконец, подставляя (9) в (5), находим

$$\begin{aligned}\pi_1(0|T) &= \frac{\alpha(1-p+p\delta) + \pi_1[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]}{\alpha + p(\lambda_2 + \delta\alpha) + [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]}, \\ \pi_2(0|T) &= \frac{p(\alpha+\lambda_2) + \pi_2[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]}{\alpha + p(\lambda_2 + \delta\alpha) + [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \delta\alpha)][1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}]},\end{aligned}\tag{10}$$

где π_1, π_2 определены в (4).

Подставляя в (1) сначала (2), затем (3), (4) и (10), проделывая при этом достаточно трудоемкие преобразования и учитывая, что $t = \tau - T$, получаем

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq T, \\ \gamma(T)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + [1-\gamma(T)](\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha+\lambda_2)(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (11)$$

$$\gamma(T) = 1 - \pi_2(T) \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha}, \quad \pi_2(T) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0|T)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}, \quad \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha \neq 0,$$

где π_2 определена в (4), $\pi_2(0|T)$ – в (10).

В частности, положив в (11) $T=0$, получаем формулу для $p_T(\tau)$, приведенную в [3].

3. Вывод совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$

Пусть $\tau_1 = T + t^{(1)}$, $\tau_2 = T + t^{(2)}$ – значения длительностей двух смежных интервалов между моментами наступления последовательных событий наблюдаемого потока. $\tau_1 = 0$ – момент наступления первого события, $\tau_2 = 0$ – момент наступления второго события. В силу того что последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока образует вложенную цепь Маркова, в обозначениях раздела 2 совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$ примет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau_1 \leq T, \quad 0 \leq \tau_2 \leq T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) \sum_{s=1}^2 q_{ks}(T) \sum_{n=1}^2 \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), & \\ \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \end{cases} \quad (12)$$

где $\tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) = \tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$, $\tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T) = \tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$ определены в (2), при этом в выражениях для $\tilde{p}_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, нужно произвести замену t на $t^{(1)}$ либо на $t^{(2)}$. Тогда, подставляя в (12) сначала $\tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$, $\tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$, затем $p_{jk}(t^{(1)})$, $p_{sn}(t^{(2)})$, определенные в (3) для $t = t^{(1)}$ и $t = t^{(2)}$, затем $q_{ij}(T)$, $q_{ks}(T)$, определенные в (4), и, наконец, $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$, определенные в (10), и проделывая достаточно трудоемкие преобразования, находим

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0; \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \gamma(T)[1-\gamma(T)] \frac{\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)}{\alpha + \lambda_2} \times$$

$$\times \left[\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_1-T)} - (\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha+\lambda_2)(\tau_1-T)} \right] \left[\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_2-T)} - (\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha+\lambda_2)(\tau_2-T)} \right], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \quad (13)$$

где $\gamma(T)$, $p_T(\tau_k)$ определены в (11) для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$.

Из (13) следует, что обобщенный полусинхронный поток, функционирующий в условиях мертвого времени, в общем случае является коррелированным потоком. Положив в (13) $T = 0$, получаем формулу для $p(\tau_1, \tau_2)$, приведенную в [3].

Нетрудно получить вероятностные характеристики наблюдаемого потока, такие как математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями, дисперсию и ковариацию:

$$M_\tau = T + \frac{\gamma(T)}{\lambda_1} + \frac{1-\gamma(T)}{\alpha + \lambda_2}, \quad D_\tau = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{(\alpha + \lambda_2)^2} - \left[\frac{1}{\lambda_1(\alpha + \lambda_2)} \right]^2 [\lambda_1 - (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)\pi_2(T)]^2,$$

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \gamma(T)[1-\gamma(T)](\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)^2 \frac{\lambda_2 - (\lambda_2 + \alpha\delta)p}{\lambda_1^2(\alpha + \lambda_2)^3} e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}.$$

В рассматриваемом потоке присутствуют события трех типов: 1) события пуассоновского потока интенсивности λ_1 ; 2) события пуассоновского потока интенсивности λ_2 ; 3) дополнительные события. Типы событий являются неразличимыми. Введем вероятность: $q_1^{(i)}(T)$ – стационарная вероят-

ность того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности λ_i и процесс $\lambda(t)$ перешел при этом из первого состояния в i -е ($i=1, 2$); $q_2(T)$ – стационарная вероятность того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности λ_2 ; $q_3(T)$ – стационарная вероятность того, что наступившее событие есть дополнительное событие. Тогда, используя вышеприведенные результаты, нетрудно получить явные выражения для введенных вероятностей:

$$\begin{aligned} q_1^{(1)}(T) &= (1-p)\pi_1 \frac{\alpha + \lambda_2 + p\lambda_1(1-\delta) - (\lambda_2 - p\lambda_1\delta)e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}{\alpha + \lambda_2 - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}, \\ q_1^{(2)}(T) &= p\pi_1 \frac{\alpha + \lambda_2 + p\lambda_1(1-\delta) - (\lambda_2 - p\lambda_1\delta)e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}{\alpha + \lambda_2 - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}, \\ q_2(T) &= \frac{p\lambda_2 \left\{ \lambda_1 + [\alpha - \lambda_1(1-p)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \right\}}{(\alpha + p\lambda_1) \left\{ \alpha + \lambda_2 - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \right\}}, \\ q_3(T) &= \pi_1 \frac{p\lambda_1\delta + p\delta(\alpha - \lambda_1 + p\lambda_1)e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}{\alpha + \lambda_2 - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда стационарная вероятность $q_1(T)$ того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности λ_1 , запишется в виде

$$q_1(T) = q_1^{(1)}(T) + q_1^{(2)}(T) = \pi_1 \frac{\alpha + \lambda_2 + p\lambda_1(1-\delta) - (\lambda_2 - p\lambda_1\delta)e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}{\alpha + \lambda_2 - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T}}. \quad (15)$$

Отметим, что $\pi_1(0|T) = q_1^{(1)}(T) + q_3(T)$, $\pi_2(0|T) = q_1^{(2)}(T) + q_2(T)$. Полагая в (14), (15) величину $T = 0$, получаем формулы для q_1 , q_2 , q_3 , приведенные в [3].

4. Условия рекуррентности наблюдаемого потока событий

Рассмотрим частные случаи, при которых обобщенный полусинхронный поток, функционирующий в условиях мертвого времени, становится рекуррентным потоком. Используя выражения (11) для $\gamma(T)$, $\pi_2(T)$ и выражение (10) для $\pi_1(0|T)$, $\pi_2(0|T)$, можно показать, что

$$\begin{aligned} \gamma(T)[1 - \gamma(T)] &= \frac{p\alpha(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1(1-p + \delta p) - \lambda_2 - \alpha](\alpha + \lambda_2)}{(\alpha + p\lambda_1)^2(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)^2 \left\{ \alpha + \lambda_2 - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \right\}^2} \times \\ &\times \{ \lambda_1(\alpha + \lambda_2) - [2\lambda_1(\alpha + \lambda_2) - (\alpha + p\lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha)]e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} + \\ &+ [\lambda_1(\alpha + \lambda_2) - (\alpha + p\lambda_1)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2)]e^{-2(\alpha+p\lambda_1)T} \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Предварительно отметим, что выражение в фигурных скобках формулы (16), обозначим его $f(T)$, после преобразования примет вид

$$\begin{aligned} f(T) &= \lambda_1(\alpha + \lambda_2) \left[1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \right]^2 + \\ &+ (\alpha + p\lambda_1) [\lambda_1(1-p) + \lambda_2] e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \left[1 - e^{-(\alpha+p\lambda_1)T} \right] + (\alpha + p\lambda_1)^2 e^{-2(\alpha+p\lambda_1)T}, \end{aligned}$$

так что для любых $T \geq 0$ имеем $f(T) > 0$.

Из (16) вытекает:

1) если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$, то совместная плотность (13) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$, $\tau_1 \geq T$, $\tau_2 \geq T$; при этом из (11) следует $\gamma(T) = 1$, и тогда $p_T(\tau_k) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_k - T)}$, $\tau_k \geq T$, $k = 1, 2$, т.е. $p_T(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau - T)}$, $\tau \geq T$;

2) если $\lambda_1(1 - p + p\delta) - \lambda_2 - \alpha = 0$, то совместная плотность (13) факторизуется; при этом из (11) следует $\gamma(T) = 0$, и тогда $p_T(\tau_k) = (\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau_k - T)}$, $\tau_k \geq T$, $k = 1, 2$, т.е. $p_T(\tau) = (\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau - T)}$, $\tau \geq T$.

Из (13) следует третье условие факторизации совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$: $\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta) = 0$. Тогда $p_T(\tau)$ определяется формулой (11), в которой

$$\pi_2(0|T) = p, \quad \pi_2(T) = p \left\{ \frac{\lambda_1}{\alpha + p\lambda_1} + \left[1 - \frac{\lambda_1}{\alpha + p\lambda_1} \right] e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} \right\},$$

$$\gamma(T) = 1 - \frac{p}{\alpha + \lambda_1} \left[\lambda_1 - (\lambda_1 - \alpha - p\lambda_1)e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} \right] \frac{\lambda_1(1 - p) - \alpha\delta}{(1 - p)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)}, \quad \alpha + \lambda_2 = \frac{\alpha(1 - p + \delta p)}{1 - p}, \quad p \neq 1.$$

Для $p = 1$ из третьего условия факторизации вытекает, что $\delta = 0$. Тогда $p_T(\tau)$ определяется формулой (11), в которой

$$\pi_2(0|T) = 1; \quad \pi_2(T) = \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha + \lambda_1)T},$$

$$\gamma(T) = 1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha} \left[\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha + \lambda_1)T} \right], \quad \pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda_1}, \quad \pi_2 = \frac{\lambda_1}{\alpha + \lambda_1}.$$

Поскольку последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ есть вложенная цепь Маркова, то при выполнении одного из вышеприведенных условий факторизации (либо их комбинации) нетрудно показать, что факторизуется и совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \dots, \tau_k)$ для любого k . Последнее означает, что для этих ситуаций наблюдаемый поток является рекуррентным потоком.

Отметим, что условия факторизации для случая $T = 0$ [3] и $T \neq 0$ идентичны.

Если связать изложенные здесь результаты для рекуррентных обобщенных полусинхронных потоков событий, функционирующих в условиях мертвого времени, с результатами для апостериорных вероятностей состояний процесса $\lambda(t)$, приведенных в [2], то получим точно такие же выводы относительно близости наблюдаемого рекуррентного потока к пуассоновскому потоку, что и в [3].

5. Особый случай

Рассмотрим особый случай, когда в выражении (11) для $\gamma(T)$ реализуется деление на ноль: $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha = 0)$. Можно показать (проделывая выкладки, аналогичные выкладкам в разделах 2 и 3), что

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0; & 0 \leq \tau \leq T, \\ \left[\lambda_1 - \alpha(1 - \delta)\pi_2(T)(1 - \lambda_1(\tau - T)) \right] e^{-\lambda_1(\tau - T)}, & \tau \geq T; \end{cases} \quad (17)$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} \lambda_1 [\alpha(1 - \delta)]^2 [\alpha(1 - p + p\delta) - \lambda_1(1 - p)] \times$$

$$\times \left[\frac{\pi_2 + (p - \pi_2)e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}}{\lambda_1 + [\alpha(1 - p + p\delta) - \lambda_1(1 - p)]e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}} \right]^2 [1 - \lambda_1(\tau_1 - T)][1 - \lambda_1(\tau_2 - T)] \times$$

$$\times e^{-\lambda_1(\tau_1 + \tau_2 - 2T)}, \quad \tau_i \geq T, \quad i = 1, 2; \quad (18)$$

$$\pi_2(T) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0|T)]e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \quad \pi_2 = p\lambda_1 / (\alpha + p\lambda_1),$$

$$\pi_2(0|T) = \frac{p\lambda_1 - \pi_2 [\alpha(1 - p + p\delta) - \lambda_1(1 - p)] [1 - e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}]}{\lambda_1 + [\alpha(1 - p + p\delta) - \lambda_1(1 - p)]e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}}.$$

В (18) $p_T(\tau_1)$, $p_T(\tau_2)$ определены формулой (17) для $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$. В частности, положив в (18) $T = 0$, получаем для этого особого случая формулы $p_T(\tau)$, $p_T(\tau_1, \tau_2)$, приведенные в [3].

Из (18) следует, что при $\delta = 1$ (первое условие факторизации) наблюдаемый поток становится рекуррентным. Тогда $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$, $\tau_1 \geq T$, $\tau_2 \geq T$, и $p_T(\tau_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i(\tau_i - T)}$, $\tau_i \geq T$, $i = 1, 2$, т.е. $p_T(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau - T)}$, $\tau \geq T$.

Для второго условия факторизации $\lambda_1(1 - p + p\delta) - \lambda_1(1 - p) = 0$, $p \neq 1$, вытекающего из (18), плотность вероятностей $p_T(\tau)$ определяется формулой (17), в которой $\pi_2(0|T) = p$.

Для $p = 1$ из второго условия факторизации вытекает, что $\delta = 0$. Тогда $p_T(\tau)$ определяется формулой (17), в которой $\delta = 0$, $\pi_2(T) = [\lambda_1 + \alpha e^{-(\alpha + \lambda_1)T}] / (\alpha + \lambda_2)$.

Отметим, что условия факторизации для ситуации $T = 0$ [3] и ситуации $T \neq 0$ идентичны.

Связав изложенные в особом случае результаты для рекуррентных обобщенных полусинхронных потоков событий, функционирующих в условиях мертвого времени, с результатами для апостериорных вероятностей состояний процесса $\lambda(t)$, приведенных в [2] для особого случая, получим точно такие же выводы относительно близости наблюдаемого рекуррентного потока к пуассоновскому потоку, что и в [3].

Заключение

Приведенные результаты делают возможным решение задачи оценки неизвестных параметров, задающих обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, по наблюдениям за моментами наступления событий. Рабочими методами оценки параметров при этом могут быть либо метод максимального правдоподобия, либо метод моментов [12]. Полученные явные формулы для плотностей вероятностей $p_T(\tau)$ и $p_T(\tau_1, \tau_2)$ позволяют выписать в явном виде либо функцию правдоподобия, либо уравнения моментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
2. Горцев А.М., Калягин А.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4(13). С. 50–60.
3. Горцев А.М., Калягин А.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2(19). С. 80–87.
4. Калягин А.А. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями обобщенного полусинхронного потока при непродлевающемся мертвом времени // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Девятой Рос. конф. с междунар. участием. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. С. 89.
5. Горцев А.М., Калягин А.А. Условия рекуррентности обобщенного полусинхронного потока событий // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Девятой Рос. конф. с междунар. участием. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. С. 84.
6. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. С. 175.
7. Bushlanov I.V., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events // Automation and Remote Control. V. 65. Is. 9. 2004. P. 1389–1399.
8. Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. Parameter estimation of a doubly stochastic flow of events under incomplete observability // Automation and Remote Control. 2003. V. 64. Is. 12. P. 1890–1898.
9. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 254 с.

10. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
11. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-поток и МАР-поток событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
12. Шуленов В.П. Математическая статистика. Томск: Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. С. 540.

Горцев Александр Михайлович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: dekanat@fpmk.tsu.ru

Калягин Алексей Андреевич. E-mail: redall@inbox.ru

Нежелская Людмила Алексеевна, канд. техн. наук, доцент. E-mail: dekanat@fpmk.tsu.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 5 февраля 2014 г.

Gortsev Alexander M., Kalyagin Aleksey A., Nezhelskaya Lyudmila A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time.

Keywords: generalized semisynchronous flow of events; probability density; joint probability density; recurrence of the event flow; unprolonging dead time.

Generalized semisynchronous stream of events which intensity is a piecewise constant stochastic process $\lambda(t)$ with two values λ_1 and λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) is considered. During the time interval when $\lambda(t) = \lambda_i$, Poisson flow of events takes place with the intensity λ_i , $i = 1, 2$. Transition from the first state of the process $\lambda(t)$ into the second is possible only at the moment of event occurrence, thus, the transition is carried out with probability p ($0 < p \leq 1$); with probability $1 - p$ process $\lambda(t)$ remains in the first condition. In this case the duration of process stay $\lambda(t)$ in the first state is a random variable with exponential distribution function $F_1(\tau) = 1 - e^{-p\lambda_1\tau}$. Transition from the second state of process into the first state can be carried out at any moment of time. Thus, duration of process stay $\lambda(t)$ in the second state is distributed according exponential law: $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$. By transition $\lambda(t)$ from the second state into the first one an additional event in the first state is initiated with probability δ ($0 \leq \delta \leq 1$).

The flow is considered in the condition of constant dead time. The dead time period of the fixed duration T begins after every registered event at time t_i . During this period no other events are observed. When the dead time period is over, the first coming event causes the next T -interval of dead time and so on (unprolonging dead time).

We solve the problem of finding the explicit form of probability density $p_T(\tau)$ of the interval between two events and the joint probability density $p_T(\tau_1, \tau_2)$ of the length of two adjacent intervals with unprolonging dead time:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq T, \\ \gamma(T)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + [1 - \gamma(T)](\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases}$$

$$\gamma(T) = 1 - \pi_2(T) \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - \delta\alpha}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha}, \quad \pi_2(T) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0|T)]e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \quad \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha \neq 0.$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0; \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} \gamma(T) [1 - \gamma(T)] \frac{\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)}{\alpha + \lambda_2} \times$$

$$\times [\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_1-T)} - (\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau_1-T)}] [\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_2-T)} - (\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau_2-T)}], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T,$$

The conditions for the recurrence of generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time are given.

REFERENCES

1. Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhelskaya L.A. Optimum estimation of states in generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 2(11), pp. 66-81. (In Russian).
2. Gortsev A.M., Kalyagin A.A. Optimum estimation of conditions of generalized semisynchronous stream of events in the conditions of non-extended dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 4(13), pp. 50-60. (In Russian).
3. Gortsev A.M., Kalyagin A.A. The joint probability density of the duration of the intervals of a generalized semi-synchronous stream. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2012, no. 2(19), pp. 80-87. (In Russian).
4. Kalyagin A.A. [The probability density of duration of the intervals between neighboring events a generalized semisynchronous flow with unprolonging dead time]. *Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur : materialy Devyatyoy*

- Rossiyskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [New information technologies in research of complicated structures. Proc. of the 9th Russian conference with international participation]. Tomsk: NTL Publ., 2012, p. 89. (In Russian).
5. Gortsev A.M., Kalyagin A.A. [The recurrence conditions of a generalized semisynchronous flow of events]. *Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur : materialy Devyatoy Rossiyskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [New information technologies in research of complicated structures. Proc. of the 9th Russian conference with international participation]. Tomsk: NTL Publ., 2012, p. 84. (In Russian).
 6. Dudin A.N., Klimenok V.I. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BSU Publ., 2000. 175 p.
 7. Bushlanov I.V., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, pp. 1389-1399. DOI: 10.1023/B:AURC.0000041418.09187.63
 8. Vasileva L.A., Gortsev A.M. Parameter estimation of a doubly stochastic flow of events under incomplete observability. *Automation and Remote Control*, 2003, vol. 64, issue 12, pp. 1890-1898.
 9. Apanasovich V.V., Kolyada A.A., Chernyavsky A.F. *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [Statistical analysis of stochastic flows in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe Publ., 1988. 254 p.
 10. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*, 2003, vol. 46, no. 6, pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
 11. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. On relationship of MC- flows and MAP- flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2011, no. 1(14), pp. 13-21. (In Russian).
 12. Shulenin V.P. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Tomsk: NTL Publ., 2011. Pt. 1, 540 p.

Д.В. Иванов

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ARX-СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОМЕХОЙ НАБЛЮДЕНИЯ ВО ВХОДНОМ СИГНАЛЕ

Предложен критерий для оценивания параметров линейных ARX-систем с помехой наблюдения во входном сигнале. Доказана сильная состоятельность получаемых оценок параметров при помехах класса мартингал-разность. Для получения сильно состоятельных оценок не требуется знания законов распределения помех.

Ключевые слова: помеха наблюдения; разность дробного порядка; метод наименьших квадратов.

В последнее время модели на основе дифференциальных и разностных уравнений дробного порядка находят применение во многих приложениях: теория вязкоупругости, теория хаоса, фракталы, для описания диэлектрических материалов, электрохимических процессов, трафика в компьютерных сетях.

Модели ошибки уравнения (ARX-модели) [1] – наиболее распространенный вид моделей параметризации шума. Идентификация моделей ошибки уравнения сводится к классической задаче регрессионного анализа и может быть решена методом наименьших квадратов. Однако во многих практических задачах помеха содержится также и во входном сигнале, в этом случае классический метод наименьших квадратов не позволяет получать состоятельные оценки.

В настоящее время активно развиваются методы нелинейного оценивания параметров динамических систем [2, 3]. Для динамических систем дробного порядка с различными моделями шума разработаны методы для оценивания параметров [4–8].

В статье [9] предложен рекуррентный алгоритм оценивания параметров билинейных ARX систем с помехой во входном сигнале на основе стохастической аппроксимации.

В данной статье разработан критерий для оценивания параметров линейных ARX дробного порядка с помехой во входном сигнале и доказана сильная состоятельность получаемых оценок.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную ARX-систему дробного порядка, описываемую следующими стохастическими уравнениями с дискретным временем $i = \dots -1, 0, 1, \dots$:

$$z_i = \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i + \zeta_i, \quad w_i = x_i + \zeta_i, \quad (1)$$

где

$$0 < \alpha_1 \dots < \alpha_r, \quad 0 < \beta_1 \dots < \beta_{r_1}, \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_m}{j} z_{i-j},$$

$$\Delta^{\beta_m} x_i = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_m}{j} x_{i-j}, \quad \binom{\alpha_m}{j} = \frac{\Gamma(\alpha_m + 1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m - j + 1)}, \quad \binom{\beta_m}{j} = \frac{\Gamma(\beta_m + 1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta_m - j + 1)}.$$

z_i – наблюдаемая выходная переменная; x_i, w_i – ненаблюдаемая и наблюдаемая переменная входные переменные; ζ_i – помеха наблюдения во входных сигналах; ξ_i – ошибка в уравнении.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Множество $\tilde{B}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой динамической системы, является компактом.

2. Случайные процессы $\{\xi_i\}, \{\zeta_i\}$ являются мартингал-разностями и удовлетворяют следующим условиям: $E(\xi_{i+1} / F_\xi^{(i)}) = 0, E(\zeta_{i+1} / F_\zeta^{(i)}) = 0$ п.н., $E(\xi_{i+1}^2 / F_\xi^{(i)}) < \infty, E(\zeta_{i+1}^2 / F_\zeta^{(i)}) < \infty$ п.н. $E(\xi_i^4) < \infty, E(\zeta_i^4) < \infty, E(\xi_i^2) < \infty, E(\zeta_i^2) < \infty$, где $F_\xi^{(i)}, F_\zeta^{(i)} - \sigma$ – алгебры, индуцированные семействами непрерывных случайных величин $\{\xi(t), \zeta(t), t \in T_i\}, T_i = \{t; t \leq i, t \in Z_c - \text{множество целых чисел}\}$.

3. Входной сигнал x_i является случайным процессом с $E(x_i) = 0, E(x_i^2) = \sigma_x^2 < \infty$, и истинные значения параметров b_0, a_0 удовлетворяют условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\begin{pmatrix} (\varphi_z^{(i)})^T \\ (\varphi_x^{(i)})^T \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} (\varphi_z^{(i)})^T \\ (\varphi_x^{(i)})^T \end{pmatrix} = H \text{ п.н.,}$$

где

$$\varphi_z^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_1 \\ j \end{pmatrix} z_{i-j-1}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_{r_1} \\ j \end{pmatrix} z_{i-j-1} \right)^T, \quad \varphi_x^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_1 \\ j \end{pmatrix} x_{i-j}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_{r_1} \\ j \end{pmatrix} x_{i-j} \right)^T,$$

причем H существует, ограничена и положительно определена.

4. $\{x_i\}$ статистически не зависит от $\{\xi_i\}, \{\zeta_i\}$.

Требуется определять оценки неизвестных коэффициентов динамической системы, описываемой уравнением (1), по наблюдаемым последовательностям z_i, w_i при известных порядках $r, r_1, \alpha_m, \beta_m$.

2. Критерий для оценивания параметров

Система может быть записана как линейная регрессия

$$y_i = \varphi_i^T \theta_0 + \varepsilon_i, \quad (2)$$

где

$$\varphi_i = \left(\begin{pmatrix} (\varphi_z^{(i)})^T \\ (\varphi_w^{(i)})^T \end{pmatrix} \right)^T, \quad \varphi_w^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_1 \\ j \end{pmatrix} w_{i-j}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_{r_1} \\ j \end{pmatrix} w_{i-j} \right)^T, \quad \theta_0 = \begin{pmatrix} b_0^T \\ a_0^T \end{pmatrix}^T,$$

$$b_0 = \begin{pmatrix} b_0^{(1)} \\ \dots \\ b_0^{(r)} \end{pmatrix}^T, \quad a_0 = \begin{pmatrix} a_0^{(1)} \\ \dots \\ a_0^{(r_1)} \end{pmatrix}^T, \quad \varepsilon_i = \xi_i - \sum_{k=1}^d a_0^T \varphi_\zeta^{(i)},$$

$$\varphi_\zeta^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_1 \\ j \end{pmatrix} \zeta_{i-j}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_{r_1} \\ j \end{pmatrix} \zeta_{i-j} \right)^T.$$

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1–3, тогда математическое ожидание ε_i равно нулю $E(\varepsilon_i) = 0$.

Доказательство. Из предположения, что $\{\xi_i\}, \{\zeta_i\}$ – мартингал-разности, следует, что $E(\xi_i) = 0, E(\zeta_i) = 0$, тогда, используя предположение 3, можно показать

$$E(\varepsilon_i) = E\left(\xi_i - a_0^T \varphi_\zeta^{(i)}\right) = E(\xi_i) - \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} E(\zeta_{i-j}) = 0.$$

Лемма 2. Пусть выполняются условия 1–3, тогда средняя дисперсия обобщенной ошибки равна

$$\overline{\sigma}_\varepsilon^2 = \overline{\sigma}_\xi^2 + a_0^T H'_\zeta a_0 = \omega(a_0),$$

где

$$\overline{\sigma}_\xi^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \xi_i^2, \quad H'_\zeta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E \left[\sum_{i=1}^N \varphi_\zeta^{(i)} (\varphi_\zeta^{(i)})^T \right] = \begin{pmatrix} h'_\zeta^{(11)} & \dots & h'_\zeta^{(r_1 \ 1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h'_\zeta^{(1 \ r_1)} & \dots & h'_\zeta^{(r_1 \ r_1)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} h'_\zeta^{(mn)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_m}{j} \zeta_{i-j} \cdot \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_n}{j} \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} \binom{\beta_m}{j} \binom{\beta_n}{j} \sigma_\zeta^2(i-j), \quad m = \overline{1, r_1}, \quad n = \overline{1, r_1}. \end{aligned}$$

Доказательство. По определению средней дисперсии

$$\overline{\sigma}_\varepsilon^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i))^2,$$

так как согласно Лемме 1 $E(\varepsilon_i) = 0$, то

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_\varepsilon^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\varepsilon_i)^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\xi_i - a_0^T \varphi_\zeta^{(i)})^2 = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\xi_i^2 + a_0^T \varphi_\zeta^{(i)} (\varphi_\zeta^{(i)})^T a_0 - 2\xi_i a_0^T \varphi_\zeta^{(i)}). \end{aligned}$$

Используя лемму 1.1 [10] для случайного процесса ξ_i , а также условия 3, 4 получаем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\xi_i^2 + a_0^T \varphi_\zeta^{(i)} (\varphi_\zeta^{(i)})^T a_0) = \overline{\sigma}_\xi^2 + a_0^T H'_\zeta a_0.$$

Применяя лемму 2 [11] для случайных процессов, получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(-2\xi_i a_0^T \varphi_\zeta^{(i)}) = 0.$$

Так как ряд из коэффициентов $\binom{\beta_m}{j}$ сходится абсолютно [12. С. 279]: $\sum_{j=0}^{\infty} \left| \binom{\beta_m}{j} \right| < \infty$, применяя

теорему Мертенса [13. С. 328], можно показать, что ряд сходится:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^i \binom{\beta_m}{j} \binom{\beta_n}{j} \sigma_\zeta^2(i-j) < \infty.$$

Тогда определим оценку $\hat{\theta}(N)$ неизвестных параметров θ из условия минимума суммы взвешенных квадратов обобщённых ошибок $(\varepsilon_i(a, i))^2$ с весом $\omega(a)$, т.е.

$$\min_{\theta \in B} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \phi_i^T \theta)^2}{\overline{\sigma}_\xi^2 + a^T H'_\zeta a} = \min_{\theta \in B} \frac{U_N(b, a)}{\omega(a)}, \quad (3)$$

где

$$H_\zeta = \begin{pmatrix} h_\zeta^{(11)} & \dots & h_\zeta^{(r_1-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\zeta^{(1r_1)} & \dots & h_\zeta^{(r_1 r_1)} \end{pmatrix}, \quad h_\zeta^{(mn)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_m}{j} \zeta_{i-j} \cdot \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_n}{j} \zeta_{i-j} \right) =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} \binom{\beta_m}{j} \binom{\beta_n}{j} \zeta_{i-j}^2, \quad m = \overline{1, r_1}, \quad n = \overline{1, r_1}.$$

Так как согласно лемме 1.1 [10] $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=i_0}^N \zeta_i^2 = \overline{\sigma}_\zeta^2$, то, применяя теорему Мертенса [13. С. 328],

можно показать $h_\zeta^{(mn)} < \infty$.

Теорема. Пусть некоторый случайный процесс $\{y_i, i = \dots -1, 0, 1, \dots\}$ описывается уравнением (1) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1–4. Тогда оценка $\hat{\theta}(N)$, определяемая выражением (3) с вероятностью 1 при $N \rightarrow \infty$, существует единственная и является сильно состоятельной, т.е.

$$\hat{\theta}(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \theta_0.$$

Доказательство. Определим

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} U_N(b, a^{(1)}, \dots, a^{(d)}) &= N^{-1} \sum_{i=1}^N \left(z_i + \xi_i - (\varphi_z^{(i)})^T b - (\varphi_x^{(i)} + \varphi_\zeta^{(i)})^T a \right)^2 = \\ &= N^{-1} \sum_{i=1}^N \left(\xi_i + (\varphi_z^{(i)})^T b_0 + (\varphi_x^{(i)})^T a_0 - (\varphi_z^{(i)})^T b - (\varphi_x^{(i)} + \varphi_\zeta^{(i)})^T a \right)^2 = \\ &= N^{-1} \sum_{i=1}^N \left(\xi_i - (\varphi_z^{(i)})^T \tilde{b} - (\varphi_x^{(i)})^T \tilde{a} - (\varphi_\zeta^{(i)})^T a \right)^2 = v_1 + v_2 + v_3; \\ v_1 &= N^{-1} \sum_{i=1}^N \left(\xi_i^2 + \sum_{k=1}^d (a^{(k)})^T \varphi_\zeta^{(ik)} (\varphi_\zeta^{(ik)})^T a^{(k)} \right), \\ v_2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\theta}^T \left((\varphi_z^{(i)})^T \parallel (\varphi_x^{(i)})^T \right)^T \left((\varphi_z^{(i)})^T \parallel (\varphi_x^{(i)})^T \right) \tilde{\theta}, \\ v_3 &= 2N^{-1} \sum_{i=1}^N \left(-\xi_i (\varphi_z^{(i)})^T \tilde{b} - \xi_i (\varphi_x^{(i)})^T \tilde{a} - \xi_i (\varphi_\zeta^{(i)})^T a + a_0^T \varphi_\zeta^{(i)} (\varphi_z^{(i)})^T \tilde{b} + a_0^T \varphi_\zeta^{(i)} (\varphi_x^{(i)})^T \tilde{a} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\tilde{b} = b - b_0$, $\tilde{a} = a - a_0$, $\tilde{\theta} = \theta - \theta_0$.

Применив лемму [10] для случайных процессов, получаем, что

$$v_1 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \overline{\sigma}_\xi^2 + a^T H_\zeta a,$$

так как из 3

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left((\varphi_z^{(i)})^T \parallel (\varphi_x^{(i)})^T \right)^T \left((\varphi_z^{(i)})^T \parallel (\varphi_x^{(i)})^T \right) = H \quad \text{п.н.},$$

то $v_2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \tilde{\theta}^T H \tilde{\theta}$.

Первые два слагаемых в сумме v_3 в силу условий 2, 3, 4 удовлетворяют условиям леммы 2 [11] и, следовательно,

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \xi_i \left(\varphi_x^{(i)} \right)^T \tilde{a} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \text{ п.н.}, \quad \forall \theta \in \tilde{B}.$$

Заметим, что

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N a_0^T \varphi_\zeta^{(i)} \left(\varphi_x^{(i)} \right)^T \tilde{a} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_0^T H_{\zeta x} \tilde{a},$$

$$H_{\zeta x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E \left[\sum_{i=1}^N \varphi_\zeta^{(i)} \left(\varphi_x^{(i)} \right)^T \right] = \begin{pmatrix} h_{\zeta x}^{(11)} & h_{\zeta x}^{(21)} & \dots & h_{\zeta x}^{(r_1 1)} \\ h_{\zeta x}^{(21)} & h_{\zeta x}^{(22)} & \dots & h_{\zeta x}^{(r_1 2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\zeta x}^{(1r_1)} & h_{\zeta x}^{(2r_1)} & \dots & h_{\zeta x}^{(r_1 r_1)} \end{pmatrix},$$

таким образом, (4) можно представить в виде конечного числа слагаемых, каждое из которых в силу предположений 2–3 по лемме 2 [11] сходится к нулю.

Можно доказать, что и все остальные слагаемые в v_3 сходятся к нулю с вероятностью 1 при $N \rightarrow \infty$.

Таким образом, имеем: $v_3 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$,

Окончательно имеем

$$N^{-1} U_N(b, a) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \bar{\sigma}_\xi^2 + \tilde{\theta}^T H \tilde{\theta} + a^T H_\zeta a \equiv \bar{U}(b, a). \quad (5)$$

Покажем, что решение задачи

$$\min \omega^{-1}(a) \bar{U}(b, a), \quad \theta \in \tilde{B} \quad (6)$$

существует и достигается в единственной точке $\theta = \theta_0$, т.е.

$$\min_{\theta \in \tilde{B}} \omega^{-1}(a) \bar{U}(b, a) = \frac{\bar{U}(b_0, a_0)}{\omega(a_0)}. \quad (7)$$

Для этого вместе с критерием (3) рассмотрим функцию

$$V(b, a, \lambda) = \bar{U}(b, a) - \lambda \omega(a), \quad (8)$$

$$V(\lambda) = \min_{\theta \in \tilde{B}} V(b, a, \lambda).$$

Тогда (8) равно

$$V(b, a, \lambda) = \bar{\sigma}_\xi^2 + \left(\frac{b_0}{a_0} \right)^T H \left(\frac{b_0}{a_0} \right) - \lambda \bar{\sigma}_\xi^2 - 2 \left(\frac{b_0}{a_0} \right)^T H \left(\frac{b}{a} \right) +$$

$$+ \left(\frac{b}{a} \right)^T \left(\begin{array}{c|c} H_{zz} & H_{zx} \\ \hline (H_{zx})^T & H_{ww} - \lambda H_\zeta \end{array} \right) \left(\frac{b}{a} \right),$$

где $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_w^{(i)} \left(\varphi_w^{(i)} \right)^T = H_{ww}$.

Дифференцируя $V(b, a, \lambda)$ по b, a и приравнявая производные к нулю, находим

$$\left(\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \right) = \left(\begin{array}{c|c} H_{zz} & H_{zx} \\ \hline (H_{zx})^T & H_{ww} - \lambda H_\zeta \end{array} \right)^{-1} H \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \quad (9)$$

и тогда

$$V(\lambda) = \bar{\sigma}_\xi^2 + \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^T H \left(\frac{b_0}{a_0}\right) - \lambda \bar{\sigma}_\xi - \left(H \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \right)^T \left(\begin{array}{c|c} H_{zz} & H_{zx} \\ \hline (H_{zx})^T & H_{ww} - \lambda H_\zeta \end{array} \right)^{-1} H \left(\frac{b_0}{a_0}\right),$$

функция $V(\lambda)$ на интервале $(-\infty, \lambda_{\min} + 1)$ непрерывна, где $\lambda_{\min}$ – наименьшее собственное число регулярного пучка квадратичных форм, т.е. наименьший корень уравнения:

$$\det \left(\Phi_w^T \Phi_w - \Phi_w^T \Phi_z \left(\Phi_z^T \Phi_z \right)^{-1} \left(\Phi_w^T \Phi_z \right)^T - \lambda H_\zeta(N) \right) = 0. \quad (10)$$

Легко показать, что уравнение $V(\lambda) = 0$ имеет не более одного корня λ_1 на $(-\infty, \lambda_{\min} + 1)$, так как на этом интервале функция $V(\lambda)$ непрерывна и

$$\dot{V}(\lambda) = -(\bar{\sigma}_\xi^2 + (a(\lambda))^T H_\zeta a(\lambda)) < -1, \lambda \in (-\infty, \lambda_{\min} + 1).$$

Непосредственной подстановкой $\lambda_1 = 1$ в уравнение $V(\lambda) = 0$ можно убедиться, что $\lambda_1 = 1$ является корнем уравнения, единственным на этом интервале. Тогда из (11) непосредственно следует справедливость (8).

Выражение (3) можно привести к виду

$$\min_{\theta \in \bar{B}} \omega^{-1}(a) U_N^1(b, a) = \min_{\theta \in \bar{B}} \frac{(Z - \Phi^T \theta)^T (Z - \Phi^T \theta)}{\bar{\sigma}_\xi^2 + \theta^T H_\zeta(N) \theta},$$

где

$$Z = (z_1, \dots, z_N)^T, \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_z & \Phi_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_z^{(0)})^T & (\varphi_w^{(01)})^T \\ \vdots & \vdots \\ (\varphi_z^{(N-1)})^T & (\varphi_w^{(N-11)})^T \end{pmatrix}, H_{\xi\zeta}(N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_\zeta(N) \end{pmatrix}.$$

Введём новый вектор переменных $(1 \mid \theta)^T = \bar{\theta}$ и матрицу $\bar{\Phi} = (-Y \mid \Phi)$. Имеем для (3):

$$\min_{\bar{\theta} \in \bar{B}} \frac{\bar{\theta}^T \bar{\Phi}^T \bar{\Phi} \bar{\theta}}{\bar{\theta}^T \bar{H}_{\xi\zeta}(N) \bar{\theta}}, \quad \bar{H}_{\xi\zeta}(N) = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_\xi^2 & 0 \\ 0 & H_{\xi\zeta}(N) \end{pmatrix}, \quad \bar{\Phi}^T \bar{\Phi} > 0.$$

Аналогично (9) можно получить (для конечной выборки объёма N):

$$V_N(\lambda) = Z^T Z - \lambda \bar{\sigma}_\xi^2 - \left(\Phi^T Z \right)^T \tilde{H}^{-1} \Phi^T Z, \\ \tilde{H} = \begin{pmatrix} \Phi_z^T \Phi_z & \Phi_z^T \Phi_w \\ \Phi_w^T \Phi_z & \Phi_w^T \Phi_w - \lambda H_\zeta(N) \end{pmatrix},$$

и $V_N(\lambda) = 0$ имеет свойства, аналогичные $V(\lambda) = 0$. (11)

Однако нахождение корня $V_N(\lambda) = 0$ можно записать в следующей форме: $\hat{\lambda}_1(N) = \lambda_{\min}(N) [\bar{\Phi}^T \bar{\Phi} \bar{H}_{\xi\zeta}^{-1}]$ – минимальное характеристическое число пучка квадратичных форм, определяемых $\bar{\Phi}^T \bar{\Phi}$ и $\bar{H}_{\xi\zeta}$. Однако $\bar{H}_{\xi\zeta} \geq 0$, поэтому рассмотрим [10]:

$$\lambda_{\min}(N) [\bar{\Phi}^T \bar{\Phi} - \lambda \bar{H}_{\xi\zeta}] = \frac{1}{\lambda_{\max}(N) \left[(\bar{\Phi}^T \bar{\Phi})^{-1} \bar{H}_{\xi\zeta} \right]}.$$

Известно [14], что

$$\frac{1}{N} \frac{1}{\lambda_{\max}(N) \left[(\bar{\Phi}^T \bar{\Phi})^{-1} \bar{H}_{\xi\zeta} \right]} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \frac{1}{\lambda_{\max} \left[\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \bar{\Phi}^T \bar{\Phi} \right)^{-1} \bar{H}_{\xi\zeta} \right]} = \lambda_{\min} \left[\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \bar{\Phi}^T \bar{\Phi} \right) \bar{H}_{\xi\zeta}^{-1} \right].$$

Так как нахождение $\lambda_{\min} \left[\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \overline{\Phi}^T \overline{\Phi} \right) \overline{H}_{\xi\xi}^{-1} \right]$ можно представить как определение корня уравнения $V(\lambda) = 0$, то $\frac{1}{N} \hat{\lambda}_1(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \lambda_1$

Далее неизвестные параметры можно определить из решения следующих линейных уравнений:

$$\tilde{H}\theta = \Phi^T Z. \quad (13)$$

Это уравнение получается аналогично уравнению (12), тогда, очевидно, получаем

$$\frac{1}{N} \tilde{H}\theta - \frac{1}{N} \Phi^T Z \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \left(\begin{array}{c|c} H_{zz} & H_{zw} \\ \hline (H_{zw})^T & H_{ww} - \lambda H_{\xi\xi} \end{array} \right) \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Из единственности решений (11), (12) и последнего выражения следует [15], что

$$\hat{\theta}(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \theta_0.$$

Заключение

В работе предложен критерий для оценивания параметров линейной ARX-системы с помехой наблюдения во входном сигнале. Доказана сильная состоятельность получаемых оценок. Полученные результаты могут послужить основой для создания новых высокоэффективных автоматизированных систем управления технологическими процессами. Дальнейшие исследования могут быть направлены на построение алгоритмов идентификации при автокоррелированных помехах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М. : Наука, 1991. 432 с.
2. Кацюба О.А. Теория идентификации стохастических динамических систем в условиях неопределенности. Самара : СамГУПС, 2008. 119 с.
3. Иванов Д.В. Рекуррентное оценивание параметров динамических систем. Модели с ошибками в переменных. Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH, 2011. 136 с.
4. Chetoui M., Malti R., Thomassin M., Aoun M., Najar S., Oustaloup A. and Abdelkrim M.N. EIV methods for system identification with fractional models. Proc. 16th IFAC Symposium on System Identification (SYSID). Brussels, 2012. P. 1641–1646.
5. Иванов Д.В. Идентификация линейных динамических систем нецелого порядка с помехой в выходном сигнале // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, № 5–2. С. 2534–2536.
6. Ivanov D.V. Identification discrete fractional order linear dynamic systems with output-error // Proceedings International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON'2013). Krasnoyarsk: Siberian Federal University. Russia, Krasnoyarsk, September 12–13, 2013. IEEE Catalog Number: CFP13794-CDR.
7. Ivanov D.V. Identification discrete fractional order linear dynamic systems with errors-in-variables // Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2013). Rostov-on-Don. Russia. September 27–30, 2013. P. 374–377.
8. Иванов Д.В., Кацюба О.А. О состоятельности оценок параметров ARX-систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале // Стохастическая оптимизация в информатике. 2013. Т. 1, № 2. С. 21–32.
9. Иванов Д.В., Усков О.В. Рекуррентное оценивание билинейных ARX-систем с помехой наблюдения в выходном сигнале // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4(25). С. 43–50.
10. Кацюба О.А., Жданов А.И. Особенности применения МНК для оценивания линейных разностных операторов в задачах идентификации объектов управления // Автоматика и телемеханика. 1979. № 8. С. 86–90.
11. Кацюба О.А., Жданов А.И. Идентификация методом наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии с аддитивными ошибками измерений // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 29–38.
12. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. Т. 2. 810 с.
14. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М. : Наука, 1966. 575 с.
15. Stoica P., Soderstrom T. Bias correction in least-squares identification // Int. J. Control. 1982. V. 35, № 3. P. 449–457.

Иванов Дмитрий Владимирович, канд. физ.-мат. наук. E-mail: dvi85@mail.ru

Самарский государственный университет
путей сообщения (г. Самара)

Поступила в редакцию 14 февраля 2014 г.

Ivanov Dmitriy V., (Samara State University of Transport, Samara, Russian Federation).

Estimation of parameters of linear fractional order ARX systems with noise in input signal.

Keywords: observation noise; fractional order difference; least square method.

The paper deals with the problem of parameter estimation of linear ARX systems with observation noise in the input signals, described by the equations

$$z_i = \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i + \xi_i, \quad w_i = x_i + \zeta_i,$$

where x_i and w_i are unobservable and observable input variables; z_i is the observable output variable; ξ_i is a noise; ζ_i is the noise observation of the input signal.

We proposed the criterion for estimating the parameters of linear fractional order ARX systems, which is a generalization of the method of least squares:

$$\min_{\theta \in B} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \varphi_i^T \theta)^2}{\bar{\sigma}_\xi^2 + a^T H_\zeta a},$$

where

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \left(\begin{pmatrix} \varphi_z^{(i)} \end{pmatrix}^T \parallel \begin{pmatrix} \varphi_w^{(i)} \end{pmatrix}^T \right)^T, \quad \varphi_z^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_1 \\ j \end{pmatrix} z_{i-j-1}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_{r_1} \\ j \end{pmatrix} z_{i-j-1} \right)^T, \\ \varphi_w^{(i)} &= \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_1 \\ j \end{pmatrix} w_{i-j}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_{r_1} \\ j \end{pmatrix} w_{i-j} \right)^T, \quad \theta_0 = (b_0^T \parallel a_0^T)^T, \quad b_0 = (b_0^{(1)}, \dots, b_0^{(r)})^T, \quad a_0 = (a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(r_1)})^T, \\ \bar{\sigma}_\xi^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \xi_i^2, \\ H_\zeta &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E \left[\sum_{i=1}^N \varphi_\zeta^{(i)} (\varphi_\zeta^{(i)})^T \right] = \begin{pmatrix} h_\zeta^{(11)} & \dots & h_\zeta^{(r_1 1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\zeta^{(1 r_1)} & \dots & h_\zeta^{(r_1 r_1)} \end{pmatrix}, \\ h_\zeta^{(mn)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} \zeta_{i-j} \cdot \sum_{j=0}^i (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_n \\ j \end{pmatrix} \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} \begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_n \\ j \end{pmatrix} \sigma_\zeta^2 (i-j), \quad m = \overline{1, r_1}, \quad n = \overline{1, r_1}. \end{aligned}$$

It is proved that under non-restrictive conditions on the signal and noise, the proposed algorithm provides strongly consistent estimates. Note that there does not require knowledge of the laws of distribution of noise to obtain the strongly consistent estimates. The results can be used to create new highly automated systems of control by technological processes.

REFERENCES

1. Ljung L. *Identifikatsiya sistem. Teoriya dlya pol'zovatelya* [System identification. Theory for the user]. Translated from English by A.S Mandel', A.V Nazin. Moscow: Nauka Publ., 1991. 432 p.
2. Katsyuba O.A. *Teoriya identifikatsii stokhasticheskikh dinamicheskikh sistem v usloviyakh neopredelennosti* [Identification theory of stochastic dynamical systems under uncertainty]. Samara: SSUT Publ., 2008. 119 p.
3. Ivanov D.V. *Rekurrentnoe otsenivanie parametrov dinamicheskikh sistem. Modeli s oshibkami v peremennyykh* [Recursive parameter estimation of dynamic systems. Model with errors in variables]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH, 2011. 136 p.
4. Chetoui M., Malti R., Thomassin M., Aoun M., Najar S., Oustaloup A., Abdelkrim M.N. EIV methods for system identification with fractional models. *16th IFAC Symposium on System Identification (SYSID)*. Brussels, 2012, pp. 1641-1646.
5. Ivanov D.V. Identifikatsiya lineynykh dinamicheskikh sistem netselogo poryadka s pomekhoy v vykhodnom signale [Identification of linear dynamic systems with non-integer order with noise in the output signal]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Ser.*

- Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University reports. Series: Natural and Technical sciences*, 2013, vol. 18, no. 5-2, pp. 2534-2536.
6. Ivanov D.V. Identification discrete fractional order linear dynamic systems with output-error. *Proceedings International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON'2013)*. Krasnoyarsk: Siberian Federal University Publ. IEEE Catalog Number: CFP13794-CDR.
 7. Ivanov D.V. Identification discrete fractional order linear dynamic systems with errors-in-variables. *Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2013)*, Rostov-on-Don, Russia, September 27-30. P. 374-377. (2013).
 8. Ivanov D.V., Katsyuba O.A. On the consistency of the parameter estimates ARX-fractional order systems with noise in the output signal. *Stokhasticheskaya optimizatsiya v informatike – Stochastic Optimization in Informatics*, 2013, vol.1, no. 2, pp. 21-32. (In Russian).
 9. Ivanov D.V., Uskov O.V. Recursive estimation of bilinear ARX systems with input-error. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2013, no. 4(25), pp. 43-50. (In Russian).
 10. Katsyuba O.A., Zhdanov A.I. Osobennosti primeneniya MNK dlya otsenivaniya lineynykh raznostnykh operatorov v zadachakh identifikatsii ob"ektov upravleniya [Features of the application for the OLS estimation of linear difference operators in problems of identification of control objects]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1980, vol. 40, no. 8, pp. 86-90.
 11. Katsyuba O.A., Zhdanov A.I. Identifikatsiya metodom naimen'shikh kvadratov parametrov uravneniy avtoregressii s additivnymi oshibkami izmereniy [Identification of the parameters of autoregression equations by the method of least squares in the case of additive measurement errors]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1982, vol. 43, no.2, pp. 158-166.
 12. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications]. Minsk: Nauka i tekhnika, 1987. 688 p.
 13. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of Differential and Integral Calculus]. Moscow: FIZMATLIT Publ., 2001. Vol. 2, 810 p.
 14. Gantmacher F.R. *Teoriya matrits* [The Theory of matrices]. Moscow: Nauka Publ., 2000. 575 p.
 15. Stoica P., Soderstrom T. Bias correction in least – squares identification. *Int. J. Control*, 1982, vol. 35, no. 3, pp. 449-457. DOI: 10.1080/00207178208922631

А.А. Назаров, Н.И. Яковлев

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ M|M|1 С ФАЗОВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОВТОРНОГО ВРЕМЕНИ

Рассматривается однолинейная СМО с повторными вызовами. В систему поступает пуассоновский поток заявок, время обслуживания экспоненциальное. Заявка, приходящая из потока, занимает прибор для обслуживания, если он свободен. В противном случае заявка отправляется в источник повторных вызовов, в котором ожидает случайное время, распределенное по закону фазового типа. Для анализа системы используются метод асимптотического анализа в условиях растущего повторного времени и метод имитационного моделирования.

Ключевые слова: система с повторными вызовами; фазовое распределение.

В работе рассмотрена RQ-система (Retrial Queueing System) с фазовым распределением повторного времени.

Первая международная научная конференция по RQ-системам состоялась в Мадриде в 1998 г. К настоящему времени по этой тематике опубликованы сотни научных работ [1–13]. В монографии [3] список публикаций содержит более 700 наименований.

Актуальность этих исследований определяется фундаментальной ролью повторного обращения заявок к обслуживающему прибору в таких реальных обслуживающих системах, как классические телефонные системы [7, 8], колл-центры [9], мобильные телефонные системы [10], локальные компьютерные сети, управляемые протоколами случайного множественного доступа [11], и другие коммуникационные системы [12, 13].

Исследование RQ-систем с неэкспоненциальным повторным временем мотивировано реальными компьютерными и телекоммуникационными сетями, в которых повторное время вряд ли экспоненциально.

Для RQ-системы M|M|1 классическую повторную схему мы обобщаем, полагая, что повторное время (время пребывания заявки в источнике повторных вызовов) имеет PH-распределение, или, как его еще называют, распределение фазового типа.

1. Математическая модель

В качестве математической модели RQ-системы рассмотрим марковскую однолинейную систему массового обслуживания. Имеется прибор, обслуживающий случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ . На вход системы поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ . Заявка, придя из потока, осуществляет попытку захвата прибора. Если прибор свободен, то попытка считается удачной и заявка встает на обслуживание. Если же прибор занят, то заявка отправляется в источник повторных вызовов, где получает случайное время задержки, распределенное согласно PH-закону с параметрами (V, θ) , по истечении которого она опять осуществляет попытку захвата прибора. Подробное описание распределения фазового типа см. в [4].

Пусть $i_n(t)$ – число заявок на n -й фазе PH-распределения, $n = 1, 2, \dots, N$, а $k(t)$ – определяет состояние прибора как

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят.} \end{cases}$$

Обозначим

$$P\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, \dots, i_N(t) = i_N\} = P_k(i_1, i_2, \dots, i_N, t) = P_k(i, t), k = 0, 1,$$

вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k и в источнике повторных вызовов находится i заявок на каждой из фаз РН-распределения, где $i = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$; Процесс $\{k(t), i(t)\}$ изменений во времени состояний рассматриваемой системы М|М|1|РН является $(N+1)$ -мерной цепью Маркова, в которой лишь одна компонента $k(t)$ принимает конечное число значений, а остальные N компонент имеют счетное множество значений.

Требуется найти распределение вероятностей значений процесса $\sum i_k$ – числа заявок в ИПВ. Этот процесс является немарковским, поэтому его исследование выполним методом введения дополнительных компонент, рассматривая $(N+1)$ -мерную цепь Маркова $\{k(t), i(t)\}$, для стационарного распределения вероятностей $P_k(i, t) = P_k(i)$ которой запишем систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} -(\lambda + \sum_{k=1}^N \theta_{k,0} i_k + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1, v \neq k}^N \theta_{k,v} i_k) P_0(i) + \sum_{k=1}^N (i_k + 1) \sum_{v=1, v \neq k}^N \theta_{k,v} P_0(i + e_k - e_v) + \mu P_1(i) = 0, \\ -\left[\lambda + \mu + \sum_{k=1}^N i_k \sum_{v=1, v \neq k}^N (\theta_{k,v} V + \theta_{k,v}) \right] P_1(i) + \sum_{k=1}^N (i_k + 1) \theta_{k,0} P_0(i + e_k) + \\ + \lambda P_0(i) + \sum_{k=1}^N (i_k + 1) \sum_{v=1, v \neq k}^N (\theta_{k,0} V_v + \theta_{k,v}) P_1(i + e_k - e_v) + \lambda \sum_{k=1}^N V_k P_1(i - e_k) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2. Характеристическая функция распределения вероятностей состояний системы

Применяя систему уравнений Колмогорова (1), составим систему уравнений для определения частных характеристических функций

$$H_k(u) = \sum_i P_k(i) \exp\{j \sum_{n=1}^N u_n i_n\}, k = \overline{0, 1},$$

где u является вектором с компонентами $u_1, u_2, \dots, u_N$, а $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Из (1) получим

$$\begin{cases} -\lambda H_0(u) + \mu H_1(u) + j \sum_{k=1}^N \frac{\partial H_0}{\partial u_k} \theta_{k,0} + j \sum_{k=1}^N \frac{\partial H_0}{\partial u_k} \sum_{v=1, v \neq k}^N \theta_{k,v} (1 - \exp(j(u_v - u_k))) = 0, \\ -\lambda H_1(u) - \mu H_1(u) + \lambda H_0(u) - j \sum_{k=1}^N \frac{\partial H_0}{\partial u_k} \theta_{k,0} \exp(-ju_k) + \lambda H_1(u) \sum_{k=1}^N V_k \exp(ju_k) + \\ + j \sum_{k=1}^N \frac{\partial H_1}{\partial u_k} \sum_{v=1, v \neq k}^N (\theta_{k,v} + \theta_{k,0} V_v) (1 - \exp(j(u_v - u_k))) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения в скалярной форме записи в дальнейшем приводят к довольно громоздким выкладкам. Поэтому осуществим переход к матричной форме записи системы уравнений (2).

Для этого введем ряд обозначений:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & u_N \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial H_v(u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_v(u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial H_v(u)}{\partial u_N} \end{bmatrix},$$

$$\exp(jU) = \begin{bmatrix} \exp ju_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp ju_N \end{bmatrix}, \quad V = [V_1 \quad \dots \quad V_N]^T, \quad E = [1 \quad \dots \quad 1]^T.$$

Матрица θ – неполная матрица инфинитезимальных характеристик. Вектор $(-\theta E)$ имеет смысл интенсивностей обращений заявок к прибору с соответствующей фазы РН-распределения.

С учетом матричных обозначений перепишем систему (2) в виде

$$\begin{cases} -\lambda H_0(u) + \mu H_1(u) - j \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} \exp\{-jU\} \theta \exp(jU) E = 0, \\ -\mu H_1(u) + \lambda H_0(u) + \lambda H_1(u) (V^T \exp\{jU\} - 1) + j \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} \exp\{-jU\} \theta E + \\ + j \frac{\partial H_1(u)}{\partial u} \exp\{-jU\} (\theta E V^T - \theta) \exp\{jU\} E = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Система уравнений (3) служит основой для исследования рассматриваемой RQ-системы методом асимптотического анализа. В качестве предельного условия для использования этого метода выбрано условие неограниченно растущего повторного времени. Применение метода асимптотического анализа разбивается на две части – асимптотик первого и второго порядков. Результатом асимптотики первого порядка является вектор средних значений числа заявок в ИПВ на каждой фазе, а результатом асимптотики второго порядка – доказательство того факта, что асимптотическое распределение вероятностей является многомерным гауссовским, и выводится уравнение, определяющее его матрицу ковариаций.

3. Асимптотика первого порядка

В системе (3) умножим матрицу θ на $\frac{1}{T}$, где T – большой параметр, $T \rightarrow \infty$, осуществив тем самым условие растущего времени задержки в ИПВ. Обозначим далее $\frac{1}{T} = \varepsilon$ и выполним следующие замены:

$$W = \text{diag}(w), u = \varepsilon w, H_k(u) = F_k(w, \varepsilon), \quad k = \overline{0, 1}.$$

С учетом этого перепишем систему уравнений (3) в условиях растущего повторного времени:

$$\begin{cases} -\lambda F_0(w, \varepsilon) + \mu F_1(w, \varepsilon) - j \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} \exp\{-j\varepsilon W\} \theta \exp(j\varepsilon W) E = 0, \\ -\mu F_1(w, \varepsilon) + \lambda F_0(w, \varepsilon) + \lambda F_1(w, \varepsilon) (V^T \exp\{j\varepsilon W\} - 1) + j \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} \exp\{-j\varepsilon W\} \theta E + \\ + j \frac{\partial F_1(w, \varepsilon)}{\partial w} \exp\{-j\varepsilon W\} (\theta E V^T - \theta) \exp\{j\varepsilon W\} E = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Предельные значения $F_k(w)$ решений $F_k(w, \varepsilon)$ системы уравнений (4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ определяются как

$$F_k(w) = R_k \exp(jaw),$$

где $R_1 = \frac{\lambda}{\mu}$, $R_0 + R_1 = 1$, а вектор средних значений числа заявок на каждой из фаз РН-распределения a определяется равенством

$$a = -\frac{\lambda R_1}{R_0} V^T \theta^{-1}. \quad (5)$$

Доказательство. В первом уравнении системы (4) осуществим предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$-\lambda F_0(w) + \mu F_1(w) - j \frac{\partial F_0(w)}{\partial w} \theta E = 0.$$

Будем искать решение в виде

$$F_k(w) = R_k \Phi(w),$$

где R_0, R_1 – стационарное распределение вероятностей состояний прибора. Тогда получаем

$$-\lambda R_0 + \mu R_1 - j R_0 \frac{\partial \Phi(w)}{\partial w} \theta E \frac{1}{\Phi(w)} = 0.$$

Полагая, что $\Phi(w)$ имеет вид

$$\Phi(w) = \exp\{j\omega w\},$$

получим следующее уравнение:

$$-\lambda R_0 + \mu R_1 + R_0 a \theta E = 0.$$

Сложим теперь уравнения системы (4) и поделим сумму на ε :

$$\lambda F_1(w) \left[\frac{V^T e^{j\varepsilon W} E - 1}{\varepsilon} \right] + j \frac{\partial F_0(w)}{\partial w} \left[\frac{e^{-j\varepsilon W} - e^{-j\varepsilon W} \theta e^{j\varepsilon W}}{\varepsilon} \right] E + j \frac{\partial F_1(w)}{\partial w} e^{-j\varepsilon W} (\theta E V^T - \theta) e^{j\varepsilon W} E * \frac{1}{\varepsilon} = 0.$$

Раскладывая экспоненты в ряд Тейлора до первой степени порядка малости ε , осуществив предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, получим равенство

$$[\lambda R_1 V^T + R_0 a \theta - R_1 a (\theta E V^T - \theta)] W E = 0,$$

из которого следует, что вектор средних a удовлетворяет уравнению

$$\lambda R_1 V^T + R_0 a \theta - R_1 a (\theta E V^T - \theta) = 0.$$

Функции $F_0(w), F_1(w)$ имеют смысл частичных характеристических функций распределения вероятностей числа заявок в ИПВ для свободного и занятого состояний прибора соответственно. Вместе с условием нормировки для вероятностей R_0, R_1 последнее уравнение однозначно определяет компоненты вектор-строки средних a , что и есть равенство (5).

Теорема доказана.

4. Асимптотика второго порядка

В системе (3) умножим матрицу θ на $\frac{1}{T}$, где T – большой параметр, $T \rightarrow \infty$. Теперь обозна-

чим, в отличие от асимптотики первого порядка, $\frac{1}{T} = \varepsilon^2$ и выполним следующие замены:

$$H_k(u) = H_k^{(2)}(u) \exp\{j\omega u\}, k = \overline{0, 1}.$$

Тогда система (3) примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda H_0^{(2)}(u) + \mu H_1^{(2)}(u) - j \left[\frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + j\omega H_0^{(2)}(u) \right] \exp\{-j\omega u\} \theta \exp(j\omega u) E = 0, \\ -\mu H_1^{(2)}(u) + \lambda H_0^{(2)}(u) + \lambda H_1^{(2)}(u) (V^T \exp\{j\omega u\} - 1) + \\ + j \left[\frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} + j\omega H_0^{(2)}(u) \right] \exp\{-j\omega u\} \theta E + j \left[\frac{\partial H_1^{(2)}(u)}{\partial u} + j\omega H_1^{(2)}(u) \right] \exp\{-j\omega u\} (\theta E V^T - \theta) \exp\{j\omega u\} E = 0. \end{array} \right.$$

Введя замены $u = \varepsilon w$, $H_k^{(2)}(u) = F_k(w, \varepsilon)$, $k = \overline{0, 1}$, и подставляя их в последнюю систему, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda F_0(w, \varepsilon) + \frac{\partial F_1(w, \varepsilon)}{\partial w} - j \left[\frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} \varepsilon + j\omega F_0(w, \varepsilon) \right] \exp\{-j\varepsilon W\} \theta \exp(j\varepsilon W) E = 0, \\ -\mu F_1(w, \varepsilon) + \lambda F_0(w, \varepsilon) + \lambda F_1(w, \varepsilon) (V^T \exp\{j\varepsilon W\} - 1) + \\ + j \left[\frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} \varepsilon + j\omega F_0(w, \varepsilon) \right] \exp\{-j\varepsilon W\} \theta E + j \left[\frac{\partial F_1(w, \varepsilon)}{\partial w} \varepsilon + j\omega F_1(w, \varepsilon) \right] \exp\{-j\varepsilon W\} (\theta E V^T - \theta) \exp\{j\varepsilon W\} E = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Теорема 2. Предельные значения $F_k(w)$ решений $F_k(w, \varepsilon)$ в системе уравнений (6) при $\varepsilon \rightarrow 0$ определяются как

$$F_k(w) = R_k \exp \left\{ -\frac{1}{2} E^T W K W E \right\}.$$

При этом матрица ковариаций K является решением обратного матричного уравнения Ляпунова

$$KA + A^T K = -(B + B^T), \quad (7)$$

где

$$A = \lambda(R_1 \theta E V^T - \theta) - R_0^2 \theta E a \theta,$$

$$B = R_0^2 [\text{diag}(a) \theta - \text{diag}(a \theta)] E a \theta - \lambda \text{diag}(a) (R_1 \theta E V^T - \theta).$$

Доказательство. Проведем его в три этапа. При этом воспользуемся следующим разложением

$$F_k(w) = (R_k + j \varepsilon E^T W f_k) \exp \left\{ -\frac{1}{2} E^T W K W E \right\}, k = \overline{0, 1}. \quad (8)$$

Этап 1.

В первом из уравнений системы (6) разложим экспоненты в ряд Тейлора вплоть до первой степени порядка малости ε и, используя разложение (8), получим, группируя слагаемые при степенях ε :

$$-\lambda R_0 + \mu R_1 + R_0 a \theta E = 0,$$

при ε^1

$$-\lambda E^T W f_0 + \mu E^T W f_1 + R_0 E^T W K \theta E + a R_0 (\theta W - W \theta) E + a \theta E (E^T W f) = 0. \quad (9)$$

Этап 2.

Складывая уравнения системы (6), раскладывая экспоненты в ряд Тейлора вплоть до второй степени порядка малости ε , используя разложение и, группируя слагаемые при степенях ε , получим:

$$\lambda R_1 V^T + R_0 a \theta - R_1 a (\theta E V^T - \theta) = 0,$$

при ε^2 :

$$\begin{aligned} & -\lambda R_1 \frac{V^T W^W}{2} E - \lambda (E^T W f_1) V^T W E - R_0 E^T W K \theta W E - a R_0 \left(\frac{\theta W^2}{2} - W \theta W \right) E - a \theta E (E^T W f_0) W E + \\ & + R_1 E^T W K \theta E \theta W E - a R_1 \left[W (\theta E V^T - \theta) W - \frac{(\theta E V^T - \theta) W^2}{2} \right] E + a (E^T W f_1) (\theta E V^T - \theta) W E = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Этап 3.

Выражая из (9) $E^T W f_1$ и подставляя в (10), группируя слагаемые, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & -R_0 E^T W K \theta W E + R_0 a W \theta W E + R_1 E W K (\theta E V^T - \theta) W E - R_1 a W (\theta E V^T - \theta) W - \\ & - \frac{R_0^2}{\lambda} \left[E^T W K \theta E + a (\theta W - W \theta) E \right] a \theta W E = 0. \end{aligned}$$

В последнем уравнении, переставляя сомножители требуемым образом, получим

$$E^T W \left[K \{ \lambda (R_1 \theta E V^T - \theta) - R_0^2 \theta E a \theta \} + R_0^2 \{ \text{diag}(a) \theta - \text{diag}(a \theta) \} E a \theta - \lambda \text{diag}(a) (R_1 \theta E V^T - \theta) \right] W E = 0,$$

или, что то же самое

$$E^T W (K A + B) W E = 0. \quad (11)$$

Выражение (11) является некоторой квадратичной формой вида $x^T A x$. Для того чтобы она принимала нулевые значения для всех x , достаточно, чтобы матрица A являлась кососимметричной, т.е. $A^T + A = 0$.

Применимо к квадратичной форме выражения (11) это означает, что для того, чтобы она принимала нулевые значения для любых матриц W , достаточно, чтобы $KA + A^T K + B + B^T = 0$. При этом решение $K = -BA^T$ не является допустимым, так как в этом случае матрица K не является симметричной. Следовательно, матрица ковариаций K многомерного нормального распределения является решением обратного уравнения Ляпунова (7), которое можно свести к системе N^2 линейных алгебраических уравнений. Подробнее о методах решения подобных уравнений см. в [14].

5. Сравнение с имитационным подходом

Для рассматриваемой RQ-системы реализована имитационная модель. С ее помощью численно получено распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов.

Определим исходные параметры системы следующим образом:

$$\lambda = 0,70, \mu = 1, V^T = [0,40 \ 0,25 \ 0,35], \theta = \varepsilon \begin{bmatrix} -0,30 & 0,10 & 0,10 \\ 0,10 & -0,20 & 0,05 \\ 0,15 & 0,15 & -0,60 \end{bmatrix},$$

при этом параметр $\varepsilon = \{0,2; 0,1; 0,05; 0,01\}$.

Для заданного набора параметров с помощью имитационной модели получены ряды распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов. Для сравнения с асимптотическими результатами, определяемыми формулами (5) и (7), установим критерий сравнения – расстояние Колмогорова

$$d = \max_{1 \leq m < \infty} \left| \sum_{i=1}^m P(i) - \sum_{i=1}^m G(i) \right|.$$

Здесь $P(i)$ есть ряд распределения вероятностей, полученный подстановкой целых значений в функцию плотности вероятности нормального распределения, которое получено путем суммирования всех компонент вектора многомерного нормального распределения, а $G(i)$ есть ряд распределения вероятностей, полученный с помощью имитационного моделирования.

На графиках (рис. 1–4) приведены гистограммы рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ, полученных асимптотически (сплошная линия) и имитационно (пунктирная линия) при значениях вышеуказанных параметров.

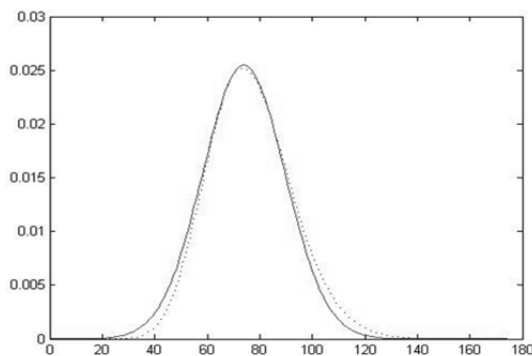


Рис. 1. Гистограмма рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ при $\varepsilon = 0,1$

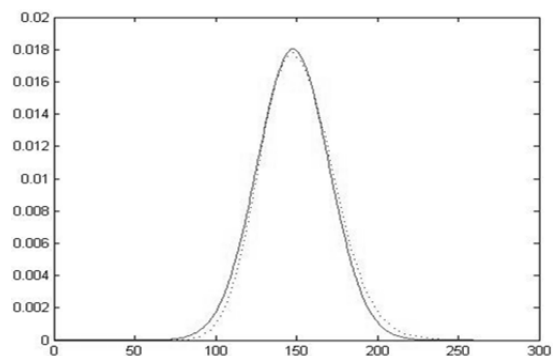


Рис. 2. Гистограмма рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ при $\varepsilon = 0,2$

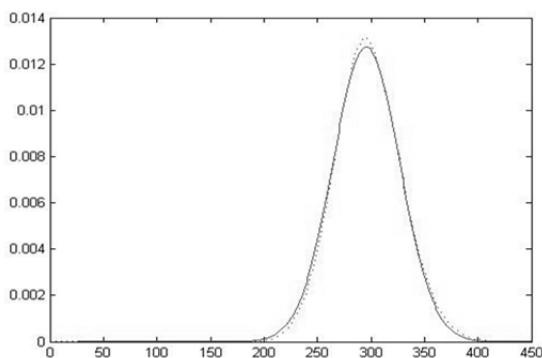


Рис. 3. Гистограмма рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ при $\varepsilon = 0,05$

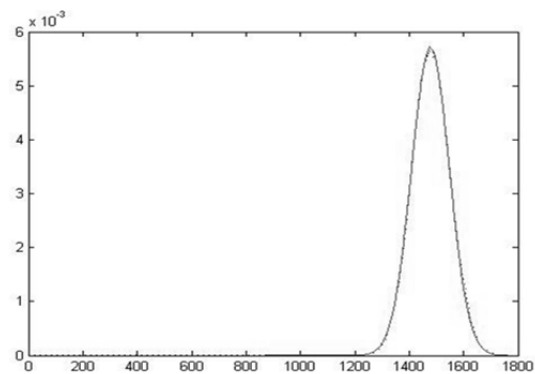


Рис. 4. Гистограмма рядов распределения вероятностей числа заявок в ИПВ при $\varepsilon = 0,01$

Приведем таблицу расстояний Колмогорова для тех же параметров системы, которые соответствуют графикам на рис. 1–4.

Значения расстояний Колмогорова d

ε	d
0,20	0,059
0,10	0,039
0,05	0,030
0,01	0,012

Данные таблицы указывают на то, что при уменьшении параметра ε расстояние между асимптотическим и имитационным распределениями вероятностей уменьшается. Полагая допустимым погрешность в 0,05, можно считать, что допустимо применение асимптотических результатов при значении ε менее 0,1.

Заключение

В работе показана возможность гауссовской аппроксимации распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов и получены параметры для данного приближения. Построены графики асимптотического и имитационного распределений вероятностей состояний системы. Приведены табличные данные расстояния Колмогорова между имитационным и асимптотическим распределениями вероятностей в условии неограниченно растущего повторного времени. Сделан вывод о том, что при увеличении повторного времени расстояние между распределениями вероятностей сокращается. Установлена область применимости гауссовской аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания М. : Физматгиз, 1963.
2. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
3. Jesus R. Artalejo, Antonio Gomez-Corral. Retrial Queue Systems. A computational approach. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008.
4. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М. : РУДН, 1995. С. 98–108.
5. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial queues. Chapman & Hall, 1997.
6. Yang T., Posner M.J.M., Templeton J.G.G., Li H. An approximation methods for M/G/1 retrial queue with general retrial times // European Journal of Operational Research. 1994. V. 76. P. 552–562.
7. Elldin A., Lind G. Elementary telephone traffic theory. Ericson Public Telecommunications, 1967.
8. Syski R. Introduction to congestion theory in telephone systems. Amsterdam : Elsevier Science Publisher, 1968.
9. Stolliez R. Performance analysis and optimization of Inbound Call Centers. Berlin : Springer, 2003.
10. Wesolowski K. Mobile communication systems. N.Y. : John Wiley & Sons, 2002.
11. Giambene G. Queueing Theory and telecommunications: Networks and Applications. N.Y. : Springer, 2005.
12. Hammond J.L., O'Reilly P.J.P. Performance analysis of local computer networks. Massachusetts : Addison-Wesley, 1998.
13. Bruneel H., Kim. B.G. Discrete-Time models for communication systems including ATM. Boston : Kluwer Academic Publishers, 1993.
14. Параев Ю.И. Уравнения Ляпунова и Риккати. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1989.

Назаров Анатолий Андреевич, д-р техн. наук, профессор. E-mail: anazarov@fpmk.tsu.ru

Яковлев Никита Иванович. E-mail: yakovlev_steppy@mail.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 5 июля 2013 г.

Nazarov Anatoly.A., Yakovlev Nikolay.I. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

Investigation of retrial queue system M|M|1 with phase-type retrial times.

Keywords: retrial queue system; phase-type distribution.

Retrial queueing models are used as stochastic modeling tool of many computer and communication systems such as call-centers, mobile phone systems, local computer networks with multiple random access. Consider a single-server queueing system. The cus-

tomers form the Poisson input process with a rate λ . The customers' service times have an exponential distribution with a parameter μ . If a customer finds server engaged, one joins the retrial queue (or orbit) in order to seek service again after a random delay that has a phase-type distribution.

Let $i(t)$ be the vector with components which are equal to a number of customers in each phase of the phase-type retrial at instant t . The process $i(t)$ is a non-Markovian process. To extend $i(t)$ to a Markov process, we introduce new random variables. Let $k(t)$ be the indicator function of a server's state: $k(t) = 0$ if the server is vacant at moment t ; $k(t) = 1$ if it is engaged at moment t . Therefore, the stochastic process $\{k(t), i(t)\}$ is the Markovian process defined on the state space $\{(k, i)\}$, where one in $N+1$ components is finite and other N components are countable. Our purpose is to find the probability distribution of states for non-Markovian process $\sum_{k=1}^N i_k(t)$.

We use the asymptotic analysis method that allows us to find the probability distribution of process states in a marginal condition when the retrial time grows unlimited. It is shown that in the condition of unlimited growth, the probability distribution can be approximated by the multidimensional Gaussian distribution. The first and second orders of the asymptotic method provide as result the mean vector and covariate matrix correspondingly.

To estimate the range of applicability of analytic results, we use simulations. Kolmogorov's distance as a comparison criteria of analytic and simulation results is used.

REFERENCES

1. Khinchin A.Ya. *Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Papers about mathematical theory of Queueing]. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1963. 235 p.
2. Nazarov A.A., Moiseeva S.P. *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Asymptotic analysis method on queueing theory]. Tomsk: NTL Publ., 2006.
3. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. *Retrial queue systems. A computational approach*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 332 p.
4. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory]. Moscow: Russian University of Peoples' Friendship Publ., 1995, pp. 98-108.
5. Falin G.I., Templeton J.G.C. *Retrial queues*. Chapman & Hall, 1997. 328 p.
6. Yang T., Posner M.J.M., Templeton J.G.G., Li H. An approximation methods for M/G/1 retrial queue with general retrial times. *European Journal of Operational Research*, 1994, vol. 76, pp. 552-562. DOI: 10.1016/0377-2217(94)90286-0
7. Elldin A., Lind G. *Elementary telephone traffic theory*. Ericson Public Telecommunications, 1967.
8. Syski R. *Introduction to congestion theory in telephone systems*. Amsterdam: Elsevier Science Publisher, 1968. 642 p.
9. Stollez R. *Performance analysis and optimization of Inbound Call Centers*. Berlin: Springer, 2003. 219 p.
10. Wesolowski K. *Mobile communication systems*. New York: John Wiley & Sons, 2002. 449 p.
11. Giambene G. *Queueing theory and telecommunications: Networks and Applications*. New York: Springer, 2005. 585 p.
12. Hammond J.L., O'Reilly P.J.P. *Performance analysis of local computer networks*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1998. 411 p.
13. Bruneel H, Kim. B.G. *Discrete-Time models for communication systems including ATM*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1993. 200 p.
14. Paraev Yu.I. *Uravneniya Lyapunova i Rikkati* [Lyapunov and Riccati equations]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 1989.

УДК 519.872

Ю.И. Рыжиков, А.В. Уланов

РАСЧЁТ ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ $M/H_2/n-H_2$ С ЗАЯВКАМИ, НЕТЕРПЕЛИВЫМИ В ОЧЕРЕДИ

Представлен метод расчёта многоканальной системы массового обслуживания с простейшим входящим потоком и гиперэкспоненциальными второго порядка (H_2) распределениями времён обслуживания и предельного ожидания в очереди. Получена диаграмма переходов между микросостояниями системы $M/H_2/n-H_2$, на основе которой составлена программа, реализующая вычисление стационарного распределения числа заявок в системе и вероятности преждевременного ухода заявки из очереди. Результаты верифицированы с помощью имитационных моделей.

Ключевые слова: системы массового обслуживания; нетерпеливые заявки; ограниченное ожидание; численные методы; гиперэкспоненциальное распределение.

Одной из актуальных задач теории очередей является расчёт систем массового обслуживания (СМО) с «нетерпеливыми» заявками, уходящими из очереди при превышении некоторого допустимого (в общем случае случайного) времени ожидания (времени терпения). Обстоятельный обзор современного состояния вопроса приводится, например, в [1]. Приходится констатировать, однако, что подавляющее большинство известных методов либо относится к чисто марковским системам $M/M/n-M$ [2] (в дополнении к нотации Кендалла через дефис указан тип распределения времени терпения), либо ограничено весьма стеснительными условиями – одноканальное обслуживание и большая загрузка [1].

Из работ по анализу *многоканальных немарковских* систем стоит выделить статью [3], в которой рассматривается диаграмма переходов системы с марковским обслуживанием и H_2 -распределением терпения $M/M/n-H_2$, а также работу [4], в которой предложен метод расчета системы с МАР-входящим потоком, матрично-фазовым (Ph) распределением обслуживания и марковским терпением.

Ниже представлен метод расчета многоканальной системы с простейшим входящим потоком и H_2 -распределениями обслуживания и терпения $M/H_2/n-H_2$.

1. Метод фиктивных фаз

Традиционной технологией анализа многоканальных немарковских систем является метод фиктивных фаз. Расчёт при этом проходит следующие этапы:

- аппроксимация непоказательных распределений распределениями фазового типа;
 - построение диаграммы переходов;
 - формирование в соответствии с диаграммой матриц интенсивностей переходов;
 - составление уравнений баланса переходов, их решение и расчёт стационарных характеристик СМО.
- Остановимся подробнее на каждом этапе.

Аппроксимируем непоказательные распределения обслуживания и терпения по методу моментов H_2 -распределением. Оно относится к фазовым и позволяет выровнять три начальных момента любого (кроме Эрланга второго порядка) исходного. М.Дж. Кендалл и А. Стьюарт утверждают: «Практически аппроксимация такого рода оказывается очень хорошей, даже если совпадают только три или четыре момента» [5. С. 127]. Многочисленные вычислительные эксперименты [6] в области теории очередей также подтверждают, что трех моментов для проведения расчётов вполне достаточно.

Далее, объединив представленную в [3] диаграмму для $M/M/n-H_2$ с диаграммой системы без нетерпения $M/H_2/n$, удалось получить схему переходов между состояниями системы $M/H_2/n-H_2$. Остановимся подробнее на технологии ее построения.

Напомним, что H_2 -распределение представляет собой две параллельные фазы с экспоненциальной задержкой в каждой из них. Пусть H_2 -обслуживание имеет параметры $\{y_i, \mu_j\}$, где $\{y_i\}$, $i = 1, 2$, – вероятности выбора фаз, $\{\mu_j\}$, $j = 1, 2$, – интенсивности показательного распределения времени обслуживания в них. Аналогично зададим параметры H_2 -распределения терпения – $\{u_i, \gamma_j\}$. Интенсивность простейшего входящего потока обозначим λ , число каналов – n . Далее рассмотрим состояния системы $M/H_2/n-H_2$ без очереди. Поскольку в этом случае отсутствуют уходы по нетерпению, диаграмма переходов представлена на рис. 1.

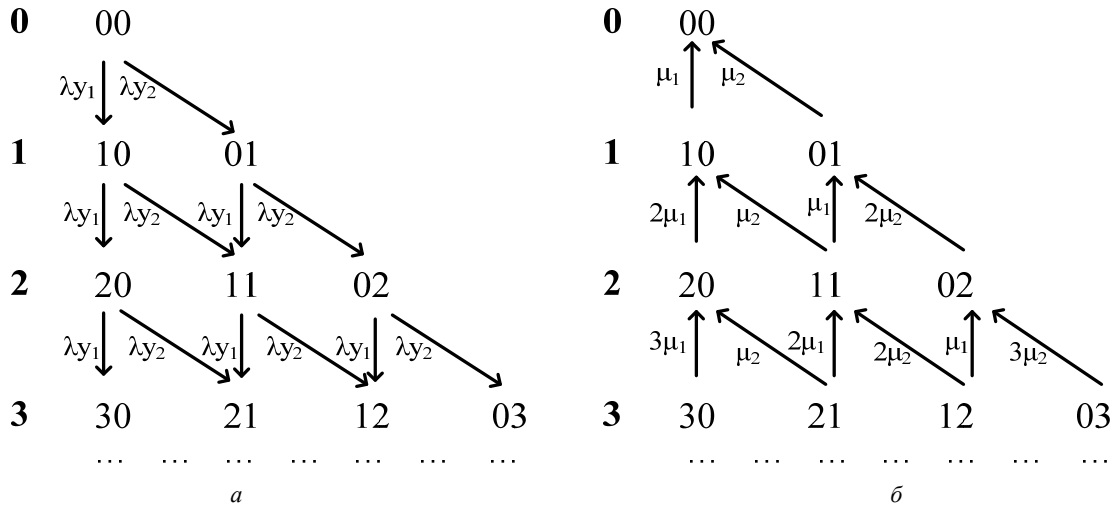


Рис. 1. Диаграммы переходов в «недогруженной» системе $M/H_2/n-H_2$

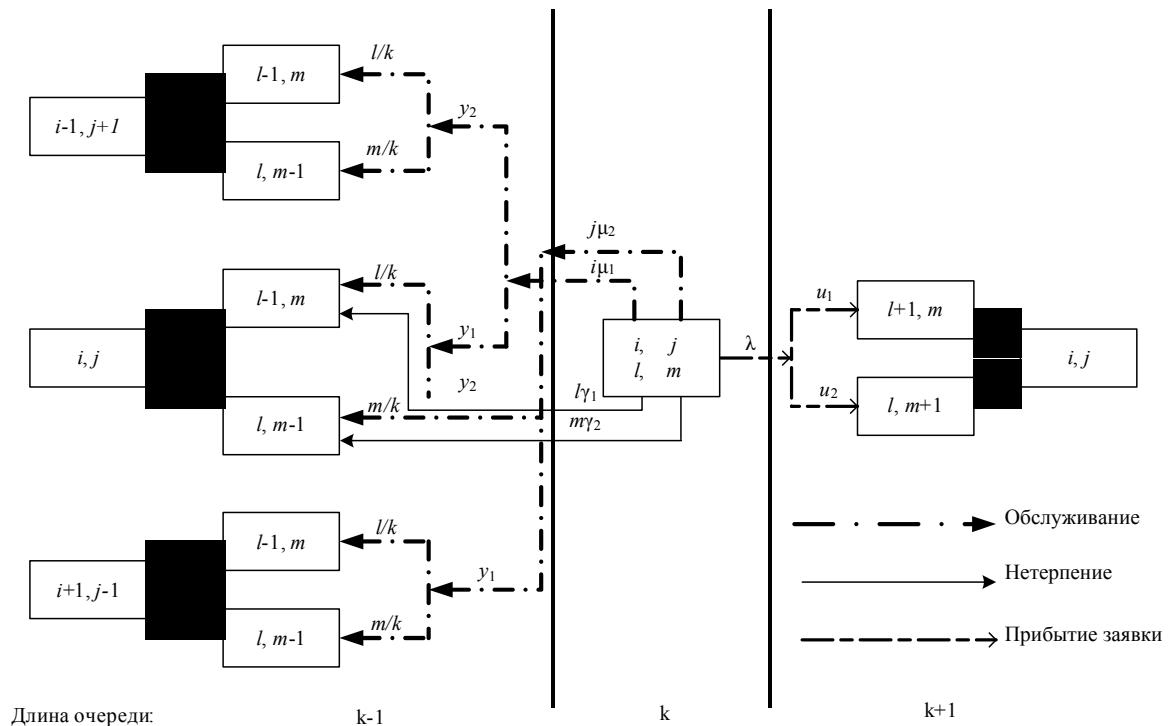


Рис. 2. Схема переходов в «загруженной» системе $M/H_2/n-H_2$

На рис. 1, *а* показана диаграмма переходов по прибытию заявок, на рис. 1, *б* – по завершению обслуживания. Полу жирные столбцы слева от диаграмм – номера ярусов, они соответствуют количеству заявок в системе. Двухразрядные индексы (00, 10, 01, 20 и т.д.) называются ключами микросостояний и указывают расстановку заявок по фазам (типам) H_2 -распределения обслуживания. Например, ключ «21» говорит о том, что в двух каналах заявки получают обслуживание первого типа (с показательной интенсивностью μ_1), а в одном – второго типа (с интенсивностью μ_2). У стрелок нанесены интенсивности соответствующих переходов между смежными микросостояниями.

Заявка, пришедшая в занятую систему, становится в очередь. Для нее необходимо зафиксировать фазу H_2 -распределения терпения. При этом каждое микросостояние, начиная с $(n+1)$ -го яруса, расщепляется для указания расстановки заявок по фазам H_2 -терпения. Например, на n -м ярусе (рис. 1) количество микросостояний равно $(n+1)$, все каналы обслуживания заняты и очереди нет. Прибывшая заявка застаёт систему в одном из микросостояний и в зависимости от типа её терпения попадает в одну из двух фаз. Поскольку терпящие в очереди заявки не влияют на процесс обслуживания, на $(n+1)$ -м ярусе количество микросостояний удваивается, а к их ключам добавляется ключ (l, m) , содержащий информацию о расстановке заявок по фазам H_2 -терпения.

Изобразить диаграмму переходов с сохранением наглядности не представляется возможным, поэтому представим всевозможные уходы из одного микросостояния с ключом (i, j, l, m) , где (i, j) – расстановка заявок по фазам обслуживания, $i+j=n$; (l, m) – по фазам терпения, $l+m=k$, где k – число заявок в очереди (см. рис. 2).

Поясним логику построения схемы. Заявка *прибывает* в систему с интенсивностью λ , застаёт все каналы занятыми и становится в очередь. В зависимости от типа ее терпения (с вероятностью u_1 она будет первого типа, с вероятностью u_2 – второго) выбирается следующее микросостояние. При уходе заявки *по обслуживанию* для начала выбирается, какой тип обслуживания требуется головной заявке очереди (с вероятностью y_1 – первый тип, с вероятностью y_2 – второй) и далее – какой тип терпения имела обслуженная заявка (вероятности пропорциональны доле заявок соответствующих типов терпения в очереди). При уходе *нетерпеливой* заявки уменьшается количество заявок соответствующего типа терпения. Таким образом, при переходе из одного микросостояния в другое коэффициенты у стрелок последовательно перемножаются.

2. Матрицы переходов и уравнения баланса

На основе диаграммы на рис. 1 и схемы переходов на рис. 2 могут быть получены интенсивности переходов в микросостояния (i, j, l, m) , необходимые для записи уравнений баланса вероятностей состояний системы.

Обозначим через S_j множество всех микросостояний системы, когда в системе находится ровно j заявок (что соответствует j -му ярусу), а через σ_j – количество элементов в S_j . Определим матрицы интенсивностей переходов:

$$\begin{aligned} A_j[\sigma_j \times \sigma_{j+1}] & - \text{в } S_j \text{ (по прибытию заявок),} \\ B_j[\sigma_j \times \sigma_{j-1}] & - \text{в } S_{j-1} \text{ (по завершению обслуживания или уходу нетерпеливых),} \\ D_j[\sigma_j \times \sigma_j] & - \text{ухода из микросостояний } j\text{-го яруса (диагональная матрица).} \end{aligned}$$

В квадратных скобках здесь и далее указывается размер матриц. Элемент (i, k) любой из этих матриц представляет интенсивность перехода из i -го состояния j -го яруса в k -е состояние смежного (по переходам рассматриваемого типа) яруса.

Поскольку уход нетерпеливых заявок автоматически уменьшает вероятность длинной очереди, количество ярусов диаграммы можно ограничить сравнительно небольшим числом R . Если в результате расчета окажется, что вероятность наличия в системе R заявок велика, необходимо повторить расчет с увеличенным R .

Введём векторы-строки $\pi_j = \{\pi_{j,1}, \pi_{j,2}, \dots, \pi_{j,\sigma_j}\}$ вероятностей нахождения СМО в микросостояниях j -го яруса. Теперь можно записать векторно-матричные уравнения баланса переходов между состояниями:

$$\begin{aligned}\pi_0 D_0 &= \pi_1 B_1; \\ \pi_j D_j &= \pi_{j-1} A_{j-1} + \pi_{j+1} B_{j+1}, \quad j = \overline{1, R}.\end{aligned}\quad (1)$$

Система уравнений (1), дополненная условием нормировки, даже при ограничении очереди характеризуется чрезвычайно высокой размерностью, и стандартные методы решения систем линейных алгебраических уравнений применительно к ней оказываются неэффективными. Мы развили применительно к ситуации с нетерпеливыми заявками предложенный в [7] и детально проработанный в [8] итерационный метод решения системы (1).

Вероятность ухода заявки по нетерпению находилась как

$$P_{imp} = \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^k (j\gamma_1 + (k-j)\gamma_2) \pi'_{k,j}, \quad (2)$$

где $\pi'_{k,j}$ – вероятность того, что в очереди k заявок, из которых j – первого типа терпения, находится суммированием вероятностей соответствующих микросостояний.

Ценность итерационного метода напрямую зависит от возможности автоматического построения матриц интенсивностей переходов на основе диаграмм. В нашем случае алгоритмы построения матриц относительно очевидны, что следует из рис. 1, 2. Однако на практике программная реализация метода расчета системы $M/H_2/n-H_2$ на языке Фортран-90 оказалась нетривиальной и весьма поучительной. Исходными данными для программы являются число каналов и наборы моментов распределений обслуживания и терпения для их H_2 -аппроксимации.

Ниже представлены результаты расчета системы $M/G/n-G$ при аппроксимации различных исходных распределений обслуживания и терпения гиперэкспонентами второго порядка.

3. Численные результаты

Были рассчитаны стационарное распределение заявок в системе $M/H_2/n-H_2$ и вероятность потери заявки по нетерпению – формула (2) – при следующих исходных данных:

- число каналов $n = 3$;
- среднее время обслуживания $b_1 = 1$;
- среднее время терпения $g_1 = 1,5$;
- коэффициент загрузки $\rho = 0,5$;
- предельное число заявок в системе $R = 11$.

Необходимая для расчёта интенсивность входящего потока находится по формуле $\lambda = \rho n / b_1$. Заметим, что коэффициент загрузки не учитывает уход нетерпеливых заявок, поэтому он теряет определяющую роль и условие $\rho < 1$ для существования стационарного режима в данном случае не обязательно. По трём начальным моментам рассчитывались параметры гиперэкспоненты для аппроксимации следующих распределений терпения и обслуживания: детерминированного D (коэффициент вариации $\nu = 0$), Эрланга третьего порядка E_3 ($\nu = 0,577$), показательного M ($\nu = 1$). Также был выполнен расчет при H_2 -распределении с вещественными параметрами ($\nu = 1,5$ и $\nu = 2,0$).

В табл. 1 приведены результаты расчёта стационарного распределения $\{p_j\}$, $j = \overline{0, 11}$, числа заявок в системе $M/D/3-E_3$ численным методом (числ.) и с помощью имитационной модели (ИМ), описание которой имеется в [9]. Заметим, что при аппроксимации D - и E_3 -распределений гиперэкспоненциальными параметрами последнего принимают комплексные значения, однако на конечный результат это не повлияло.

Относительное отклонение рассчитанных численным методом характеристик от полученных на имитационной модели составляет 10%, что принято считать вполне приемлемым [10]. Заметим, что из-за несовершенства датчиков равномерно распределённых случайных чисел имитационная модель не может считаться идеальным эталоном. К тому же численный метод предполагает сохранение ограниченного количества начальных моментов исходных распределений при аппроксимации.

Таблица 1

Вероятности $\{p_j\}$ состояний системы $M/D/3-E_3$

j	ИМ	Числ.	j	ИМ	Числ.	j	ИМ	Числ.
0	3,912e-2	4,120e-2	4	1,807e-1	1,833e-1	8	1,534e-2	1,420e-2
1	1,206e-1	1,235e-1	5	1,227e-1	1,195e-1	9	5,926e-3	5,987e-3
2	1,935e-1	1,896e-1	6	7,060e-2	6,966e-2	10	1,919e-3	1,878e-3
3	2,147e-1	2,247e-1	7	3,486e-2	3,329e-2	11	9,029e-4	9,164e-4

Рассмотрим вероятности потери «нетерпеливой» заявки (формула (2)), которая является интегральной характеристикой СМО, при других распределениях обслуживания и терпения (табл. 2) и различных коэффициентах загрузки $\rho = \lambda b_1/n$. В скобках указаны коэффициенты вариации.

Таблица 2

Вероятность ухода заявки по нетерпению при различных коэффициентах вариации и загрузке

Рас- пред. об- служ.	ρ	Распределение терпения							
		$D(0)$		$E_3(0,577)$		$M(1)$		$H_2(2)$	
		ИМ	Числ.	ИМ	Числ.	ИМ	Числ.	ИМ	Числ.
$D(0)$	0,2	6,84e-3	7,55e-3	8,45e-4	5,22e-4	3,59e-3	3,47e-3	7,27e-3	6,96e-3
	0,7	1,10e-1	1,23e-1	3,95e-2	4,18e-2	8,05e-2	8,04e-2	1,23e-1	1,22e-1
	1,4	3,54e-1	3,61e-1	2,59e-1	2,72e-1	3,09e-1	3,10e-1	3,58e-1	3,56e-1
$E_3(0,578)$	0,2	2,43e-2	2,46e-2	9,53e-3	9,21e-3	4,00e-3	3,98e-3	7,64e-3	7,54e-3
	0,7	1,48e-1	1,56e-1	5,17e-2	5,42e-2	8,96e-2	8,95e-2	1,30e-1	1,29e-1
	1,4	3,70e-1	3,79e-1	2,63e-1	2,74e-1	3,14e-1	3,15e-1	3,66e-1	3,62e-1
$M(1)$	0,2	3,97e-1	4,04e-1	2,06e-3	1,93e-3	4,79e-3	4,79e-3	8,40e-3	8,35e-3
	0,7	1,95e-1	1,99e-1	6,90e-2	7,18e-2	1,02e-1	1,02e-1	1,39e-1	1,38e-1
	1,4	3,70e-1	3,79e-1	2,69e-1	2,77e-1	3,20e-1	3,20e-1	3,74e-1	3,71e-1
$H_2(1,5)$	0,2	7,40e-2	7,25e-2	3,40e-3	3,31e-3	5,88e-3	5,86e-3	9,23e-3	9,22e-3
	0,7	2,41e-1	2,42e-1	8,91e-2	9,15e-2	1,16e-1	1,16e-1	1,48e-1	1,47e-1
	1,4	4,27e-1	4,32e-1	2,79e-1	2,80e-1	3,27e-1	3,25e-1	3,81e-1	3,78e-1

Из табл. 2 следует, что при фиксированном распределении терпения с ростом коэффициента вариации обслуживания вероятность ухода заявки из очереди возрастает. Также с ростом коэффициента загрузки прослеживается снижение влияния вида распределений обслуживания и терпения на вероятность ухода из очереди.

Поскольку в реальных организационно-технических системах уходы нетерпеливых заявок, как правило, приводят к негативным последствиям, интересной является задача исследования дробления производительности (т.е. замены одного канала обслуживания несколькими с той же суммарной производительностью) на вероятность потери заявки. С этой целью была рассчитана системы $M/D/5-E_3$ при коэффициенте загрузки $\rho = 0,9$. Оказалось, что при замене одного канала двумя исследуемая вероятность уменьшилась в 1,7 раза, тремя – в 2,4 раза, четырьмя – в 3 раза.

Заключение

Предложена диаграмма переходов для системы $M/H_2/n-H_2$, на основе диаграммы составлена Фортран-программа генерации матриц интенсивностей переходов и расчёта стационарного распределения числа заявок и вероятности ухода нетерпеливой заявки. Хорошее согласие результатов, полученных численным методом и с помощью имитационной модели, подтверждает правильность теоретических выкладок и реализующих их программ. Показаны возможности H_2 -аппроксимации различных исходных распределений обслуживания и терпения; недопустимость показательной аппроксима-

ции времени обслуживания и терпения в том случае, когда коэффициенты вариации распределений заметно отличаются от единицы и коэффициент загрузки системы невысок; нетривиальный эффект снижения доли нетерпеливых от дробления производительности. В настоящее время ведется разработка метода расчета временных характеристик.

Предложенный метод может быть применен при проектировании колл-центров, служб быстрого реагирования, систем обработки устаревающей информации и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoshi K., Iijima S., Takahashi Y., Komatsu N. Traffic Performance for a Time-Out Scheme Communication System // Proc. of International Conference ICUMT 2009. St. Petersburg, 2009. P. 1–6.
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания : учеб. М. : РУДН им. П. Лумумбы, 1995. 529 с.
3. Roubos A., Jouini O. Call Centers with Hyperexponential Patience Modeling // International Journal of Production Economics. 2013. V. 141. P. 307–315.
4. Дудин С.А., Дудина О.С. Модель функционирования колл-центра как система MAP/PN/N/R-N с нетерпеливыми запросами // Проблемы передачи информации. 2011. № 47. С. 68–83.
5. Кендалл М. Дж., Стюарт А. Теория распределений : пер. с англ. М. : Наука, 1966. 587 с.
6. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Опыт расчёта сложных систем массового обслуживания // Информационно-управляющие системы. 2009. № 2. С. 56–62.
7. Takahashi Y., Takami Y.A. Numerical Method for the Steady-State Probabilities of a GI/G/c Queuing System in General Class // Journal of the Operations Research Society of Japan. 1976. V. 19, No. 2. P. 147–155.
8. Рыжиков Ю.И., Хомоненко А.Д. Итеративный метод расчета многоканальных систем с произвольным распределением времени обслуживания // Проблемы управления и теории информации. 1980. № 3. С. 203–213.
9. Рыжиков Ю.И., Уланов А.В. Имитационное моделирование систем с «нетерпеливыми» заявками // Имитационное моделирование. Теория и практика : тр. VI Всерос. конф. Казань, 2013. С. 339–342.
10. Башарин Г.П., Бочаров П.П., Коган Я.А. Анализ очередей в вычислительных системах. М. : Наука ; Физматгиз, 1989. 336 с.

Рыжиков Юрий Иванович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: ryzhbox@yandex.ru

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

Уланов Александр Викторович. E-mail: ulanov246@rambler.ru

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского

Поступила в редакцию 12 марта 2014 г.

Ryzhikov Yury I., Ulanov Alexander V. (Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg Institute of Informatics and Automation of RAS, St. Petersburg, Russian Federation).

Calculation of the M/H₂/n-H₂ queuing system with impatient customers.

Keywords: queuing systems; impatient customers; restricted waiting time; hyperexponential distribution; numerical methods.

The paper deals with queuing systems with impatient customers. The known methods for calculating these systems refers to either the purely Markov model M/M/n-M (in addition to the Kendall notation the hyphen indicates the type of a patience distribution law) or such methods have very restricted conditions, namely, the single-channel service and great loading, the exponential distribution service or patience. We propose a method for calculating the multi-channel QS with the second order hyperexponential distributions both service time and patience M/H₂/n-H₂.

The method relies on the method of fictitious phases. The calculation consists of the following stages:

- approximation by phase type distributions;
- construction of the diagram of transitions;
- forming the matrixes of transition intensities in accordance with the diagram;
- deriving the balance equations and their solutions and calculating the QS stationary characteristics.

The second order hyperexponential distribution (H₂) and three initial moments of the origin distribution have been used. Then we have combined the proposed Roubos & Jouini diagram for M/M/n-H₂ queue with the well known diagram of system without impatient customers M/H₂/n. The balance equations were solved by the iterative Takahashi & Takami's method.

The probability of impatience queue is defined as

$$P_{imp} = \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^k (j\gamma_1 + (k-j)\gamma_2) \pi'_{k,j},$$

where λ is the intensity of the incoming flow; γ_1 and γ_2 are the intensities for the exponential phase of the H₂-patience; $\pi'_{k,j}$ is the probability that the queue length is k , of which j are the first type of patience.

It is shown the influence of the variation coefficients of service and patience. Also, the dependence of the probability of removing for impatience queue on the load coefficient is investigated. We concluded using Markov models for the calculation of systems, in which the service and patience distributions are markedly different from the exponential ones, gives incorrect results. The effect of fragmentation performance and its influence on the probability of impatience is made known.

The results can be applied in the design of call centers, emergency services, systems of obsolescent information processing, etc.

REFERENCES

1. Hoshi K., Iijima S., Takahashi Y., Komatsu N. Traffic Performance for a Time-Out Scheme Communication System. *Proc. of International Conference ICUMT*. St. Petersburg, 2009, pp. 1-6.
2. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory]. Moscow: Russian University of Peoples' Friendship Publ., 1995. 529 p.
3. Roubos A., Jouini O. Call centers with hyperexponential patience modeling. *International Journal of Production Economics*, 2013, vol. 141, pp. 307-315. DOI: 10.1016/j.ijpe.2012.08.011
4. Dudin S.A., Dudina O.S. Call center operation model as a MAP/PH/N/R-N system with impatient customers. *Problemy peredachi informatsii – Problems of Information Transmission*, 2011, vol. 47, no. 4, pp. 68-83. (In Russian).
5. Kendall M., Stuart A. *The advanced theory of statistics. Distribution theory*. Translated from English. Moscow: Nauka Publ., 1966. 587 p.
6. Ryzhikov Yu.I., Ulanov A.V. Experience of the Complex Queueing Systems Calculation. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy – Information and Control System*, 2009, vol. 39, no. 2, pp. 56-62. (in Russian).
7. Takahashi Y., Takami Y.A. Numerical Method for the Steady-State Probabilities of a GI/G/c Queueing System in General Class. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 1976, vol. 19, no. 2, pp. 147-155.
8. Ryzhikov Yu.I., Khomonenko A.D. Iterativnyy metod rascheta mnogokanal'nykh sistem s proizvol'nym raspredeleniem vremeni obsluzhivaniya [Iterative methods of multichannel queueing system calculation with arbitrary service time distribution]. *Problemy upravleniya i teorii informatsii*, 1980, vol. 3, pp. 203-213.
9. Ryzhikov Yu.I., Ulanov A.V. [Simulation of queueing systems with impatient customers]. *Imitatsionnoe modelirovanie. Teoriya i praktika : tr. VI Vseros. konf* [Proc. of 6th Russian conference "Simulation. Theory and Practice"]. Kazan, 2013, pp. 339-342. (In Russian).
10. Basharin G.P., Bocharov P.P., Kogan Ya.A. *Analiz ocheredey v vychislitel'nykh sistemakh* [Queueing analysis in computing systems]. Moscow: Nauka Publ., 1989. 336 p.

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ В ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ РИСКА С ЗАВИСИМЫМИ ФИНАНСОВЫМ И СТРАХОВЫМ РИСКАМИ

Рассмотрена дискретная модель риска с зависимыми финансовым и страховым рисками и с тяжелым хвостом распределения ущербов. Построен алгоритм вычисления вероятности разорения за конечное число шагов на основе аппроксимации распределения ущербов смесью показательных распределений и доказательства теоремы непрерывности, обосновывающей такой подход. Разработаны специальные методы преобразования интегральных выражений, решена задача о малых знаменателях, построена экономичная процедура перечисления целочисленных векторов с фиксированной суммой их компонент. Для вероятности разорения в рассматриваемой модели риска получены асимптотические соотношения в случае специального класса распределений страхового риска. Для тестирования построенных алгоритмов проведены вычислительные эксперименты.

Ключевые слова: вероятность разорения; страховые и финансовые риски; конечная смесь экспоненциальных распределений.

В последнее десятилетие среди ведущих специалистов по теории риска, финансовой математике и теории массового обслуживания (С. Асмуссен [1], В. Уитт [2], В.В. Калашников [3], А.А. Новиков [4]) ведутся дискуссии о точности асимптотических формул для моделей с тяжелыми хвостами распределений. Многочисленные вычислительные эксперименты показывают, что асимптотические формулы достигают высокой точности при больших значениях аргумента. В свою очередь, известные численные методы (например, метод Монте-Карло) хорошо работают при сравнительно небольших значениях аргумента. В результате возникают области аргументов, в которых известные численные методы уже не работают из-за трудоемкости, а асимптотические формулы еще не работают.

Для вычисления в этих областях А.А. Новиков предложил аппроксимировать законы распределений с тяжелыми хвостами смесью экспоненциальных распределений. При реализации этого предложения возникла необходимость вычисления вероятности выхода авторегрессионной последовательности из некоторой области за конечное число шагов. А.А. Новиков решал данную задачу с помощью теории мартигалов, но этот метод работает в достаточно узких предположениях. В настоящей работе удалось снять эти ограничения за счет проведения прямых вычислений с помощью рекуррентных соотношений.

В статье исследована дискретная модель риска с тяжелым хвостом распределения ущербов и зависимыми финансовым и страховым рисками. Предполагалось, что инфляционный фактор представим цепью Маркова общего вида с конечным числом значений, а распределение страхового ущерба определяется этими значениями. Такое усложнение модели риска было инициировано А.А. Новиковым и ранее не попадало в поле зрения специалистов по теории риска. Однако сейчас такая зависимость становится существенной в связи с различными антропогенными и природными катастрофами, на размеры которых влияют финансовые факторы.

Продолжая идею работ [5–7], мы строим рекуррентный алгоритм вычисления вероятности разорения рассмотренной модели риска за конечное число шагов на основе аппроксимации распределения ущербов суммой показательных распределений и доказательства теорем непрерывности, обосновывающих такой подход. Для этого разработаны специальные методы преобразования интегральных выражений, решена задача о малых знаменателях и построена экономичная процедура перечисления векторов с фиксированной суммой неотрицательных целочисленных компонент. На основе построенного алгоритма проведен вычислительный эксперимент, который показал его преимущества перед методом Монте-Карло при близости результатов вычислений.

Наряду с точными формулами вычисления вероятности разорения получены асимптотические формулы в случае субэкспоненциально распределенного страхового риска, которые сравнивались с результатами прямых вычислений.

1. Точные формулы

Рассмотрим дискретную модель риска (с шагом в один год) с начальным капиталом $x \geq 0$:

$$U_n = U_{n-1}B_n - X_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad U_0 = x. \quad (1)$$

В работе [8] $X_n = Z_n - a$ называется страховым риском, а B_n^{-1} – финансовым риском. Здесь $a > 0$ – доход, а $Z_n \geq 0$ – страховой ущерб на шаге n . Введем в рассмотрение цепь Маркова q_n , $n > 0$, с матрицей переходных вероятностей $\|p_{sq}\|_{s,q \in Q}$ и начальным состоянием $q_0 = s$, $Q = \{1, \dots, m\}$. Предположим, что инфляционный фактор B_n определяется цепью Маркова q_n с помощью равенства $B_n^{-1} = r_{q_n}$, $n = 1, 2, \dots$, в котором детерминированные $r_q > 1$, $q \in Q$. Определим время разорения

$$\tau(x, s) = \inf \{n = 1, 2, \dots : U_n \leq L \mid U_0 = x, q_0 = s\} \quad (2)$$

и вероятность разорения на конечном числе шагов $\psi_n(x, s) = P(\tau(x, s) \leq n)$.

Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины w_n , $n > 0$, не зависят от цепи Маркова q_n , $n > 0$, и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Обозначим G_q , $G_q(-a) = 0$, $q \in Q$, функцию распределения страхового риска X_n и определим зависимость q_n и X_n соотношением $X_n = G_{q_n}^{-1}(w_n)$. По аналогии с [9, лемма 2.1] было доказано утверждение.

Теорема 1. При $x > L$ справедливы формулы:

$$\psi_1(x, s) = \sum_{q \in Q} p_{sq} \bar{G}_q(xr_q - L), \quad \psi_{n+1}(x, s) = \psi_1(x, s) + \sum_{q \in Q} p_{sq} \int_{-\infty}^{xr_q - L} \psi_n(xr_q - z, q) dG_q(z), \quad n > 0. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение m -мерные векторы $1_q = (\delta_{1q}, \dots, \delta_{mq})$, где δ_{ij} – символ Кронекера и

$$R = (r_1, \dots, r_m), \quad K = (k_1, \dots, k_m), \quad k_i \in \{0, 1, \dots\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Обозначим

$$R^K = \prod_{q \in Q} r_q^{k_q}, \quad |K| = \sum_{q \in Q} k_q.$$

Пусть для вещественных a_{iq} , $1 \leq i \leq l$, $q \in Q$, $\sum_{q \in Q} a_{iq} = 1$,

$$\bar{G}_q(t) = \sum_{i=1}^l a_{iq} \exp(-\lambda_i(t+a)), \quad t \geq -a. \quad (4)$$

Теорема 2. Предположим, что

$$r_q L - L + a > 0, \quad q \in Q, \quad (5)$$

$$R^K \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \geq 1, \quad j \leq l, \quad |K| \geq 1. \quad (6)$$

Тогда существуют вещественные числа $B_{s,i,n}^K$, $1 \leq i \leq l$, $s \in Q$, $1 \leq |K| \leq n$, такие, что для $x > L$

$$\psi_n(x, s) = \sum_{1 \leq |K| \leq n} \sum_{i=1}^l B_{s,i,n}^K \exp(-R^K \lambda_i(x-L)), \quad (7)$$

причем

$$B_{s,i,1}^{1_q} = p_{sq} a_{iq} \exp\left(-\lambda_i \left(R^{1_q} L - L + a\right)\right), \quad (8)$$

$$B_{s,i,n+1}^K = -\sum_{q \in Q} \sum_{j=1}^l I(k_q > 0) F_{s,q,i,j,n}^{K-1_q}, \quad 1 \leq |K| \leq n+1, \quad B_{s,i,n+1}^{1_q} = \sum_{1 \leq |K| \leq n} \sum_{j=1}^l D_{s,q,j,i,n}^K + B_{s,i,1}^{1_q}, \quad (9)$$

где

$$D_{s,q,i,j,n}^K = \frac{p_{sq} B_{q,i,n}^K a_{jq} \lambda_j}{R^K \lambda_i - \lambda_j} \exp\left(-\lambda_j \left(R^{1_q} L - L + a\right)\right), \quad F_{s,q,i,j,n}^K = \frac{p_{sq} B_{q,i,n}^K a_{jq} \lambda_j}{R^K \lambda_i - \lambda_j} \exp\left(-\lambda_i \left(R^{1_q} L - L + a\right)\right).$$

Доказательство. Из (3)–(6) имеем при $x > L$

$$\psi_1(x, s) = \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^l p_{sq} a_{iq} \exp\left(-\lambda_i \left(R^{1_q} L - L + a\right)\right) \exp\left(-R^{1_q} \lambda_i (x-L)\right),$$

и, следовательно, формула (8) верна.

Обозначим

$$C_{s,q,i,j,n}^K = \frac{p_{sq} B_{q,i,n}^K a_{jq} \lambda_j}{R^K \lambda_i - \lambda_j} \exp\left(R^K \lambda_i (L-a)\right).$$

Из теоремы (1) получим

$$\begin{aligned} \psi_n(x, s) - \psi_1(x, s) &= \sum_{q \in Q} \int_{-a}^{xR^{1_q} - L} \sum_{i=1}^l \sum_{1 \leq |K| \leq n} p_{sq} B_{q,i,n}^K \exp\left(-R^K \lambda_i \left(R^{1_q} x - L - z\right)\right) \times \\ &\quad \times \sum_{j=1}^l a_{jq} \lambda_j \exp\left(-\lambda_j (z+a)\right) dz = [z+a=u] = \\ &= \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \sum_{1 \leq |K| \leq n} p_{sq} B_{q,i,n}^K a_{jq} \lambda_j \int_0^{xR^{1_q} - L + a} \exp\left(-R^K \lambda_i \left(R^{1_q} x - L - u + a\right)\right) e^{-\lambda_j u} du = \\ &= \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \sum_{1 \leq |K| \leq n} C_{s,q,i,j,n}^K e^{-R^{K+1_q} \lambda_i x} \left[\exp\left(\left(R^K \lambda_i - \lambda_j\right) \left(xR^{1_q} - L + a\right)\right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} &\exp\left(-R^{K+1_q} \lambda_i x\right) \left[\exp\left(\left(R^K \lambda_i - \lambda_j\right) \left(xR^{1_q} - L + a\right)\right) - 1 \right] = \\ &= \exp\left(-R^{1_q} \lambda_j (x-L)\right) \exp\left(-R^{1_q} \lambda_j L - \left(R^K \lambda_i - \lambda_j\right) (L-a)\right) - \exp\left(-R^{K+1_q} \lambda_i (x-L)\right) \exp\left(-R^{K+1_q} L \lambda_i\right), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} &C_{s,q,i,j,n}^K \exp\left(-R^{K+1_q} \lambda_i x\right) \left[\exp\left(\left(R^K \lambda_i - \lambda_j\right) \left(xR^{1_q} - L + a\right)\right) - 1 \right] = \\ &= \left[D_{s,q,i,j,n}^K \exp\left(-R^{1_q} \lambda_j (x-L)\right) - F_{s,q,i,j,n}^K \exp\left(-R^{K+1_q} \lambda_i (x-L)\right) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\psi_n(x, s) - \psi_1(x, s) = \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \sum_{1 \leq |K| \leq n} \left[D_{s,q,i,j,n}^K e^{-R^{1_q} \lambda_j (x-L)} - F_{s,q,i,j,n}^K e^{-R^{K+1_q} \lambda_i (x-L)} \right],$$

$$\begin{aligned}\Psi_{n+1}(x, s) &= \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \sum_{1 \leq |K| \leq n} \left[D_{s,q,i,j,n}^K e^{-R^{1q} \lambda_i(x-L)} - F_{s,q,i,j,n}^K e^{-R^{K+1q} \lambda_i(x-L)} \right] + \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^l B_{s,i,l}^{1q} e^{-R^{1q} \lambda_i(x-L)} = \\ &= \sum_{1 \leq |K| \leq n+1} \sum_{i=1}^l B_{s,i,n+1}^K e^{-R^K \lambda_i(x-L)}\end{aligned}$$

и, таким образом, рекуррентные формулы (9) верны. Теорема доказана.

2. Асимптотические формулы

Используя подход работ [5, теорема 5.1; 6, лемма 3.2], был получен следующий результат.

Теорема 3. Если ф. р. $G_q(t)$ являются субэкспоненциальными и для $q' \neq q$, $q', q \in Q$, справедливо одно из двух соотношений

$$G_{q'}(t) = O(G_q(t)), \quad G_q(t) = O(G_{q'}(t)), \quad t \rightarrow \infty,$$

то

$$\Psi_{n+1}(t, s) \sim \sum_{q \in Q} p_{sq} \left(\Psi_n(t r_q, q) + \bar{G}_q(t r_q) \right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Следствие 1. Если $\exists c_q, \alpha_q > 0$, $q \in Q: \bar{G}_q(t) \sim c_q t^{-\alpha_q}$, $t \rightarrow \infty$, то

$$\Psi_n(t, s) \sim c_{n,s} t^{-\alpha}, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\alpha = \min_{q \in Q} \alpha_q$, $c_{1,s} = \sum_{q \in Q_0} p_{sq} c_q r_q^{-\alpha}$, $Q_0 = \{q: \alpha_q = \alpha\}$, $c_{n+1,s} = \sum_{q \in Q} p_{sq} r_q^{-\alpha} c_{n,q} + c_{1,s}$, $n > 0$.

Следствие 2. Если $\exists b_q > 0$, $0 < \alpha_q < 1$, $q \in Q: \bar{G}_q(t) \sim e^{-b_q t^{\alpha_q}}$, $t \rightarrow \infty$, то

$$\Psi_n(t, s) \sim c_{n,s} \exp(-d_n t^\alpha), \quad t \rightarrow \infty,$$

где $d_1 = \min_{q \in Q_0} b_q r_q^\alpha$, $d_{n+1} = \min \left(d_1, \min_{q \in Q_0} d_n r_q^\alpha \right)$,

$$c_{1,s} = \sum_{q \in Q_0, b_q r_q^\alpha = d_1} p_{sq}, \quad c_{n+1,s} = c_{1,s} I(d_1 = d_{n+1}) + \sum_{q \in Q} p_{sq} c_{n,q} I(d_{n+1} = d_n r_q^\alpha).$$

3. Теоремы непрерывности

Обозначим F_q , $q \in Q$, возмущенные ф.р. и положим $\tilde{\Psi}_n(t)$ соответствующие вероятности разорения. Тогда, используя равномерную метрику $\rho(G_q(t), F_q(t))$, теорему 1 и результаты по устойчивости систем массового обслуживания [7, теорема 1], нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. Для $n > 0$

$$\rho(\Psi_n(t, q), \tilde{\Psi}_n(t, q)) \leq n \max_{q \in Q} \rho(F_q(t), G_q(t)).$$

Теорема 2 и теорема Бернштейна позволяют построить приближенный алгоритм вычисления вероятности разорения. Но линейная по n верхняя оценка в (12) неудобна для этой цели. Поэтому мы переформулируем теорему 4 в метрике L_1 .

Обозначим

$$\frac{1}{d} = \sum_{q \in Q} \frac{p_{sq}}{r_q} < 1, \quad \frac{1}{c} = \max_{q \in Q} \frac{1}{r_q} < 1.$$

Теорема 5. Для $n > 0$

$$L_1(\psi_n(t, q), \tilde{\psi}_n(t, q)) \leq \frac{\max_{q \in Q} L_1(G_q(t), F_q(t))}{d-1}, \quad q \in Q. \quad (11)$$

Доказательство. Предположим, что $r > 0$, d – вещественные числа и $\tilde{S}(x)$, $S(x)$, $R(x)$ ф. р. на действительной оси. Тогда нетрудно получить («*» означает свертку функций распределения):

$$L_1((\tilde{S} * R)(x), (S * R)(x)) \leq L_1(\tilde{S}(x), S(x)), \quad L_1(\tilde{S}(rx + f), S(rx + f)) = \frac{L_1(\tilde{S}(x), S(x))}{r}. \quad (12)$$

Следовательно, из теоремы 1 имеем

$$L_1(\tilde{\psi}_{n+1}(x, s), \psi_{n+1}(x, s)) \leq \frac{L_1(\tilde{\psi}_n(x, s), \psi_n(x, s)) + \delta}{d}$$

и индукция по n приводит к формуле (11). Теорема доказана.

Легко получить, что при выполнении условия

$$\max_{q \in Q} \int_0^{\infty} \bar{G}_q(t) dt = C < \infty \quad (13)$$

существует невозрастающая функция $\psi(t, q): \psi(t, q) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \psi(L, q) = 1$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t, q) = \psi(t, q), \quad t \rightarrow \infty, \quad q \in Q.$$

Теорема 6. Если выполняется условие (13), то

$$L_1(\psi_n(t, q), \psi(t, q)) \leq \frac{C}{(c-1)c^{n-1}}, \quad n > 0. \quad (14)$$

Доказательство. Для $n = 1$ формула (14) верна. Докажем формулу (14), используя индукцию по n . Предположим, что (16) имеет место для некоторого $n > 0$. Используя теорему 1 и соотношение (12), нетрудно получить

$$L_1(\psi(t, s), \psi_{n+1}(t, s)) \leq \sum_{q \in Q} p_{sq} L_1(\psi(r_q t, q), \psi_n(r_q t, q)) = \frac{1}{c} \sum_{q \in Q} p_{sq} L_1(\psi(t, q), \psi_n(t, q)).$$

Теорема доказана.

Замечание. Обозначим $n(\varepsilon) = \inf(n: L_1(\psi_1, \psi) < \varepsilon)$. Тогда из теоремы 6 получим неравенство

$$n(\varepsilon) \leq 2 + \frac{\ln L_1(\psi_1, \psi) - \ln \varepsilon}{\ln R} = n_1(\varepsilon),$$

из которого устанавливаем, что если $L_1(\psi_{n(\varepsilon)}, \psi) < \varepsilon$, то достаточно вычислить функции ψ_n , $1 \leq n \leq n_1(\varepsilon)$.

Следующее утверждение является следствием результатов работ [9, 10].

Теорема 7. Пусть ф. р. $F(t)$ сосредоточена на $[0, \infty)$ и имеет конечное среднее и непрерывную положительную плотность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить ф. р. $R(t)$, сосредоточенную на $[0, \infty)$ с хвостом $\bar{R}(t) = \sum_{i=1}^r a_i \exp(-b_i t)$, $t > 0$, $-\infty < a_i < \infty$, $0 < b_i < \infty$, такую, что $L_1(F, R) < \varepsilon$.

4. Вычислительные задачи

Введем множества векторов

$$\mathcal{K}_i^j = \left\{ K = (k_1, \dots, k_j) : k \in \{0, 1, \dots\}, \sum_{q=1}^j k_q = i \right\}, \quad i \geq 0, j = 1, \dots, m,$$

и обозначим $|\mathcal{K}_i^j|$ число векторов множества $\mathcal{K}_i^j$. Наша задача состоит в перечислении всех векторов множества $K = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i^m$. Нетрудно построить алгоритм определения множества $\mathcal{K}_i^m$ по множеству $\mathcal{K}_{i-1}^m$ в виде

$$\mathcal{K}_i^m = \left\{ K + 1_q : K \in \mathcal{K}_{i-1}^m, q = 1, \dots, m \right\}.$$

Но сложность этого алгоритма пропорциональна m^n , и он может генерировать совпадающие векторы. Поэтому был построен более эффективный алгоритм.

Очевидно, что

$$\mathcal{K}_i^{j+1} = \bigcup_{t=0}^i \left\{ (K, t) : K \in \mathcal{K}_{i-t}^j \right\}, \quad 1 \leq j \leq m-1, 1 \leq i \leq n,$$

где $\mathcal{K}_i^1 = \{i\}$, $1 \leq i \leq n$, а множество $\mathcal{K}_0^j$, $1 \leq j \leq m$, состоит из единственного j -мерного вектора с нулевыми компонентами. Так как

$$1 = |\mathcal{K}_0^j| \leq \dots \leq |\mathcal{K}_i^j|, \quad |\mathcal{K}_i^{j+1}| = \sum_{t=0}^i |\mathcal{K}_{i-t}^j| = \sum_{t=0}^i |\mathcal{K}_t^j| \leq (i+1) |\mathcal{K}_i^j| \leq (i+1)^{j+1},$$

то сложность построенного алгоритма меньше $(m+1)(n+1)^{m+1}$.

Используя теоремы непрерывности (5), (6), можно, слегка возмущая r_i, λ_j и, следовательно, слегка возмущая в метрике L_1 вероятность разорения $\psi_n(t, s)$, добиться выполнения условия (6) теоремы 2. Иными словами, можно для любого $\varepsilon > 0$ подобрать $s_1, \dots, s_m, v_1, \dots, v_m > 0$, такие, что выполняются неравенства

$$|s_i - r_i| < \varepsilon, \quad i \in Q, \quad |v_j - \lambda_j| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, l, \quad (15)$$

и для любого K справедлив аналог соотношения (6)

$$S^K v_i \neq v_j, \quad 1 \leq i, j \leq l, \quad |K| \geq 1, \quad S = (s_1, \dots, s_m).$$

Для этого достаточно взять натуральное число b , такое, что $2^b < \varepsilon$, и определить рациональные числа $s_i = \frac{a_i}{2^b}$, $i \in Q$, $v_j = \frac{b_j}{2^b}$, $j = 1, \dots, l$, с нечетными числителями, удовлетворяющие неравенствам (15).

5. Вычислительный эксперимент

Зададим параметры рассмотренной в разделе 1 модели риска

$$x = 1, m = 2, L = 0,5, a = 2, r_1 = 1,03, r_2 = 1,08, p_{11} = \frac{5}{9}, p_{12} = \frac{4}{9}, p_{21} = \frac{4}{27}, p_{22} = \frac{23}{27}$$

и предположим, что ущербы имеют паретовские распределения с хвостами

$$\bar{G}_1(t) = (1 + 5(t + a))^{-1,2}, \bar{G}_2(t) = (1 + 0,83(t + a))^{-2,2}, t + a > 0.$$

В силу теоремы (7) хвосты распределений были аппроксимированы смесями экспоненциальных распределений

$$\bar{G}_q(t) \approx \sum_{i=1}^{27} a_{iq} \exp(-\lambda_i(t + a)), t \geq -a,$$

с коэффициентами $a_{i1}, a_{i2}, \lambda_i$, представленными в табл. 1 и взятыми из работы [2].

Вероятность разорения $\psi_n(x, s)$ была вычислена с помощью формулы теоремы (2) и методом Монте-Карло с 1 000 000 реализаций, что продемонстрировано в табл. 2. Также вероятность разорения $\psi_5(x, s)$ была вычислена с помощью точной формулы теоремы 2 и асимптотической формулы следствия 1 теоремы 3, что продемонстрировано в табл. 3.

Таблица 1

Значения коэффициентов $a_{i1}, a_{i2}, \lambda_i$

i	a_{i1}	a_{i2}	λ_i	i	a_{i1}	a_{i2}	λ_i
1	0,089437	0	23,304	15		0,193963	4,491
2	0,533823	0	6,516	16	0	0,651199	1,422
3	0,307218	0	1,546	17	0	0,147814	0,371
4	0,0059768	0	0,306	18	0	0,006832	0,076
5	0,008462	0	0,057	19	0	0,000188	0,014
6	0,001122	0	0,01	20	0	$4,61 \times 10^{-6}$	0,003
7	0,000147	0	0,002	21	0	$1,11 \times 10^{-7}$	0,0005
8	0,0000192	0	0,00035	22	0	$2,65 \times 10^{-9}$	0,000088
9	$2,5 \times 10^{-6}$	0	0,000065	23	0	$6,35 \times 10^{-11}$	0,000016
10	$3,27 \times 10^{-7}$	0	0,000012	24	0	$1,52 \times 10^{-12}$	$2,9 \times 10^{-6}$
11	$4,27 \times 10^{-9}$	0	$2,2 \times 10^{-6}$	25	0	$3,36 \times 10^{-14}$	$5,4 \times 10^{-7}$
12	$5,56 \times 10^{-10}$	0	$3,9 \times 10^{-7}$	26	0	$8,51 \times 10^{-16}$	$9,7 \times 10^{-8}$
13	$7,18 \times 10^{-10}$	0	$6,8 \times 10^{-8}$	27	0	$1,72 \times 10^{-17}$	$1,58 \times 10^{-8}$
14	$8,37 \times 10^{-11}$	0	$8,3 \times 10^{-9}$				

Таблица 2

Вероятности разорения $\psi_n(x, s)$

Начальное состояние s	Число шагов n	Методы	$\psi_n(x, s)$	Время счета, с	Начальное состояние s	Число шагов n	Методы	$\psi_n(x, s)$	Время счета, с.
1	1	Монте-Карло	0,066038	71	2	1	Монте-Карло	0,079685	71
1	1	Формула	0,0586839	0	2	1	Формула	0,073708	0
1	2	Монте-Карло	0,09866	117	2	2	Монте-Карло	0,115185	117
1	2	Формула	0,0901557	0,1	2	2	Формула	0,107071	0,1
1	3	Монте-Карло	0,118499	165	2	3	Монте-Карло	0,135518	165
1	3	Формула	0,109308	0,3	2	3	Формула	0,127891	0,3
1	4	Монте-Карло	0,130707	212	2	4	Монте-Карло	0,148205	212
1	4	Формула	0,121714	1,3	2	4	Формула	0,140592	1,3
1	5	Монте-Карло	0,139442	260	2	5	Монте-Карло	0,157148	260
1	5	Формула	0,130206	2,8	2	5	Формула	0,149217	2,8

Сравнение в табл. 2 результатов вычисления вероятности разорения методом Монте-Карло и с помощью рекуррентных соотношений показывает не только преимущество метода рекуррентных соотношений перед методом Монте-Карло по быстродействию, но и близость результатов, получаемых этими методами.

Т а б л и ц а 3

Значения асимптотических и точных формул

Начальный капитал x	Формула	$\psi_5(x, 1)$	Начальный капитал x	Формула	$\psi_5(x, 1)$
1 000	Асимптотическая	0,000056666	6 000	Асимптотическая	$6,59995 \times 10^{-6}$
1 000	Точная	0,0000563073	6 000	Точная	$6,77988 \times 10^{-6}$
2 000	Асимптотическая	0,0000246653	7 000	Асимптотическая	$5,48535 \times 10^{-6}$
2 000	Точная	0,0000232221	7 000	Точная	$5,51602 \times 10^{-6}$
3 000	Асимптотическая	0,0000151627	8 000	Асимптотическая	$4,6732 \times 10^{-6}$
3 000	Точная	0,0000151122	8 000	Точная	$4,60568 \times 10^{-6}$
4 000	Асимптотическая	0,0000107362	9 000	Асимптотическая	$4,005724 \times 10^{-6}$
4 000	Точная	0,0000111379	9 000	Точная	$3,93824 \times 10^{-6}$
5 000	Асимптотическая	$8,21407 \times 10^{-6}$	10 000	Асимптотическая	$3,57538 \times 10^{-6}$
5 000	Точная	$8,56365 \times 10^{-6}$	10 000	Точная	$3,43885 \times 10^{-6}$

Заключение

Результаты вычислительного эксперимента показали, что предложенный в работе метод прямого вычисления вероятности разорения в дискретной модели риска с зависимыми страховыми и финансовыми рисками позволяет оценивать точность асимптотических формул. Кроме того появляется возможность достаточно точно вычислять вероятность разорения в области средних значений аргумента, что до сих пор является трудной задачей прикладной теории вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Asmussen S. Ruin Probabilities. Singapore : World Scientific, 2000.
2. Feldmann A., Whitt W. Fitting mixtures of exponentials to long-tailed distributions to analyze network performance models // Performance Evaluation. 1998. V. 31. P. 245–279.
3. Kalashnikov V. Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1997.
4. Kordzhakhia N., Novikov A., Tsitsiashvili G.Sh. On ruin probabilities in risk models with interest rate. In monograph: Mathematical and Statistical Methods in Actuarial Sciences and Finance / eds. by C. Perna, M. Sibilio. Springer Verlag, 2012. P. 245–253.
5. Cai J., Dicson D.C.M. Ruin probabilities with a Markov chain interest model // Insurance: Mathematics and Economics. 2004. V. 35. P. 513–525.
6. Tang Q., Tsitsiashvili G. Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks // Stochast. Process. Appl. 2003. V. 108, No. 2. P. 299–325.
7. Золотарев В.М. Стохастическая непрерывность систем массового обслуживания // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Т. 21, № 2. С. 260–279.
8. Norberg R. Ruin problems with assets and liabilities of diffusion type // Stochastic Process. Appl. 1999. V. 81, No. 2. P. 255–269.
9. Dufresne D. Stochastic life annuities abstract // American Actuarial Journal. 2007. V. 11, No. 1. P. 136–157.
10. Ko B., Ng A.C.Y. "Stochastic Annuities", Daniel Dufresne. Discussions of papers already published // American Actuarial Journal. 2007. V. 11, No. 3. P. 170–171.

Цициашвили Гурам Шалвович, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: guram@iam.dvo.ru

Осипова Марина Анатольевна, канд. физ.-мат. наук, доцент. E-mail: mao1975@list.ru

Дальневосточный федеральный университет,

ИПМ ДВО РАН (г. Владивосток)

Поступила в редакцию 14 декабря 2013 г.

Tsitsiashvili Gurami Sh., Osipova Marina A. (IAM, FEBRAS, Vladivostok, Russian Federation).

Calculation of ruin probability in discrete risk model with dependent insurance and financial risks.

Keywords: ruin probability; insurance and financial risks; finite mixture of exponential distributions.

Last decades there is a discussion between leading specialists in risk theory, financial mathematics and queuing theory (S. Asmussen, W. Whitt, V. Kalashnikov and A. Novikov) about an accuracy of asymptotic formulas in stochastic models with heavy tailed distributions. Manifold numerical experiments showed that asymptotic formulas reach high accuracy only for very large meanings of arguments. The Monte-Carlo method works efficiently only for sufficiently small arguments. As a result an area of mid arguments appears. In this area known numerical methods do not work because of their complexity and asymptotic formulas do not work because of their small accuracy. To make calculations in this area A. Novikov suggested to approximate distributions with heavy tails by finite mixtures of exponential distributions. This approach demands to calculate a probability of autoregressive sequence to exit from some domain in a finite number of steps. A. Novikov solved this problem using martingale methods. But these methods work in sufficiently narrow suggestions.

In this paper, the authors discard these restrictions for discrete time risk model with financial risks and heavy tailed insurance risks dependent on them. An inflation factor is represented by Markov chain with finite set of states and insurance risk has a distribution depending of this chain. Such complication of risk model is suggested by A. Novikov and is not considered yet by specialists of risk and financial mathematics. But last events showed that a dependence between insurance and financial risks is caused by natural and anthropogenic catastrophes with sizes depending on financial factors significantly.

Recurrent algorithm of ruin probability calculation in risk model under finite horizon is based on an approximation of loss distributions by finite mixtures of exponential distributions and on continuity theorems. For this aim special methods of a transformation of integral relations are constructed and a problem of small denominators connected with these methods is solved. An efficient procedure of an enumeration of vectors with fixed sums of non negative integer components is constructed. On a base of this algorithm we performed numerical experiment which showed its advantage in an efficiency as compared to Monte-Carlo method with practically identical results. Some numerical results with the chosen parameters of the model (for an example with unit capital) are represented below.

Steps number	Methods	Ruin probability
3	Monte-Carlo	0.118499
3	Recurrent formula	0.109308
4	Monte-Carlo	0.130707
4	Recurrent formula	0.121714
5	Monte-Carlo	0.139442
5	Recurrent formula	0.130206

We compare the calculation of ruin probability by accuracy formulas and by asymptotic formulas in a case when insurance losses have subexponential distributions. Below some results of numerical experiments are represented.

Initial capital	Formula	Ruin probability
1000	Asymptotic	0.000056666
1000	Recurrent	0.0000563073
3000	Asymptotic	0.0000151627
3000	Recurrent	0.0000151122
5000	Asymptotic	8.21407×10^{-6}
5000	Recurrent	8.56365×10^{-6}

REFERENCES

1. Asmussen S. *Ruin probabilities*. Singapore: World Scientific, 2000. 602 p.
2. Feldmann A., Whitt W. Fitting mixtures of exponentials to long-tailed distributions to analyze network performance models. *Performance Evaluation*, 1998, vol. 31, pp. 245-279. DOI: 10.1016/S0166-5316(97)00003-5
3. Kalashnikov V. *Geometric sums: bounds for rare events with applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 265 p.
4. Kordzakhia N., Novikov A., Tsitsashvili G.Sh. *On ruin probabilities in risk models with interest rate*. In: Perna C., Sibilio M. (eds.) *Mathematical and statistical methods in actuarial sciences and finance*. Springer Verlag, 2012, pp. 245-253.
5. Cai J., Dicson D.C.M. Ruin probabilities with a Markov chain interest model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2004, vol. 35, pp. 513-525. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2004.06.004
6. Tang Q., Tsitsashvili G. Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks. *Stochastic Processes and Their Application*, 2003, vol. 108, no. 2, pp. 299-325. DOI: 10.1016/j.spa.2003.07.001
7. Zolotarev V.M. Stokhasticheskaya nepreryvnost' sistem massovogo obsluzhivaniya [Stochastic continuity of systems of Queuing]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Probability Theory and its applications*, 1976, vol. 21, no. 2, pp. 260-279.
8. Norberg R. Ruin problems with assets and liabilities of diffusion type. *Stochastic Processes and Their Application*, 1999, vol. 81, no. 2, pp. 255-269. DOI: 10.1016/S0304-4149(98)00103-3.
9. Dufresne D. Stochastic life annuities. *American Actuarial Journal*, 2007, vol. 11, no. 1, pp. 136-157. DOI: 10.1080/10920277.2007.10597441
10. Ko B., Ng A.C.Y. "Stochastic Annuities", Daniel Dufresne. Discussions of papers already published. *American Actuarial Journal*, 2007, vol. 11, no. 3, pp. 170-171. DOI: 10.1080/10920277.2007.10597475

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.652.8

А.М. Бабанов

СИНОНИМИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ERM-СХЕМ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В МЕТОДИКЕ ERM-МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ГРАФИЧЕСКОЙ НОТАЦИИ

Рассматриваются синонимичные графические средства выражения структурных и ограничивающих компонентов ERM-схем и методика их совместного использования при проектировании ERM-схем. Наличие синонимии в языке определения данных позволяет проектировщику фиксировать семантику предметной области в наиболее удобных и понятных для него формах. Формальные законы взаимного преобразования синонимичных элементов и возможность его автоматического выполнения в ходе методики избавляют проектировщика от рутинной работы и позволяют сосредоточиться на главной задаче семантического моделирования – точной и полной формализации представлений о предметной области.

Ключевые слова: моделирование данных; семантическая модель данных; ERM-модель; синонимия; синонимичные элементы; графическая нотация; методика.

Общепризнанными и широко распространенными подходами семантического моделирования, по мнению большинства исследователей [1], являются ER-модель («Entity – Relationship») Чена [2], UML («Unified Modeling Language») [3] и получившая в последнее время развитие OR-модель («Object – Role») Халпина [4]. Ранние модели этого класса (ER, UML) были предназначены только для проектирования структур хранимых данных, не предполагающих дублирование информации о предметной области (ПрО). Поэтому в схемах данных этих моделей каждому явлению ПрО проектировщик должен был подобрать единственную форму – сущность, связь или значение. Более поздние семантические модели (ORM в частности) стали включать возможность проектирования так называемых получаемых (derived) структур, чьи данные непосредственно не хранятся на диске, а вычисляются с помощью тех или иных правил, определенных в схеме. С помощью этих возможностей можно наряду с основной хранимой формой явления определить дополнительные получаемые формы.

Идея хранимых и получаемых структур данных получила новое развитие в ERM-модели («Entity – Relationship – Mapping») или модель «Сущность – Связь – Отображение»). В результате выделения базовых и производных понятий этой модели [5] были выявлены проблема синонимичных элементов ERM-схем [6] и их роль в методике проектирования схем БД [7]. На первых этапах методики – анализа ПрО и высокоуровневого проектирования, производные понятия облегчают процесс первичной формализации восприятия ПрО человеком. По мере углубления и усложнения своих представлений проектировщик переходит на язык базовых понятий, обеспечивающих всю полноту выразительных возможностей ERM-модели.

Практическая реализация инструментов ERM-моделирования требует детальной проработки методики совместного представления синонимичных базовых и производных элементов ERM-схем, в том числе в графической нотации.

1. Методика использования графических средств проектирования ERM-схем

Несмотря на то что основные базовые и производные структурные понятия изоморфны в плане выразительности семантики ПрО, проще в использовании последние. Действительно, такие понятия,

как «множество сущностей», «множество связей» и «атрибут», давно используются и стали привычными в профессиональной среде разработчиков БД. Естественно, что методика проектирования ERM-схем данных не могла обойти этот факт стороной и предполагает преимущественное использование именно производных понятий на первых этапах процесса проектирования. К тому же, благодаря использованию понятий ER-модели Чена [2], удастся сформировать компактное, но в то же время цельное высокоуровневое представление информации о ПрО.

Если какие-то информационные элементы и законы их взаимодействия не нашли отражения на языке ER-модели, следует перейти на язык базовых понятий (классов и отображений) и строить дополнительные углубленные представления для отдельных элементов первоначальной схемы. Построение ERM-схемы только с использованием базовых понятий не является в предлагаемой методике самоцелью (хотя такое возможно), к этому языку следует прибегать лишь в случае необходимости. К тому же, как будет показано далее, методика предполагает автоматическую редукцию ERM-схемы до уровня базовых понятий.

Итак, методика проектирования ERM-схем с использованием расширенной графической нотации включает следующие этапы:

- 1) проектирование каркасной ERM-диаграммы всей ПрО;
- 2) уточнение каркасной ERM-диаграммы;
- 3) автоматическую генерацию реляционных отображений и построение диаграмм реляционных отображений некоторых множеств связей. Уточнение ограничений целостности на реляционные отображения;
- 4) автоматическую генерацию отображений, сопутствующих атрибутивным отображениям множеств связей, и уточнение диаграмм для этих множеств связей;
- 5) явное введение ролей на диаграммах множеств связей и определение дополнительных ограничений целостности;
- 6) определение получаемых отображений с помощью операций над отображениями. Задание их ограничений целостности;
- 7) построение диаграмм взаимоотношений между классами и между отображениями. Возможно, потребуется использование в них операций над классами и отображениями;
- 8) уточнение состава и ограничений целостности специализаций и категоризаций. Определение отображений, которые являются основаниями деления специализаций.

Процедура проектирования может быть прекращена после любого из указанных шагов в случае полного представления в ERM-схеме всей требуемой семантики ПрО.

Пояснять применение методики мы будем на примере ПрО планирования занятий в вузе. Для упрощения рисунков рассмотрим лишь небольшую часть схемы и опустим почти все характеристики объектов.

2. Проектирование каркасной ERM-диаграммы ПрО

Объекты, мыслимые в высказываниях о ПрО как предметы, представляют собой сущности, а классы понятий таких объектов есть не что иное, как множества сущностей. Идеальные объекты, такие как числа, даты, строки символов, являются значениями. Они не обладают свойствами, характеристиками и не вступают в отношения с другими объектами, кроме того, что являются значениями характеристик объектов. Их объединяют во множества значений по синтаксическим особенностям. Объекты, подпадающие под конкретные понятия об n -ках предметов, представляют собой связи, а классы объектов, составляющих объемы таких понятий, есть не что иное, как множества связей. Каждый объект в связи играет определенную роль, характеризующую его функцию в этой связи.

Отображение, ставящее в соответствие объекту истинностное значение, называется отображением-свойством. Если в качестве области значений в отображении используется произвольное множество значений, такое отображение будем называть отображением-характеристикой. Отображения-

свойства представляют собой частный случай отображений-характеристик. Отображения-характеристики являются не чем иным, как атрибутивными отображениями, или просто атрибутами.

Рассмотрим фрагмент ERM-схемы, приведенный на рис. 1.

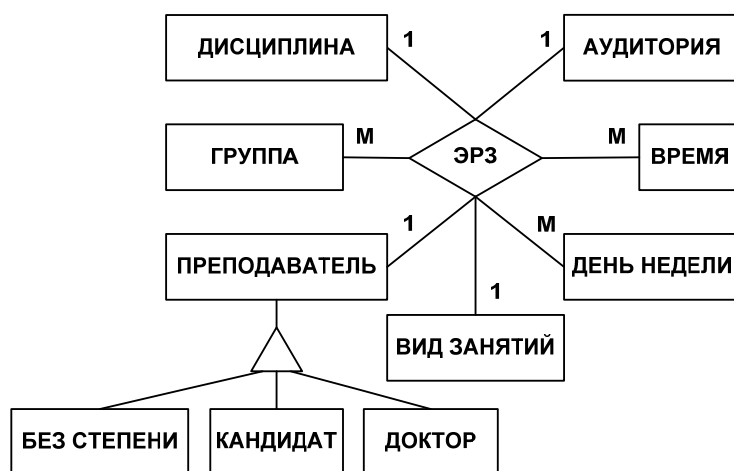


Рис. 1. Первоначальная каркасная ERM-схема

Этот вариант диаграммы практически совпадает с ER-диаграммой Чена. Добавлена лишь специализация преподавателей в зависимости от наличия или отсутствия у них той или иной ученой степени.

На схеме представлен основной объект планирования академической деятельности – элемент расписания занятий (ЭРЗ). По мнению проектировщика, он представляет собой тип связей, в каждой из которых задействованы конкретные дисциплина, студенческая группа, преподаватель, вид занятий, аудитория, время и день недели. Действительно, именно эти элементы указаны в каждой клеточке расписания занятий.

3. Уточнение каркасной ERM-диаграммы

Для построения адекватной задачам ПрО ERM-схемы необходимо для каждого явления подобрать подходящую форму данных – значение, связь или сущность. Эта задача известна как проблема триализма форм данных. Бывают случаи, когда эту задачу решить непросто.

Например, такой тип явлений, как БРАК между людьми, можно мыслить как атрибут, множество связей или множество сущностей. Проектируя схему БД, необходимо сделать выбор в пользу одного из этих представлений. При этом можно использовать следующие соображения.

Если вам достаточно информации о том, состоит человек в браке или нет, можно рассмотреть этот тип явлений как атрибут множества сущностей ЧЕЛОВЕК. Если же Вас интересует, с кем конкретно заключен брак, необходимо трактовать БРАК как множество связей между сущностями множества ЧЕЛОВЕК. Даже если Вы захотите описать это явление с помощью тех или иных характеристик, Вам не придется менять форму множества связей (в ERM-модели, как и в ER-модели Чена, множества связей могут иметь характеристики). А вот если понадобится представлять связи браков с другими явлениями, Вам не обойтись без множества сущностей БРАК (связи непосредственно не могут вступать в другие связи).

Мы перечислили варианты представления в порядке возрастания функциональности и информативности форм. Но это не означает, что все явления нужно трактовать как сущности. Бинаризация представлений (сведение структур данных к понятиям бинарной модели – множествам знаков и исключительно бинарным отношениям между ними), на первый взгляд, упрощает проектирование, но она скрадывает важную для проектирования эффективной схемы БД семантику ПрО, невосполнимую на последующих этапах.

Особое внимание также следует уделить построению необходимой и достаточной системы сущностей, составляющих одну связь каждого рассматриваемого множества связей. С одной стороны, в нее должны войти все объекты, определяющие смысл высказывания о взаимосвязи предметов, с другой стороны, в ней не должно быть объектов, которые можно исключить из высказывания без потери информации.

Имеет смысл руководствоваться следующими соображениями. В момент создания связи должны быть определены все сущности, в ней участвующие. Не должно быть связей, в которых хотя бы одна сущность появляется позже, а значит, до поры до времени ссылка на нее в связи пуста. И в дальнейшем, пока существует связь, указатели на все сущности в ней не изменяются. С удовлетворением этих требований в первоначальной схеме нашего примера, как видим, все в порядке.

Кроме того, следует отличать сущности, участвующие в связи, от значений характеристик связи. Именно на это обратил бы свое внимание проектировщик при уточнении нашей каркасной ERM-диаграммы. Действительно, если такие участники связей типа ЭРЗ, как дисциплина, студенческая группа, преподаватель, вид занятий, аудитория не вызывают сомнений (они являются полноценными сущностями, которые могут обладать характеристиками, вступать в другие связи), то время и день недели представляют собой не более чем значение, состоящее из количества часов и количества минут (время), и одну из семи строк символов (день недели). Больше о них нам, пожалуй, вряд ли что захочется сказать.

Поэтому проектировщик приходит к мысли заново рассмотреть для этих явлений задачу выбора формы данных, а именно он решает считать их значениями. Это приводит к изменению структуры и степени множества связей ЭРЗ и появлению у него двух атрибутов Время начала и День недели (рис. 2). Хочется верить, что интеллектуальные инструменты ERM-моделирования окажут помощь проектировщику в таком преобразовании.

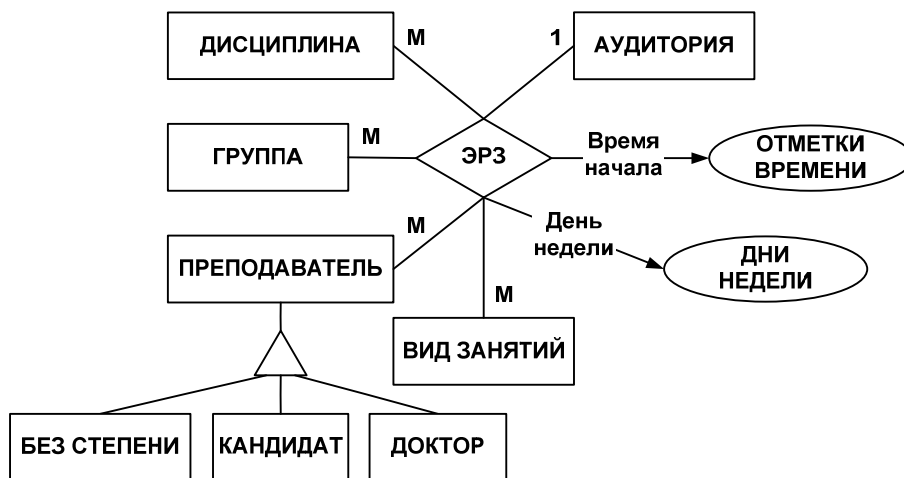


Рис. 2. Уточненная каркасная ERM-схема

Обратите внимание на изменившиеся пометки на ребрах ролей. Сказывается влияние бывших множеств сущностей ВРЕМЯ и ДЕНЬ НЕДЕЛИ на уникальную идентификацию сущностей типа ДИСЦИПЛИНА, ПРЕПОДАВАТЕЛЬ и ВИД ЗАНЯТИЙ. На первый взгляд, может показаться, что уточнение ERM-схемы привело к потере важных особенностей данных, однако это не так – изменилась лишь форма выражения этих законов, и позже Вы это увидите.

Следует пояснить функциональную определенность аудитории. Предположим, что в нашей предметной области обучение ведется по специальным дисциплинам, требующим особого оборудования и программного обеспечения. В таком случае преподаватель определяет необходимую ему для занятий конкретного вида по конкретной дисциплине инфраструктуру, и ее устанавливают в одной специальной аудитории.

4. Автоматическая генерация реляционных отображений и построение диаграмм реляционных отображений множеств связей. Уточнение ограничений целостности на реляционные отображения

До этого момента наша ERM-схема включала в себя 8 множеств сущностей, 1 множество связей, 2 однозначных атрибута множества связей и 1 специализацию множеств сущностей. Все эти элементы указал непосредственно проектировщик. Чтобы помочь человеку в разработке часто непростой ERM-схемы, диалоговый инструмент должен брать на себя часть обязанностей по ее определению. На этом этапе редактор ERM-диаграмм пополнит схему реляционными отображениями и покажет их на диаграмме (рис. 3). Эти отображения и часть ограничений целостности, наложенных на них, определяются заданными на предыдущих шагах множествами связей.

Отображения, определяемые множествами связей, которые в качестве областей определения и значений имеют одиночные множества сущностей или их декартовы произведения, называются реляционными. Из всех $2^n - 2$ реляционных отображений, определяемых множеством связей степени n , на схеме обычно показываются только $2n$ отображений, определяемых ролями и определяющих роли (при $n = 3$ эти отображения исчерпывают все множество реляционных отображений).

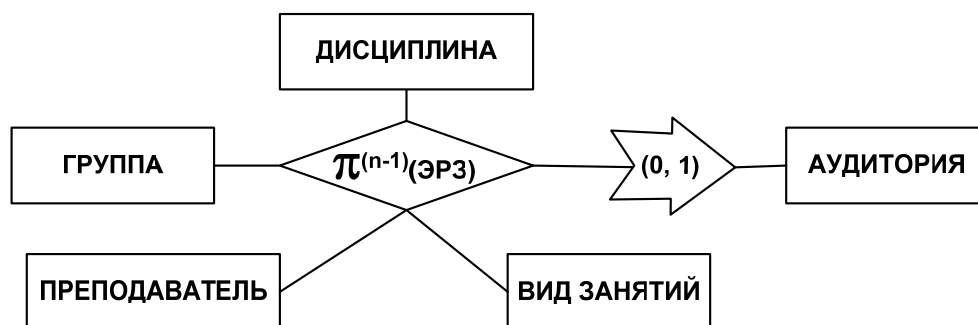


Рис. 3. Диаграмма реляционных отображений множества связей ЭРЗ
(неограниченные отображения опущены)

Как видим, в случае, когда и определяемое ролью, и определяющее ту же роль реляционные отображения неограниченны, в кратком варианте диаграммы реляционных отображений между прямоугольником множества сущностей и ромбом множества связей может оставаться простое ребро (как в нотации Чена).

Хотя ромб и подписан как проекция множества связей ЭРЗ на $n - 1$ роль, на самом деле он олицетворяет для каждого определяемого ролью и определяющего роль реляционного отображения декартово произведение $n - 1$ классов, на которых, помимо класса, стоящего на противоположном полюсе отображения, определено множество связей ЭРЗ.

Если есть потребность в представлении на диаграмме всех $2^n - 2$ реляционных отображений, определяемых одним множеством связей степени n , это может быть сделано, как показано на рис. 4. Мы намеренно рассматриваем множество связей третьей степени ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИН ПРЕПОДАВАТЕЛЯМИ, поскольку для множества связей ЭРЗ потребовалось бы демонстрировать 30 реляционных отображений.

Каждый раз, когда опущен ромб, олицетворяющий множество связей, которое определяет роли и реляционные отображения, он незримо присутствует и предполагает, в частности, инверсность взаимнообратных отображений. К началу стрелки, изображающей отображение, подходят ребра от классов (в данном случае множеств сущностей), которые составляют область определения отображения (ООО), а из конца стрелки выходят ребра к классам (множествам сущностей), которые составляют область значений отображения (ОЗО).

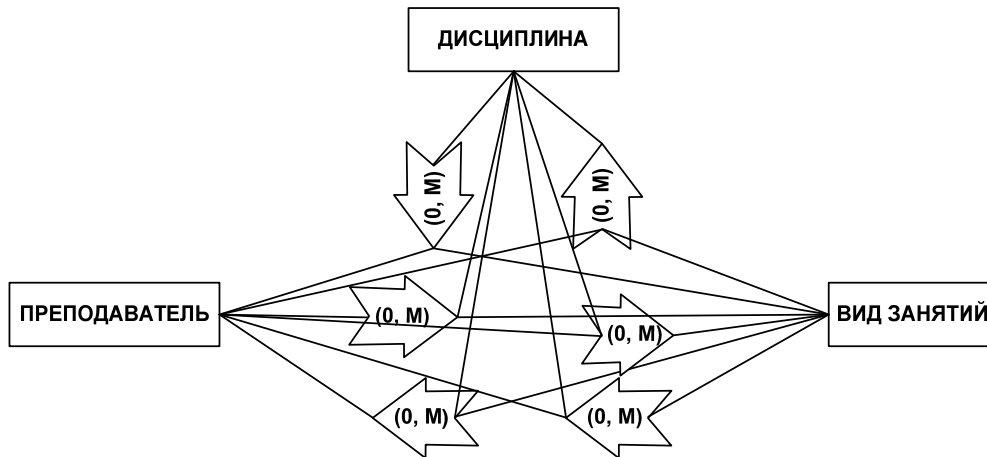


Рис. 4. Диаграмма реляционных отображений множества связей
(явно указаны все реляционные отображения)

5. Автоматическая генерация отображений, сопутствующих атрибутным отображениям множеств связей, и уточнение диаграмм для этих множеств связей

Другим примером использования генератора отображений является случай, когда множество связей имеет один или более атрибутов. В таком случае создаются отображения, в которых ООО и ОЗО формируются из множеств сущностей, участвующих во множестве связей, и множеств значений, которые составляют ОЗО атрибутных отображений. Ясно, что такие отображения не являются ни атрибутными, ни реляционными. Поэтому мы называем их отображениями, сопутствующими атрибутным отображениям множеств связей (рис. 5).

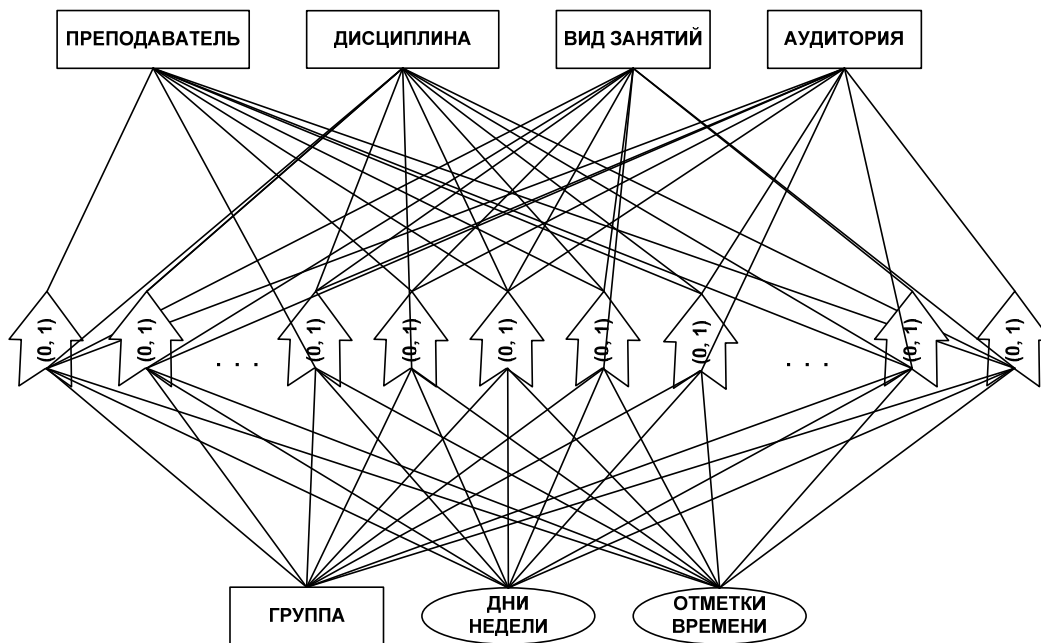


Рис. 5. Диаграмма отображений, сопутствующих атрибутным отображениям множества связей

На рис. 5 показаны лишь ограниченные отображения, и то не все. В центре расположена стрелка отображения, для которого ООО составляют нижние классы, а ОЗО – верхние классы. Именно функциональность этого отображения определяет функциональность всех остальных отображений, представленных на этом рисунке. По большому счету, нет необходимости показывать их функциональность,

интеллектуальный инструмент ERM-моделирования должен быть в состоянии оперировать подразумеваемыми ограничениями целостности без необходимости их явного задания. Более того, он обязан определять любые противоречия, некорректности схемы и сообщать об этом проектировщику.

Кстати, пары крайних отображений – это те отображения, функциональность которых была явно указана на рис. 1 и была утрачена после преобразований на рис. 2 в силу недостаточной выразительности ER-модели.

6. Явное введение ролей на диаграммах множества связей и определение дополнительных ограничений целостности

Отсутствие явного указания ролей на диаграмме множества связей может привести к неопределенности и допустимо только в случае, когда каждое множество сущностей играет одну и только одну роль во множестве связей. Тем не менее даже в этом случае они бывают необходимы на диаграммах для представления ограничений целостности, поскольку параллелограммы ролей олицетворяют реальные области определения ролей (в отличие от прямоугольников множеств сущностей, представляющих потенциальные области определения ролей). Так, на рис. 6 с помощью отношения включения между ролями показано ограничение, утверждающее, что в элементах расписания занятий могут участвовать только преподаватели, которые запланированы как обеспечивающие проведение занятий по дисциплинам (на самом деле все немного сложнее; см. рис. 8).

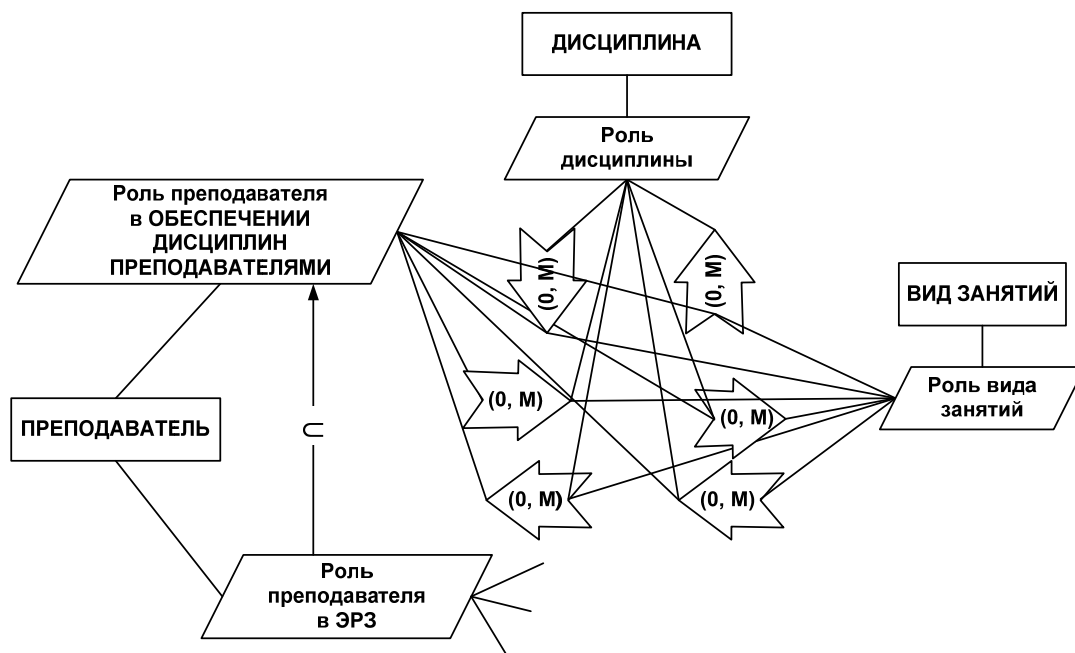


Рис. 6. Диаграмма реляционных отображений множества связей (явно указаны роли сущностей и ограничение на них)

7. Определение получаемых отображений с помощью операций над отображениями. Задание их ограничений целостности

Многие законы ПрО можно представить в виде тех или иных ограничений, накладываемых на так называемые получаемые (англ. *derived*) [4] отображения. Их экземпляры, в отличие от утверждаемых (англ. *asserted*) [4] пользователем отображений, в БД не хранятся, а с помощью операций над данными определяются из экземпляров утверждаемых отображений. После автоматического построения необходимых утверждаемых отображений (шаги 3 и 4 методики) проектировщик может определить на ERM-диаграмме последовательность операций над отображениями, в результате выполнения которой образуется производное получаемое отображение, и определить его тип (рис. 7).

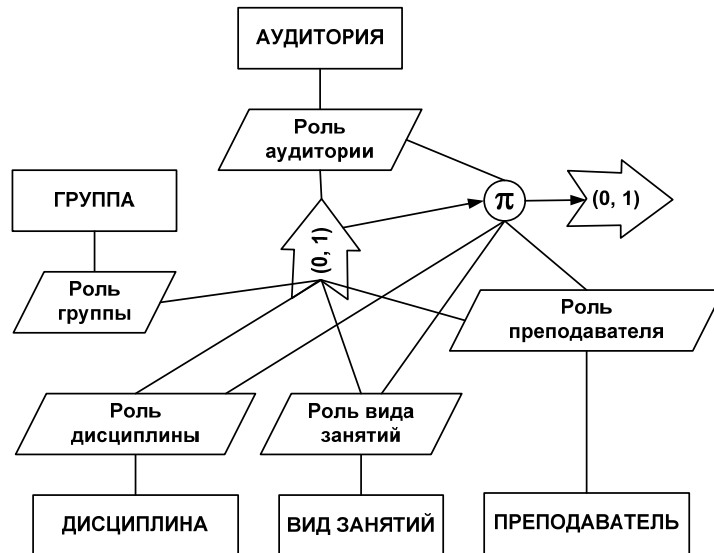


Рис. 7. Диаграмма с функциональным получаемым отображением

Единственное ограниченное реляционное отображение, определяющее роль аудитории (см. рис. 2 и 3), не точно отражает закон предметной области. На самом деле функциональное определение аудитории неизбыточно обеспечивают сущности типов дисциплина, преподаватель и вид занятий. Это обстоятельство может быть показано на ERM-диаграмме с использованием операции проекции и константации того факта, что ее результат представляет собой функциональное отображение (рис. 7).

8. Построение диаграмм взаимоотношений между классами и между отображениями

Отношение между классами уже было показано на рис. 6. Покажем ограничение целостности, связанное с определением отношения между отображениями. На рис. 8 ориентированная стрелка между получаемым и утверждаемым отображениями указывает на отношение следствия между ними. Это ограничение представляет следующий закон ПрО: вести занятия определенного вида по дисциплине могут только преподаватели, обеспечивающие этот вид занятий по дисциплине.

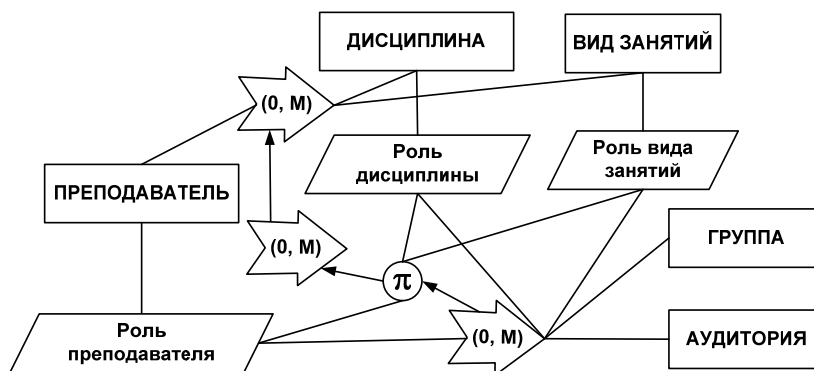


Рис. 8. Диаграмма с отношением следствия между отображениями

9. Уточнение состава и ограничений целостности специализаций и категоризаций. Определение отображений, которые являются основаниями деления специализаций

Заключительным аккордом проектирования ERM-схемы является определение ограничений целостности специализаций, категоризаций и отображений, которые являются основаниями деления специализаций (рис. 9).

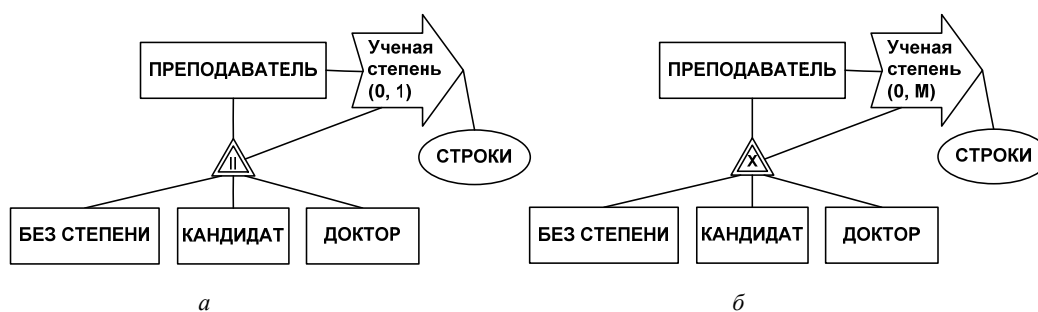


Рис. 9. Диаграммы специализаций с ограничениями целостности и отображением-основанием деления

На рис. 9 показаны два варианта решений по поводу единственной специализации в нашей ПрО. Их отличие связано с различной трактовкой атрибутного отображения Ученая степень множества сущностей ПРЕПОДАВАТЕЛЬ, являющегося основанием деления класса ПРЕПОДАВАТЕЛЬ на преподавателей без степени, кандидатов и докторов наук. Если предположить, что этот атрибут однозначный, т.е. человек не может считаться одновременно и кандидатом, и доктором, то мы приходим к варианту полной непересекающейся специализации (рис. 9, а). В противном случае более правильным является вариант полной пересекающейся специализации (рис. 9, б).

Заключение

Семантическая модель данных «Сущность – Связь – Отображение» сочетает в себе естественность ее понятий для человека и полноту представления свойств данных. Большая детальность описания ПрО в этой модели неизбежно должна приводить к повышенной сложности ее использования. Хорошо продуманная методика ERM-моделирования и CASE-средства, автоматизирующие построение базовых элементов ERM-схемы, синонимичных явно указанным проектировщиком, частично упрощают его задачу.

Человек фиксирует семантику ПрО в удобных и понятных ему формах. Перевод этих описаний на низкоуровневый, но более выразительный язык базовых понятий ERM-модели осуществляется автоматически. В результате этих преобразований ERM-схемы у проектировщика появляется возможность продолжить формализацию своих представлений о ПрО на новом, недоступном ранее базовом уровне. Таким образом, методика ERM-моделирования способствует точной и полной формализации представлений о предметной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Simsion G. and Witt G.* Data Modeling Essentials, Third Edition. Morgan Kaufmann, 2005. 532 p.
2. *Chen P.P.-S.* The Entity-Relationship Model – Toward a Unified View of Data // ACM Transactions on Database Systems. March 1976. V. 1, No. 1. P. 9–36.
3. *Bennett S., McRobb S. and Farmer R.* Object-Oriented Systems Analysis and Design, Fourth Edition. McGraw-Hill Higher Education. 2010. 688 p.
4. *Halpin T. and Morgan T.* Information Modeling and Relational Databases, Second Edition. Morgan Kaufman, 2008, 943 p.
5. *Бабанов А.М.* Базовые и производные структурные понятия ERM-модели данных и изоморфное отношение между ними // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4(21). С. 117–126.
6. *Бабанов А.М., Скачкова А.С.* Синонимия в ERM-модели и проблемы обеспечения непротиворечивости и пополнения ERM-схем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3(20). С. 121–128.
7. *Бабанов А.М.* Семантическая методика проектирования БД и ее перспективы, открывающиеся с применением ERM-модели данных // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 3(16). С. 58–66.

Бабанов Алексей Михайлович, канд. техн. наук, доцент,
E-mail: babanov2000@mail2000.ru
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 19 ноября 2013 г.

Babanov Alexey M. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

Synonymy of ERM-scheme's elements and its use in the ERM-modeling technique for the graphic notation.

Keywords: data modeling; semantic data model; ERM-model; synonymy; synonymous elements; graphic notation; designing technique.

Chen's ER-model («Entity – Relationship» model), the UML («Unified Modeling Language»), and recently developed Halpin's OR-model («Object – Role» model) are universally recognized and widespread approaches of semantic modeling. The early models of this class (ER, UML) have been only intended for designing of stored data structures which do not suppose the duplication of information about the application domain (AD). Therefore, the designer should pick out the unique form: entity, relationship or value to each AD phenomenon in these models. The later semantic models (ORM, in particular) began to include an opportunity for designing so-called derived structures, in which data are not stored directly on a disk, and are calculated by the rules determined in the scheme. Due to these opportunities, it is possible to define additional derived forms in parallel with the basic stored form of the phenomenon data.

The idea of stored and derived data structures has received new development in the ERM-model («Entity – Relationship – Mapping» model). A problem of synonymous elements of ERM-scheme and their role in a technique of the DB-schemes designing has been revealed when base and derivative concepts of ERM-model were formulated. Derivative concepts facilitate the process of primary formalization of human perceptions at the first stages of a technique – the analysis of an application domain and the high-level designing. The designer resorts to the language of the base concepts providing all completeness of ERM-model expressive capabilities in process of a deepening and complicating his representations.

Practical realization of the ERM-modeling tools demands detailed study of a technique for joint representation of the synonymous base and the derivative ERM-scheme's elements, including in the graphic notation.

The technique of ERM-scheme designing with use of the expanded graphic notation includes the following stages:

1. Designing the frame ERM-diagram of the AD.
2. Specification of the frame ERM-diagram.
3. Automatic generation of relational mappings and construction of relational mappings diagrams for some relationship sets.

Specification of integrity constraints on relational mappings.

4. Automatic generation of the mappings accompanying relationship sets attributes, and specification of diagrams for these relationship sets.

5. Obvious introduction of roles on some relationship sets diagrams and definition of additional integrity constraints for them.

6. Definition of derived mappings by mappings operations and definition of additional integrity constraints for them.

7. Construction of diagrams of mutual relations between classes and between mappings. Probably, classes and mappings operations are required in them.

8. Specification of structure and integrity constraints of specializations and categorizations. Definition of mappings which are the bases of specializations division.

Designing procedure can be stopped after any of the specified steps in case of full representation of all required AD semantics in ERM-scheme.

So, during technique of ERM-scheme designing the person fixes the AD semantics in convenient and clear forms. Translation of these descriptions on lower level, but more expressive language of ERM-model base concepts is carried out automatically. As a result of these ERM-scheme transformations, the designer has an opportunity to continue formalization of the AD representations at a new, base level inaccessible earlier. Thus, the technique of ERM-modeling promotes exact and full formalization of application domain representations.

REFERENCES

1. Simsion G., Witt G. *Data modeling essentials*. Morgan Kaufmann, 2005. 532 p.
2. Chen P.P.-S. The entity-relationship model – toward a unified view of data. *ACM Transactions on Database Systems*, 1976, vol. 1, no. 1, pp. 9-36. DOI: 10.1145/320434.320440
3. Bennett S., McRobb S., Farmer R. *Object-oriented systems analysis and design*. McGraw-Hill Higher Education, 2010. 688 p.
4. Halpin T., Morgan T. *Information Modeling and Relational Databases*. Morgan Kaufman, 2008. 943 p.
5. Babanov A.M. Base and derivative structural concepts of ERM data model and isomorphic relation between them. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2012, no. 4 (21), pp. 117-126. (In Russian).
6. Babanov A.M., Skachkova A.S. ERM-models synonymy and problems of scheme consistency and completeness ensuring. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2012, no. 3(20), pp. 121-128. (In Russian).
7. Babanov A.M. Semantic method of database designing and its prospects opening with application of the ERM data model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2011, no. 3(16), pp. 58-66. (In Russian).

ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ И АВТОМАТЫ

УДК 519.713

О.В. Кондратьева, Н.В. Евтушенко, А.Р. Кавалли

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ КОМПОЗИЦИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ С ТАЙМАУТАМИ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ мол_а (№ 14-08-31640)

Рассматривается задача синтеза сложных дискретных систем, представленных в виде набора взаимодействующих автоматов с входными и выходными таймаутами, для которых вводится операция параллельной (асинхронной) композиции. Показывается, что если компоненты системы являются недетерминированными автоматами, то поведение композиции не может быть описано классическим автоматом с таймаутами, и, соответственно, предлагается расширение этой модели.

Ключевые слова: детерминированный временной автомат; недетерминированный временной автомат; параллельная композиция.

Многие управляющие системы и системы обработки информации можно рассматривать как системы, преобразующие последовательности действий в одном алфавите в последовательности действий в другом алфавите. При синтезе и анализе подобных систем достаточно часто приходится моделировать функционирование системы с учетом временных аспектов, таких как скорость реакции системы, задержка выходного сигнала, таймаут по ожиданию входного сигнала и т.п. Вход-выходные модели с конечным числом состояний хорошо подходят для решения широкого класса задач синтеза и анализа таких последовательностных систем, поэтому одним из естественных и перспективных путей развития подобных моделей для учета временных аспектов поведения является расширение классических моделей специальными временными функциями. Задача описания взаимодействующих дискретных систем возникает в различных приложениях. В [1] предлагается неформальное описание композиции детерминированных временных автоматов. В данной статье мы формализуем предложенное описание взаимодействия, а также предлагаем такое расширение модели временного автомата, которое позволило бы описать композицию недетерминированных компонент.

1. Временной автомат с таймаутами

Через N обозначается множество натуральных чисел. *Временным автоматом* [1], который далее будем называть просто автоматом, называется конечный автомат с таймаутами, т.е. семёрка $S = (S, I, O, s_0, \lambda_S, \Delta_S, \sigma_S)$, где пятёрка $(S, I, O, s_0, \lambda_S)$ есть классический конечный автомат, в котором S – конечное непустое множество состояний с выделенным начальным состоянием s_0 , I и O – конечные входной и выходной алфавиты соответственно, $\lambda_S \subseteq S \times I \times S \times O$ – отношение переходов. Кроме того, *функция задержки входного символа* $\Delta_S: S \rightarrow S \times (N \cup \{\infty\})$ определяет для каждого состояния максимальное время ожидания входного символа (входной таймаут), *функция задержки выходного символа* $\sigma_S: \lambda_S \rightarrow (\{0\} \cup N)$ определяет для каждого перехода необходимый интервал времени для выполнения соответствующего перехода и выработки выходного символа в ответ на поступившее входное воздействие (выходной таймаут).

Таймаут для входного символа означает, что если в некотором состоянии автомата входной сигнал не поступает в течение определенного времени, то автомат может изменить своё состояние, не

производя выходного символа. Отметим, что если для некоторого состояния s имеет место $\Delta_S(s) = (s', \infty)$, то $s = s'$, и автомат в этом состоянии может находиться бесконечно долго в ожидании входного воздействия.

Каждому временному автомату можно поставить в соответствие внутреннюю целочисленную переменную-таймер, отсчитывающую количество единиц времени, прошедших после достижения автоматом текущего состояния или после получения автоматом последнего входного символа. Сброс таймера происходит каждый раз при получении автоматом входного символа и при смене состояния автомата как в результате перехода под действием входного символа с выдачей выходного символа, так и в результате перехода по таймауту. Отметим, что, по определению временного автомата, входной символ может поступить на автомат в любой действительный момент времени; соответственно будет вычислено следующее состояние автомата и выдаваемый выходной символ. При этом, в силу того что таймауты могут иметь только целочисленные значения, любой входной символ, поступивший на автомат в некоторый момент времени в интервале $[n, n + 1)$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, обрабатывается автоматом так же, как входной символ, поступивший в момент времени n .

Временной автомат S называется *детерминированным*, если для любых $s_1 \in S$ и $i \in I$ существует не более одной пары $(s_2, o) \in S \times O$, такой что $(s_1, i, s_2, o) \in \lambda_S$, в противном случае автомат называется *недетерминированным*. Автомат называется *полностью определенным*, если для любых $s_1 \in S$ и $i \in I$ существует пара $(s_2, o) \in S \times O$, такая что $(s_1, i, s_2, o) \in \lambda_S$, в противном случае автомат называется *частичным*.

Для описания поведения временного автомата с учетом временных аспектов вводятся понятия временного входного символа и временного выходного символа. *Временной входной символ* $(i, t) \in I \times (\{0\} \cup \mathbb{N})$ показывает, что входной символ i подается в тот момент, когда значение временной переменной равно t . *Временной выходной символ* $(o, k) \in O \times (\{0\} \cup \mathbb{N})$ показывает, что символ o выдается автоматом через k единиц времени после получения входного символа. Для того чтобы вычислить реакцию автомата на временной входной символ (i, t) , необходимо сначала определить, в каком состоянии будет находиться автомат в момент подачи входного символа i [1]. Пусть символ (i, t) поступает на автомат в состоянии s . Рассмотрим последовательность переходов по таймаутам $\Delta_S(s) = (s_1, T_1)$, $\Delta_S(s_1) = (s_2, T_2)$, ..., $\Delta_S(s_{p-1}) = (s_p, T_p)$, такую что $T_1 + T_2 + \dots + T_{p-1} < t$, но $T_1 + T_2 + \dots + T_p \geq t$. В этом случае входной символ i появится на входе автомата после того, как автомат перейдет в состояние s_p . Если $\Delta_S(s) = (s, \infty)$, то $s_p = s$ при любом t . Таким образом, в результате подачи символа (i, t) в состоянии s автомат произведет выходной символ o через k единиц времени, если и только если $(s_p, i, s', o) \in \lambda_S$ и $\sigma_S((s_p, i, s', o)) = k$. Таким образом, выходной реакцией автомата S в состоянии s на входной символ (i, t) является символ (o, k) , и после выдачи этого символа автомат перейдет в состояние s' .

Рассмотрим временную входную последовательность $\alpha = (i_1, t_1)(i_2, t_2) \dots (i_n, t_n)$ и временную выходную последовательность $\beta = (o_1, k_1)(o_2, k_2) \dots (o_n, k_n)$. Если в автомате S существует такая последовательность переходов, что при подаче в состоянии s последовательности α автомат может произвести в ответ последовательность β , то пара $\alpha\beta$ называется *временной вход-выходной последовательностью или временной трассой* автомата S в состоянии s . Множество всех временных трасс автомата S в состоянии s обозначается $trace_S(s)$. Два состояния s и p полностью определенных временных автоматов S и P называются *эквивалентными*, если множества трасс в этих состояниях совпадают, т.е. $trace_S(s) = trace_P(p)$. Автоматы S и P называются *эквивалентными*, если их начальные состояния эквивалентны. Автомат S есть *редукция* автомата P , обозначение $S \leq P$, если $trace_S(s_0) \subseteq trace_P(p_0)$.

Множество временных трасс автомата $S = (S, I, O, s_0, \lambda_S, \Delta_S, \sigma_S)$ можно представить как язык полуавтомата $Aut(S) = (S \cup S_T \cup (S \times I) \cup S_K, I \cup O \cup \{1\}, s_0, \delta_S, S \cup S_T)$, в котором специальный символ $1 \notin I \cup O$ описывает ожидание автоматом входного символа в течение единицы времени и $S \cup S_T$ есть множество финальных состояний полуавтомата. При построении полуавтомата $Aut(S)$ используются следующие правила:

1. $S_T \subseteq S \times \mathbb{N}$, $S_K \subseteq (S \times I) \times \mathbb{N}$.

2. Для каждого $s \in S$ в полуавтомате существуют следующие переходы:
- если $\Delta_S(s) = (s, \infty)$, то $(s, 1, s) \in \delta_S$;
 - если $\Delta_S(s) = (s', 1)$, то $(s, 1, s') \in \delta_S$;
 - если $\Delta_S(s) = (s', t)$, $t > 1$, то $(s, j) \in S_T$, $1 \leq j < t$; $(s, 1, (s, 1)) \in \delta_S$, $((s, t-1), 1, s') \in \delta_S$ и для всех $1 < j < t$ имеет место $((s, j-1), 1, (s, j)) \in \delta_S$;
 - кроме того, для всех $1 \leq j < t$ выполняется $((s, j), i, (s, i)) \in \delta_S$.
3. Для каждого перехода автомата $(s, i, s', o) \in \lambda_S$ с задержкой выходного символа на k единиц, $\sigma_S((s, i, s', o)) = k$, имеет место $(s, i, j) \in S_K$ и полуавтомат имеет переходы $(s, i, (s, i)) \in \delta$ и $((s, i), 1, (s, i, 1)) \in \delta_S$; кроме того, для всех $1 \leq j < k$ справедливо $((s, i, j), 1, (s, i, j+1)) \in \delta_S$ и $((s, i, k), o, s') \in \delta_S$.

Иными словами, каждый переход автомата «растягивается» в цепочку переходов, в которой переходы по входному и выходному символу разделены соответствующим числом переходов по символу 1. Переходы по таймауту представляются цепочкой переходов по символу 1 через «копии» начального состояния цепочки. Так как, по определению, состояния из множества S_T являются финальными, язык полуавтомата содержит не только временные трассы соответствующего автомата, но и все их продолжения словами из множества $(1)^*$, которые отмечают, что при ожидании входного символа временная переменная увеличивает свое значение, и, возможно, автомат осуществляет переходы между состояниями согласно функции задержки входного символа. При построении временного автомата по соответствующему полуавтомату каждая цепочка переходов, начинающаяся с перехода, помеченного входным символом, и завершающаяся переходом, помеченным выходным символом, «сворачивается» в переход по соответствующей входу-выходной паре с задержкой выходного символа, равной количеству переходов по символу 1 между входным и выходным символами. Переходы по символу 1 между финальными состояниями полуавтомата соответствуют таймаутам временного автомата. Приведён пример построения полуавтомата (рис. 1, б) по заданному временному автомату (рис. 1, а).

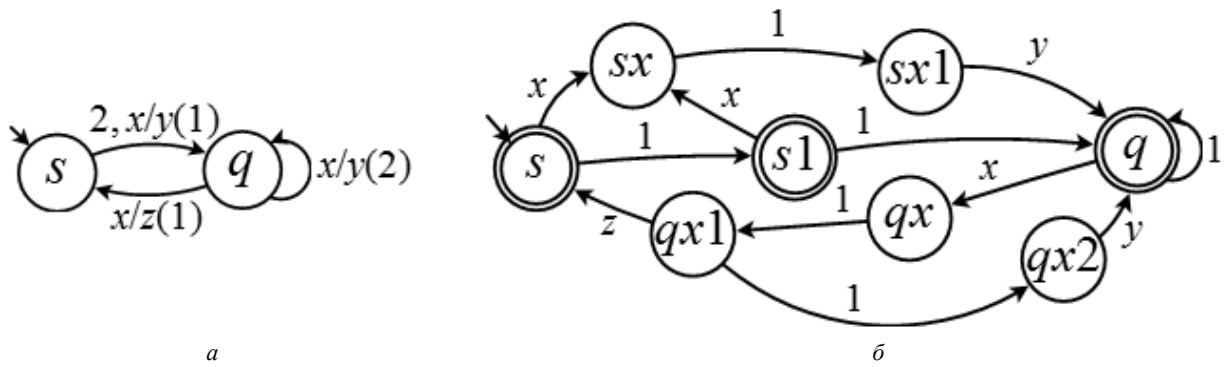


Рис. 1. Пример временного автомата (а) и соответствующего ему полуавтомата (б)

По определению, полуавтомат распознает последовательности действий, переводящие полуавтомат из начального состояния в некоторое финальное состояние. Тогда по построению полуавтомата $Aut(S)$ справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Полуавтомат $Aut(S)$ распознает последовательность $\alpha = 1^{t_1} [i_1 1^{k_1} o_1 \dots 1^{t_m} i_m 1^{k_m} o_m]^p$, если и только если $p = 0$ или $p = 1$ и $(i_1, t_1).(o_1, k_1) \dots (i_m, t_m).(o_m, k_m)$ есть временная трасса автомата S .

Множество последовательностей действий, распознаваемых полуавтоматом $Aut(S)$, будем называть *развернутым по времени языком временного автомата S* и обозначать $L(S)$.

Следствие. Полностью определенные временные автоматы S и P эквивалентны, если и только если эквивалентны соответствующие им полуавтоматы $Aut(S)$ и $Aut(P)$, т.е. $L(S) = L(P)$. Автомат S есть редукция автомата P , если и только если $Aut(S)$ есть редукция $Aut(P)$, т.е. $L(S) \subseteq L(P)$.

По определению, язык $L(S)$ является подмножеством языка $T_{I,O} = [(1)^*I(1)^*O]^*(1)^*$, который далее определяется как язык полуавтомата $Aut(T_{I,O})$. Язык $L(S)$ является $((1)^* \cup (1)^*I(1)^*O)$ -префикс-замкнутым языком, т.е. для любых последовательностей $\alpha \in T_{I,O}$ и $b \in ((1)^* \cup (1)^*I(1)^*O)$ справедливо: если $\alpha b \in L$, то $\alpha \in L$. Заметим, однако, что язык $T_{I,O}$ не является языком временного автомата, так как допускает для входных символов более одного значения задержки выходного символа. Соответствующее расширение модели временного автомата, которое позволяет описывать системы, в которых выходные символы могут вырабатываться с различными задержками, оказывается необходимым для описания композиции недетерминированных компонент и рассматривается в разделе 3.

2. Параллельная композиция детерминированных временных автоматов

Параллельная композиция временных автоматов описывает взаимодействие компонент в режиме диалога. На рис. 2 приведена схема бинарной параллельной композиции. Поскольку мы рассматриваем параллельную композицию автоматов, то используется предположение о «медленной» внешней среде, т.е. следующее входное воздействие может быть подано на систему только после того, как получена выходная реакция на предыдущее воздействие. Кроме того, без ограничения общности мы полагаем, что все (входные и выходные) алфавиты, соответствующие различным каналам, попарно не пересекаются.

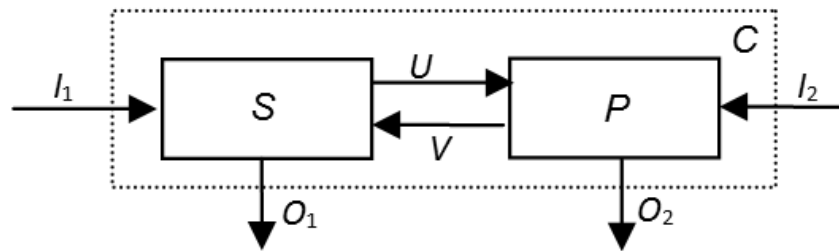


Рис. 2. Схема параллельной композиции

Каждой компоненте ставится в соответствие внутренняя временная переменная, и такая переменная сопоставлена композиции. Время во всех системах течет одинаково, т.е. увеличение всех временных переменных происходит с одинаковой скоростью. «Сброс» таймеров производится каждый раз, когда в соответствующей компоненте осуществляется смена состояния (в результате перехода по таймауту либо после завершения перехода по входу-выходному символу), или при получении компонентой входного воздействия. Аналогично происходит «сброс» таймера и в композиции.

По одному из внешних каналов I_1 или I_2 на систему подается внешний входной символ, после чего производится «сброс» временной переменной композиции. В соответствующей компоненте полученный входной символ обрабатывается, при этом происходит «сброс» временной переменной этой компоненты (временная переменная другой компоненты сохраняет свое значение), и через некоторое время компонента может либо выдать внешний выходной символ, либо отправить внутренний (выходной) символ на другую компоненту. В первом случае взаимодействие заканчивается, и система готова принять следующий входной символ. Если же компонента произвела внутренний выходной сигнал, т.е. на другую компоненту поступил внутренний (входной) символ, то после получения компонентой этого символа производится «сброс» таймеров обеих компонент (но не композиции) и полученный внутренний (входной) символ обрабатывается другой компонентой. В результате обработки внутреннего входного символа компонента может либо выдать внешний выходной символ, либо отправить внутренний (выходной) символ первой компоненте. Взаимодействие продолжается до тех пор, пока одна из компонент не выработает внешний выходной символ, наблюдаемый на одном из каналов O_1 или O_2 . При этом происходит «сброс» временной переменной композиции, однако значе-

ние таймера одной из компонент может быть отличным от нуля (так как производится «сброс» таймера только той компонентой, на выходе которой появился внешний выходной символ). Если компоненты суть детерминированные полностью определенные автоматы и в композиции отсутствует бесконечный диалог между компонентами (осцилляция), то поведение такой композиции можно описать полностью определенным временным автоматом.

Аналогично композиции для конечных автоматов [2] композиция временных автоматов может быть построена по соответствующим полуавтоматам. Так как время в обеих компонентах течет одинаково, то можно говорить об использовании внешнего (по отношению к компонентам) действия 1, которое соответствует ожиданию сигнала в течение одной единицы времени. Таким образом, специальный символ 1 фактически используется для описания таймаутов (входных и выходных) в компонентах и композиции.

Рассмотрим полуавтомат $A = (A, X, a_0, \delta_A, F_A)$, в котором $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$. Полуавтомат, который является *ограничением* полуавтомата A на алфавит V , обозначение $A \downarrow_V$, может быть построен заменой каждого перехода (s_1, x, s_2) , такого что $x \notin V$, переходом (s_1, ε, s_2) , где ε означает пустой символ, с последующей детерминизацией полуавтомата с ε -переходами по известной процедуре [3]. Полуавтомат, представляющий *расширение* полуавтомата $B = (B, U, b_0, \delta_B, F_B)$ на алфавит V , обозначение $B \uparrow_V$, может быть построен добавлением петли (b, v, b) для всех $v \in V$ в каждом состоянии $b \in B$ [Там же]. Рассмотрим полуавтоматы $A = (A, X \cup Y, a_0, \delta_A, F_A)$ и $B = (B, Y \cup Z, b_0, \delta_B, F_B)$, такие что алфавиты X, Y, Z попарно не пересекаются. *Параллельной композицией* полуавтоматов A и B называется полуавтомат $C = (C, X \cup Z, c_0, \delta_C, F_C)$, такой что $C = [A \uparrow_Z \cap B \uparrow_X] \downarrow_{X \cup Z}$ (обозначение $C = A \diamond B$).

Параллельная композиция временных автоматов может быть построена как композиция соответствующих полуавтоматов: расширение полуавтомата для каждой компоненты осуществляется на внешние алфавиты другой компоненты и соответствует тому факту, что обработка внешних символов одной компонентой не влияет ни на состояние, ни на значение временной переменной другой компоненты. Пересечение расширенных полуавтоматов-компонент представляет множество всех возможных диалогов между компонентами. Каждому диалогу, начинающемуся с внешнего входного символа и заканчивающемуся внешним выходным символом, соответствует переход в композиции, и для определения всех таких переходов необходимо «спрятать» все внутренние символы, посредством которых производится взаимодействие между компонентами, т.е. построить ограничение на внешние алфавиты. Поскольку, по определению, специальный символ 1 является внешним для компонент, то он сохраняется при построении ограничения. Построенный полуавтомат пересекается с полуавтоматом, распознающим язык $T_{1,0}$, и если полученный полуавтомат соответствует некоторому временному автомату, то строится соответствующий временной автомат.

Иными словами, пусть заданы полностью определенные детерминированные временные автоматы S и P . Тогда временной автомат C , соответствующий полуавтомату $Aut(C) = [Aut(S) \diamond Aut(P)] \cap Aut(T_{1,0})$, есть *параллельная композиция автоматов* S и P .

Язык $L(C)$ полуавтомата $Aut(C)$ является языком некоторого временного автомата: язык $[L(S) \diamond L(P)] \cap T_{1,0}$ полуавтомата $[Aut(S) \diamond Aut(P)] \cap Aut(T_{1,0})$ является префикс-замкнутым как параллельная композиция префикс-замкнутых языков [2], и для детерминированных автоматов-компонент пересечение с $T_{1,0}$ удостоверяет, что за каждым внешним входным символом следует после некоторой задержки (цепочки переходов по символу 1) один и только один внешний выходной символ, и, таким образом, определение параллельной композиции корректно. Доказательство соответствия этого определения предложенному выше словарному описанию работы параллельной композиции временных автоматов не приводится ввиду ограниченного объема статьи.

Отметим, что при взаимодействии компонент некоторые внешние входные символы могут порождать бесконечный диалог между компонентами (*осцилляции*), и такие внешние входные символы обычно запрещаются к подаче на композицию. Соответственно, в этом случае композиция $A \diamond B$ является частично определенным автоматом. Для обнаружения осцилляций для конечных автоматов

обычно устанавливается максимальное время ожидания внешнего выходного символа от композиции, при превышении которого делается вывод о нежелательном поведении композиции [3]. Для временных автоматов используемые временные функции позволяют определить более точно время ожидания выходного символа для каждого перехода.

Утверждение 2. Композиция детерминированных временных автоматов есть детерминированный временной автомат.

Доказательство. Так как для каждого входного символа в обоих компонентах в каждом состоянии определено не более одного перехода, то существует не более одной последовательности внутренних действий для каждого внешнего входного символа и, следовательно, не более одного внешнего выходного символа, который может быть произведен композицией при подаче некоторого входного символа.

3. Недетерминированный по времени автомат с таймаутами

В общем случае для недетерминированных временных автоматов S и P для полуавтомата $[Aut(S) \diamond Aut(P)] \cap Aut(T_{I,O})$ не существует соответствующего временного автомата, так как определенный выше автомат не допускает недетерминизма по времени, в то время как в соответствующем полуавтомате возможны циклы между переходами по входному и выходному символам, в которых все переходы помечены символом 1. Чтобы описать композицию недетерминированных автоматов, мы расширяем понятие функции задержки выходного символа во временном автомате.

Далее под временным автоматом понимается семёрка $S = (S, I, O, s_0, \lambda_S, \Delta_S, \sigma_S)$, где $(S, I, O, s_0, \lambda_S)$ есть конечный автомат, $\Delta_S: S \rightarrow S \times (N \cup \{\infty\})$ – функция задержки входного символа и $\sigma_S: \lambda_S \rightarrow 2^{(N \cup \{0\})} \setminus \emptyset$ – функция задержки выходного символа, определяющая для каждого перехода непустое, возможно бесконечное множество допустимых моментов времени, в которые автоматом может быть произведен выходной символ.

В данной работе мы предполагаем, что такое множество задано как множество значений конечного набора линейных функций, т.е. множество целочисленных функций вида $\{b + k \cdot t \mid b, k \in \{0\} \cup N\}$. Рассмотрим линейную функцию $f(t) = b + k \cdot t$. Функции $f(t)$ можно поставить в соответствие детерминированный полуавтомат с однобуквенным алфавитом, такой что полуавтомат принимает слово длины l , если и только если l принадлежит множеству значений функции $f(t)$. Для однобуквенного алфавита $\{1\}$ язык такого полуавтомата может быть задан выражением $1^b(1^k)^*$. Набор линейных функций $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$, соответственно, может быть представлен объединением соответствующих полуавтоматов. Иными словами, значения функции σ_S задержки выходного символа могут быть представлены цепочками из символа 1 соответствующей длины в детерминированном полуавтомате. Таким образом, построение полуавтомата для такого недетерминированного по выходным задержкам автомата осуществляется по правилам, аналогичным введенным в разделе 2, с той лишь разницей, что значения функции σ_S «раскрываются» не в цепочку переходов, а в полуавтомат с переходами по символу 1. Утверждение 1, сформулированное для детерминированных по выходным задержкам автоматов, также будет справедливо и для расширенной модели временного автомата с таймаутами.

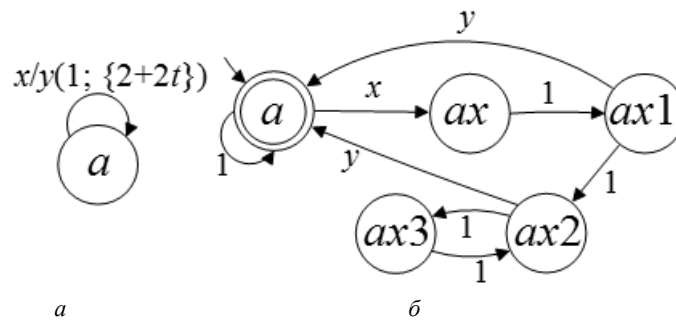


Рис. 3. Недетерминированный автомат S (а) и соответствующий ему полуавтомат $Aut(S)$ (б)

Пример построения полуавтомата, соответствующего недетерминированному по времени автомату, приведен на рис. 3: при подаче входного символа x выходной символ y может появиться на выходе автомата через $1, 2, 4, \dots, 2k$ единиц времени.

4. Композиция недетерминированных временных автоматов

Введенное расширение временного автомата позволяет определить параллельную композицию для недетерминированных компонент, причем недетерминированных как по входным символам, так и по задержкам выходного символа. Таким образом, в общем случае параллельной композицией временных автоматов S и P называется временной автомат C , соответствующий полуавтомату $Aut(C) = [Aut(S) \diamond Aut(P)] \cap Aut(T_{i,o})$.

Утверждение 3. Множество временных автоматов с таймаутами замкнуто относительно операции параллельной композиции.

Доказательство следует из установленного соответствия между временными автоматами и полуавтоматами и того факта, что множество конечных полуавтоматов замкнуто относительно операций расширения, ограничения и пересечения.

В качестве примера рассмотрим построение композиции недетерминированного временного автомата S и детерминированного автомата P (рис. 4). На рис. 5 приведены ограничение пересечения расширенных полуавтоматов $Aut(S)$ и $Aut(P)$ на внешние алфавиты композиции и соответствующий недетерминированный временной автомат C , являющийся параллельной композицией автоматов S и P .

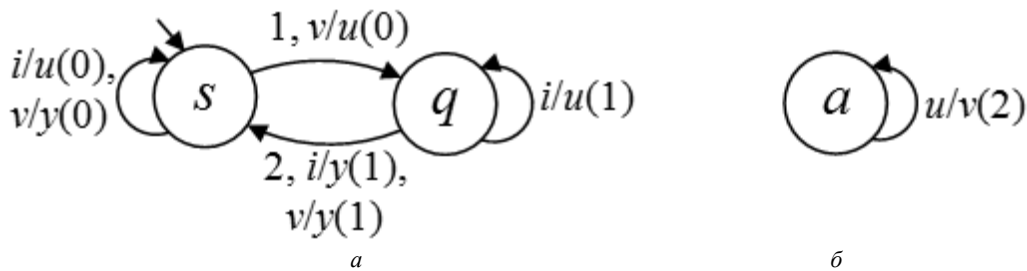


Рис. 4. Временные автоматы S (а) и P (б)

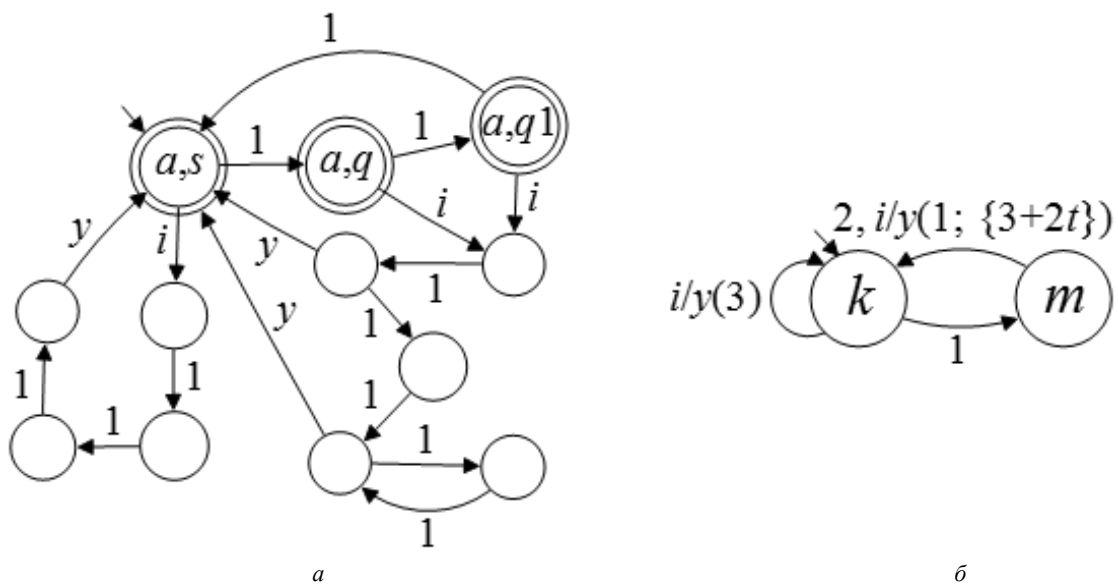


Рис. 5. Полуавтомат $[Aut(S) \upharpoonright_{\{i,y\}} \cap Aut(P)] \downharpoonright_{\{i,y,1\}}$ (а) и временной автомат C – композиция автоматов S и P (б)

Заключение

В работе предложен метод построения параллельной композиции временных автоматов с таймаутами и показано, что для описания композиции недетерминированных автоматов классической модели конечного автомата с таймаутами, в которой каждому переходу соответствует единственная задержка выходного символа, недостаточно. Предложено расширение модели временного автомата, позволяющее учитывать множество (возможно, бесконечное) допустимых задержек выходного символа. Показано, что множество временных автоматов, допустимые задержки выходного символа в которых описаны значениями конечного набора целочисленных линейных функций, является замкнутым относительно операции параллельной композиции. Полученные результаты могут быть в дальнейшем использованы для решения уравнений относительно временных автоматов, построения тестов для параллельной композиции временных автоматов и ее компонент и в других приложениях, где используются конечно автоматные модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhigulin M., Yevtushenko N., Maag S., Cavalli A.R. FSM-based test derivation strategies for systems with time-outs // Proceedings of the international conference QSIC. 2011. P. 141–149.
2. Villa T., Yevtushenko N., Brayton R.K., Mishchenko A., Petrenko A., Sangiovanni Vincentelli A.L. The unknown component problem: theory and applications. Springer, 2012. 311 p.
3. Евтушенко Н.В., Петренко А.Ф., Ветрова М.В. Недетерминированные автоматы: анализ и синтез : учеб. пособие. Ч. 1: Отношения и операции. Томск : Томский государственный университет, 2006. 142 с.

Кондратьева Ольга Викторовна. E-mail: olga.kondratyeva@telecom-sudparis.eu

Евтушенко Нина Владимировна, д-р техн. наук, профессор. E-mail: ninayevtushenko@yahoo.com

Томский государственный университет

Кавалли Ана Роза, PhD. Prof. E-mail: ana.cavalli@telecom-sudparis.eu

Университет Телеком Южный Париж, Франция

Поступила в редакцию 1 февраля 2014 г.

Kondratyeva Olga V., Yevtushenko Nina V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation), Cavalli Ana R. (Telecom SudParis, Paris, France).

Parallel composition of nondeterministic Finite State Machines with Timeouts.

Keywords: Finite State Machine with Timeouts (TFSM); deterministic TFSM; nondeterministic TFSM; parallel composition.

The problem of describing the behavior of communicating discrete event systems arises in a number of applications. Many discrete systems can be considered as systems transforming input sequences of actions in one alphabet into output sequences in another alphabet. Often for analysis and synthesis of such systems it is important to take into account time aspects of their behavior, and hence, develop appropriate models. In this paper, we consider the composition of discrete event systems interacting in an asynchronous (parallel) mode taking into account their timeout properties. Finite state models are widely used for discrete event system synthesis and analysis, and in this paper, we use the notion of a Finite State Machine (FSM) with timeouts when describing the system behavior. A Finite State Machine with timeouts, or simply a Timed Finite State Machine (TFSM) throughout the paper, is an initialized FSM augmented with an input timeout function and an output timeout function. The input timeout function specifies the maximal time of waiting for an input for each state, and the next state where the TFSM moves to if no input has been applied before the timeout expires. The output timeout function (often referred to as an output delay function) specifies the number of time instances needed for the TFSM to process an applied input and produce a corresponding output. The set of traces of the TFSM is represented as that of a proper deterministic finite automaton in a following way: a corresponding automaton $Aut(S)$ accepts a trace

$\alpha = 1^{t_1} [i_1 1^{k_1} o_1 \dots 1^{t_m} i_m 1^{k_m} o_m]^p$, if and only if $p = 0$ or $p = 1$ and $\langle i_1, t_1 \rangle / \langle o_1, k_1 \rangle \dots \langle i_m, t_m \rangle / \langle o_m, k_m \rangle$ is a time trace of the given TFSM S .

To derive such automaton, each TFSM transition is unfolded into a chain of consecutive transitions and there is a corresponding chain of transitions between an input and output symbols labeled by a special symbol 1 (which represents an action “to wait for one time unit”) according to the timeout functions. In the parallel composition, the components communicate in a dialogue mode and as usual, Finite State Machines communicate under the assumption of a “slow environment”. In other words, the next input is applied only after the composition has produced an output to the previous input. The parallel composition of two TFSMs is defined through the operations over corresponding finite automata: given the component TFSMs S and P , the composition TFSM $C = S \diamond P$ is the machine that has the corresponding automaton $Aut(C) = [Aut(S) \diamond Aut(P)] \cap Aut(T_{I,O})$, where $T_{I,O} = [(1^* I(1)^* O)^*(1)^*$ represents the language containing all the TFSM languages (in other words, the language accepted by the union of all the corresponding automata). The set of deterministic TFSMs is shown to be closed under parallel composition, i.e., the composition of deterministic

component TFSMs is a deterministic TFSM. However, for nondeterministic component TFSMs the composition behavior cannot be described by a TFSM where there is a unique output timeout for each transition. In order to describe the behavior of the composition of nondeterministic component TFSMs it is necessary to take into account that for some transitions, the set of allowed output delays is not a singleton but possibly, an infinite set of allowed delays. Correspondingly, we extend the definition of the output delay function, assuming that the set of allowed output delays is the set (possibly infinite) of corresponding values of a finite set of linear functions described as $\{b + k \cdot t \mid b, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. We show that under such extension the set of TFSMs is closed under parallel composition, and therefore, sufficient to describe communication of the component TFSMs whether they are deterministic or nondeterministic. The obtained results can be used in a number of applications, in particular, when solving equations over TFSMs, or testing the composition and its components.

REFERENCES

1. Zhigulin M., Yevtushenko N., Maag S., Cavalli A.R. FSM-based test derivation strategies for systems with time-outs. *Proceedings of the international conference QSI*C, 2011, pp. 141-149.
2. Villa T., Yevtushenko N., Brayton R.K., Mishchenko A., Petrenko A., Sangiovanni Vincentelli A.L. *The unknown component problem: theory and applications*. Springer, 2012. 311 p.
3. Yevtushenko N.V., Petrenko A.F., Vetrova M.V. *Nedeterminirovannye avtomaty: analiz i sintez. Ch. 1: Otnosheniya i operatsii* [Nondeterministic automata: analysis and synthesis. Part 1. Relations and operations]. Tomsk: Tomsk State University Publ., 2006. 142 p.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 004.312

А.Ю. Матросова, С.А. Останин, А.В. Бухаров, И.Е. Кириенко

ПОИСК ВСЕХ ТЕСТОВЫХ НАБОРОВ ДЛЯ НЕИСПРАВНОСТИ ЛОГИЧЕСКОЙ СХЕМЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИХ ROBDD-ГРАФОМ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта (№ 14-19-00218).

Рассматриваются комбинационная схема и константная неисправность на полюсе одного из ее вентилях. Предлагается алгоритм построения множества всех тестовых наборов для заданной неисправности, ориентированный на компактное представление этого множества в виде ROBDD-графа. Алгоритм основан на методе достраивания конъюнкций, предназначенном для построения одного (любого) тестового набора для заданной неисправности комбинационной схемы. Его расширение на построение всех тестовых наборов, в том числе и комбинационных эквивалентов схем с памятью, обеспечивается применением операций над ROBDD-графами.

Ключевые слова: одиночные константные неисправности; тестовые наборы; ROBDD-графы.

Построение проверяющих тестов для комбинационных схем в классе одиночных константных неисправностей сводится к нахождению одного тестового набора для неисправности рассматриваемого класса. Последняя проблема широко исследовалась в России и за рубежом, были разработаны различные методы ее решения [1]. Нахождение всех тестовых наборов для неисправности из заданного класса может потребоваться, например, при поиске проверяющего теста минимальной длины. Решение обеих задач традиционными методами, т.е. поиск всех тестовых наборов и построение проверяющего теста минимальной длины, связано с большими вычислительными затратами и потребностью хранить огромные объемы информации. Поэтому на практике ограничиваются поисками нескольких или одного тестового набора для заданной неисправности и построением минимизированных проверяющих тестов, достаточно близких к минимальным.

В приложениях, связанных с тестированием неисправностей задержек путей схемы [2, 3], требуется находить все тестовые наборы, порождаемые конкретной конъюнкцией ДНФ, описывающей поведение схемы.

Известно, что поведение подсхемы в условиях включения ее в схему может быть описано частичной булевой функцией [4, 5]. Этот факт используется для минимизации схемы в целом. Множества единичных и нулевых наборов частичной функции подсхемы могут, на наш взгляд, быть представлены с помощью всех тестовых наборов для соответствующих константных неисправностей.

Один из подходов к синтезу частично программируемых логических схем высокой производительности [6] основан на описании поведения подсхемы, включенной в заданную схему, в виде реализации частичной функции. Реализаций может быть множество. Точное знание частичной функции позволяет найти более качественную в том или ином смысле реализацию и определить места включения в схему из вентилях программируемых блоков с целью маскирования возможных неисправностей. Речь идет о неисправностях, обнаруживаемых на заключительных этапах проектирования схем. Для коррекции схемы необходимо вернуться на ранние этапы проектирования, что существенно увеличивает стоимость проектирования схемы. Присутствующие в схеме резервные программируемые блоки позволяют маскировать обнаруженную неисправность и тем самым избежать возвращения к

ранним этапам проектирования. Исходя из вышесказанного, важно уметь находить множество всех тестовых наборов для заданной неисправности и компактно его представлять.

В данной работе предлагается находить множество всех тестовых наборов для константной неисправности на полюсе логического элемента на основе разработанного нами ранее метода достраивания конъюнкций. Используется представление схем и подсхем в виде ROBDD-графов. Построение множества всех тестовых наборов выполняется путем перемножения ROBDD-графов подсхем заданной схемы. Как известно, графовое представление булевых функций является более компактным по сравнению с аналитическими способами задания функций в виде ДНФ или КНФ, а операции над ROBDD-графами обладают полиномиальной сложностью.

В 1-м разделе работы обсуждается метод достраивания конъюнкций, что необходимо для понимания предлагаемого нами алгоритма построения всех тестовых наборов для заданной неисправности в комбинационной схеме. Во 2-м разделе предлагается алгоритм построения множества всех тестовых наборов, приводится пример, его иллюстрирующий, и обсуждается распространение алгоритма на комбинационный эквивалент схемы с памятью в условиях описания поведения последовательностной схемы системой частичных булевых функций.

1. Метод достраивания конъюнкций для построения одного (любого) тестового набора

В работе [1] нами был предложен метод достраивания конъюнкций, в котором выявлены возможности сокращения перебора при поиске одного (любого) тестового набора для одиночной константной неисправности полюса логического элемента схемы. Предполагается, хотя это и не обязательно, что схема построена из вентилях OR, NOR, AND, NAND, NOR, EXOR.

Заданы одна выходная комбинационная схема и неисправный полюс v . Обозначим через $\phi(X)$, $\phi^v(X)$ булевы функции, реализуемые схемой в исправном и неисправном состояниях, где $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – множество входных переменных схемы. Отыскание теста для данной неисправности сведем к отысканию корня булева уравнения

$$D(\phi)\bar{D}(\phi^v) \vee \bar{D}(\phi)D(\phi^v) = 1.$$

По заданной схеме C (рис. 1) и заданному неисправному полюсу v выделим подсхему (рис. 2), реализующую функцию $\zeta(X, v)$, при условии, что переменная v рассматривается в качестве входной наряду с переменными $x_1, \dots, x_n$. Выделим также подсхему (рис. 3), выходом которой является неисправный полюс v , а входами – переменные $x_1, \dots, x_n$. Эта подсхема реализует функцию $f(X)$.

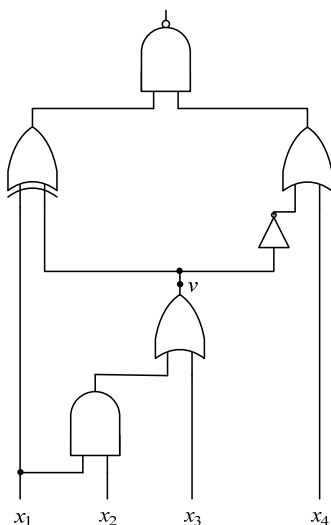


Рис. 1. Комбинационная схема C

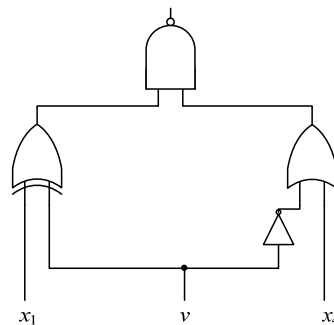


Рис. 2. Подсхема, реализующая функцию $\zeta(X, v)$

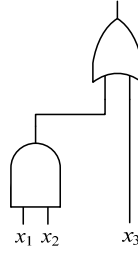


Рис. 3. Подсхема, реализующая функцию $f(X)$

Для схемы на рис. 2 функция $\zeta(X, v)$ в виде ДНФ представляется выражением $x_1 v \vee \bar{x}_1 \bar{v} \vee \bar{x}_4 v$, а функция $f(X)$ – выражением $x_1 x_2 \vee x_3$.

Обозначим через σ тип неисправности на полюсе v , $\sigma \in \{0, 1\}$.

Из построения функций $\zeta(X, v)$ и $f(X)$ следует, что

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= \zeta(X, f(X)), \\ \varphi^v(X) &= \zeta(X, \sigma).\end{aligned}$$

Обозначим через $D(\zeta)$ ДНФ функции $\zeta(X, v)$. Представим эту ДНФ в виде $K \vee K^v \vee K^{\bar{v}}$; в ДНФ K – конъюнкции, не содержащие литер $v, \bar{v}$; в ДНФ K^v включаются конъюнкции, содержащие литеру v ; в ДНФ $K^{\bar{v}}$ – конъюнкции, содержащие литеру $\bar{v}$. Если $\sigma = 0$ (1), то K^v ($K^{\bar{v}}$) обращается в ноль, а $K^{\bar{v}}$ (K^v) обращается в $K^{\bar{v}'} (K^{v'})$, причем ДНФ $K^{\bar{v}'} (K^{v'})$ получается из ДНФ $K^{\bar{v}} (K^v)$ вычеркиванием литеры $\bar{v} (v)$. Тогда для $\sigma = 0(1)$ $D(\varphi^v) = K \vee K^{\bar{v}'} (K \vee K^{v'})$.

Пусть ДНФ $K^{\bar{v}''} (K^{v''})$ получается из $K^{\bar{v}} (K^v)$ подстановкой вместо литеры $\bar{v} (v)$ функции $\bar{f}(X)$ ($f(X)$), представленной в виде ДНФ. Обозначим через β набор значений переменных $x_1, \dots, x_n$.

Теорема 1. β – тест для неисправности $\sigma = 0(1)$ и $\varphi(\beta) = 1$, если и только если

$$\begin{aligned}K^{v''}(\beta) &= 1 \text{ (} K^{\bar{v}''}(\beta) = 1), \\ K(\beta) &= 0, \\ K^{\bar{v}'}(\beta) &= 0 \text{ (} K^{v'}(\beta) = 0).\end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы приведено в работе [1].

Пусть $\bar{\varphi}(X)$, $\bar{\varphi}^v(X)$, $\bar{\zeta}(X, v)$ – инверсии функций $\varphi(X)$, $\varphi^v(X)$, $\zeta(X, v)$. Обозначим через $\bar{D}(\zeta)$ ДНФ функции $\bar{\zeta}(X, v)$.

Представим эту ДНФ в виде $\underline{K} \vee \underline{K}^v \vee \underline{K}^{\bar{v}}$.

В ДНФ $\underline{K}$ включаются конъюнкции, не содержащие литер $v, \bar{v}$; в ДНФ $\underline{K}^v$ – конъюнкции, содержащие литеру v ; в ДНФ $\underline{K}^{\bar{v}}$ включаются конъюнкции, содержащие литеру $\bar{v}$. Если $\sigma = 0(1)$, то $\underline{K}^v$ ($\underline{K}^{\bar{v}}$) обращается в ноль, а $\underline{K}^{\bar{v}}$ ($\underline{K}^v$) обращается в $\underline{K}^{\bar{v}'} (\underline{K}^{v'})$, причем $\underline{K}^{\bar{v}'} (\underline{K}^{v'})$ получается из $\underline{K}^{\bar{v}} (\underline{K}^v)$ вычеркиванием литеры $\bar{v} (v)$. Тогда для $\sigma = 0(1)$ $\bar{D}(\varphi^v) = \underline{K} \vee \underline{K}^{\bar{v}'} (\underline{K} \vee \underline{K}^{v'})$.

Пусть ДНФ $\underline{K}^{\bar{v}''} (\underline{K}^{v''})$ получается из $\underline{K}^{\bar{v}} (\underline{K}^v)$ подстановкой вместо литеры $\bar{v} (v)$ функции $\bar{f}(X)$ ($f(X)$), представленной в виде ДНФ. Тогда $\bar{D}(\varphi) = \underline{K} \vee \underline{K}^{v''} \vee \underline{K}^{\bar{v}''}$.

Теорема 2. β – тест для неисправности $\sigma = 0(1)$ и $\varphi(\beta) = 0$, если и только если

$$\begin{aligned}\underline{K}^{v''}(\beta) &= 1 \text{ (} \underline{K}^{\bar{v}''}(\beta) = 1), \\ \underline{K}(\beta) &= 0, \\ \underline{K}^{\bar{v}'}(\beta) &= 0 \text{ (} \underline{K}^{v'}(\beta) = 0).\end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Алгоритм достраивания конъюнкций для $\sigma = 0(1)$

1. Строим ДНФ $D(\zeta)$.
 2. Получаем ДНФ $K^{v''} (K^{\bar{v}''})$.
 3. Выбираем очередную конъюнкцию k из $K^{v''} (K^{\bar{v}''})$. Приписываем к ней буквы таким образом, чтобы полученная конъюнкция k^* была ортогональна всем конъюнкциям из $K \vee K^{v'} (K \vee K^{v'})$. Если k^* построить не удастся, возвращаемся к п. 3 алгоритма, с тем чтобы выбрать новую конъюнкцию из $K^{v''} (K^{\bar{v}''})$. Построив k^* , переходим к п. 5 алгоритма. Если все конъюнкции из $K^{v''} (K^{\bar{v}''})$ просмотрены, переходим к п. 4 алгоритма.

4. Возвращаемся к п. 3 алгоритма, рассматривая вместо ДНФ $D(\zeta)$ ДНФ $\bar{D}(\zeta)$, а вместо ДНФ K , $K^{\bar{v}''}$, $K^{v''}$, $K^{v'}$, $K^{\bar{v}'}$, соответственно ДНФ $\underline{K}$, $\underline{K}^{\bar{v}''}$, $\underline{K}^{v''}$, $\underline{K}^{v'}$, $\underline{K}^{\bar{v}'}$. Если все конъюнкции из $\underline{K}^{v''} (\underline{K}^{\bar{v}''})$ просмотрены, а тест не найден, значит, теста для рассматриваемой неисправности не существует.

5. Достраиваем конъюнкцию k^* произвольным образом до конъюнкции ранга n . Полученная конъюнкция представляет тестовый набор β .

Достраивание конъюнкции k до k^* сводится к отысканию одного корня булева уравнения $D = 0$. Левая часть уравнения получается из не ортогональных для k конъюнкций, принадлежащих ДНФ $K \vee K^{v'} (K \vee K^{v'})$ или ДНФ $\underline{K} \vee \underline{K}^{\bar{v}'} (\underline{K} \vee \underline{K}^{v'})$, причем в этих конъюнкциях вычеркнуты литеры, используемые в k . При отыскании тестового набора описываемым здесь методом приходится достраивать очередную конъюнкцию k до k^* , пока k^* не будет найдена.

Рассмотрим пример.

$$D(\zeta) = x_1 v \vee \bar{x}_1 \bar{v} \vee \bar{x}_4 v, \sigma = 0, K^v = x_1 v \vee \bar{x}_4 v, K^{\bar{v}} = \bar{x}_1 \bar{v}, K^{\bar{v}'} = \bar{x}_1.$$

$$D(f) = x_1 x_2 \vee x_3, K^{v''} = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_3 \bar{x}_4, k = k^* = x_1 x_2, \beta = 1 \ 100.$$

Метод достраивания конъюнкций требует получения ДНФ функций $D(\zeta)$, $D(f)$. Пользуясь этими ДНФ и их инверсиями, можно найти тестовый набор для данной неисправности, не зная ДНФ $D(\varphi)$ исправной функции.

2. Метод достраивания конъюнкций для построения всех тестовых наборов

Воспользуемся идеями, которые лежат в основе алгоритма построения тестового набора для заданной неисправности, с тем чтобы найти все ее тестовые наборы и компактно их представить.

Сначала опишем процедуру выделения из исходной одной выходной схемы S подсхемы, реализующей функцию $\zeta(X, v)$, для которой заданный неисправный полюс является входным. Для этого выбрасываем из схемы элемент e , выход которого является полюсом v , и все связанные только с ним элементы схемы, а именно элементы, выходы которых связаны только с входами элемента e . Они образуют 1-й ярус. Пусть уже построено i ярусов. Тогда в $(i+1)$ -й ярус включаются элементы, такие что выходы каждого элемента соединены только с входами элементов i -го и / или любых из предшествующих ярусов. Найденные таким образом элементы убираем из исходной схемы и получаем требуемую подсхему с входным полюсом v . Если неисправный полюс является входным для элемента e схемы, тогда рассматриваем связанный с ним выход предшествующего элемента g . Если элемент g не является точкой ветвления, то удаляем этот элемент вместе со связанными только с ним элементами схемы описанным выше способом. Если элемент g является точкой ветвления, то обрываем линию связи его с элементом e . Вход элемента e объявляем входом v схемы, реализующей функцию $\zeta(X, v)$.

Как известно, BDD (Binary Decision Diagram) – это ориентированный граф без циклов. Его построение основано на разложении Шеннона, используемого в каждой текущей вершине v строящегося BDD-графа:

$$f_v = \bar{x}_i f_v^{x_i=0} \vee x_i f_v^{x_i=1}.$$

Здесь f_v – функция, реализуемая в полюсе v . Пунктирная дуга (0-дуга), исходящая из v , заходит в дочернюю вершину, в которой реализуется функция $f_v^{x_i=0}$. Сплошная дуга (1-дуга) заходит в вершину, в которой реализуется функция $f_v^{x_i=1}$. BDD называется *упорядоченным* графом (Ordered BDD), если порядок разложения по переменным фиксирован для функции в целом и не зависит от конкретной вершины, к которой применяется разложение. BDD называется *сокращенным* графом (Reduced BDD), если он не содержит ни изоморфных подграфов, ни таких внутренних полюсов v , для которых выполняется условие $f_v^{x_i=0} = f_v^{x_i=1}$. Сокращенный и упорядоченный BDD (ROBDD) является каноническим представлением булевой функции относительно выбранного порядка разложения по переменным. Любой путь, связывающий корень BDD с 1-концевой вершиной, представляет конъюнкцию, а все такие пути – ортогональную ДНФ (ОДНФ) некоторой функции δ , представляемой ROBDD. ОДНФ есть дизъюнкция попарно ортогональных конъюнкций. Конъюнкции ортогональны, если в одной из них некоторая переменная присутствует со знаком инверсии, а в другой – без инверсии.

Обозначим через R^ζ ROBDD-граф, представляющий функцию $\zeta(X, v)$. Будем иметь в виду, что конъюнкции, сопоставляемые путям, идущим от корня этого графа через 1-дугу корня и заканчивающиеся в 1-концевой вершине, представляют ОДНФ K^v . Конъюнкции, сопоставляемые путям, идущим от корня графа R^ζ через 0-дугу корня и заканчивающиеся в 1-концевой вершине, представляют ОДНФ $K^{\bar{v}}$. ОДНФ, соответствующая R^ζ , представляется в виде $\zeta(X, v) = K^v \vee K^{\bar{v}}$, т.е. в ОДНФ отсутствуют конъюнкции, не содержащие литер $v, \bar{v}$. ОДНФ $K^{v'}$ представляется отдельным ROBDD-графом $R^{v'}$, корнем которого является вершина, в которую заходит 1-дуга графа R^ζ . ОДНФ $K^{\bar{v}'}$ представляется отдельным ROBDD-графом $R^{\bar{v}'}$, корнем которого является вершина, в которую заходит 0-дуга графа R^ζ .

Обозначим через R_f ROBDD-граф, представляющий функцию f . Будем иметь в виду, что конъюнкции, сопоставляемые путям, идущим от корня этого графа и заканчивающиеся в 1-концевой вершине, представляют ОДНФ функции f . Конъюнкции, сопоставляемые путям, идущим от корня этого графа и заканчивающиеся в 0-концевой вершине, представляют ОДНФ функции $\bar{f}$.

Сначала предлагается вместо достраивания конъюнкции k из $K^{v''}$ ($\sigma = 0$) до k^* , как это делается в приведенном выше алгоритме, достраивать конъюнкцию k из $K^{v'}$ до всевозможных k' , обеспечивая для каждой k' ортогональность всем конъюнкциям ДНФ $K^{\bar{v}'}$. Достраивание выполняется для каждой конъюнкции из $K^{v'}$. Обозначим через $\underline{R}^{\bar{v}'}$ граф, представляющий инверсию ДНФ $K^{\bar{v}'}$. Он получается из $R^{\bar{v}'}$ переименованием концевых вершин. Результат достраивания представляется графом R' , получаемым перемножением графов $R^{v'}$ и $\underline{R}^{\bar{v}'}$, т.е. $R' = R^{v'} \underline{R}^{\bar{v}'}$.

Получение всевозможных k^* , задающих тестовые наборы для неисправности $\sigma = 0$ при условии $\varphi(X) = 1$, далее обеспечивается перемножением всех полученных из $K^{v'}$ конъюнкций k' , представленных ROBDD R' , и графа R_f , задающего функцию f : $R^{\tau_1} = R_f R'$.

Алгоритм достраивания конъюнкций для построения всех тестовых наборов

1. Строим подсхему, реализующую функцию $\zeta(X, v)$, в которой полюс v является ее входом.
2. Строим ROBDD R^ζ для этой подсхемы, выбирая полюс v в качестве первого элемента в упорядоченном списке разложения по переменным. Представленный граф задает функцию $\zeta(X, v)$ и ее инверсию.
3. Строим ROBDD-графы $R_f, R^{v'}, R^{\bar{v}'}$.
4. Рассматриваем неисправность на полюсе v : $\sigma = 0$.
5. Получаем граф $R^{\tau_1} = R^{v'} \underline{R}^{\bar{v}'} R_f$ (конъюнкции k из $K^{v''}$ достраиваются до конъюнкций k^*), представляющий своими путями от корня к 1-концевой вершине все тестовые наборы, на которых исправная схема принимает значение 1, а неисправная – 0 в присутствии неисправности $\sigma = 0$ на полюсе v .

6. Меняем местами концевые вершины графа R^ζ . Получаем граф $\underline{R}^\zeta$. Выполняем п. 5, рассматривая вместо ДНФ $K^{v'}$, $K^{\bar{v}}$ ДНФ $\underline{K}^{v'}$, $\underline{K}^{\bar{v}}$. Поменяв местами концевые вершины графа $R^{v'}$, получаем граф $\underline{R}^{v'}$, а затем ROBDD $R^{t_0} = \underline{R}^{v'} R^{\bar{v}'} R_f$, представляющий своими путями от корня к 1-концевой вершине все тестовые наборы, на которых исправная схема принимает значение 0, а неисправная – 1 в присутствии неисправности $\sigma = 0$ на полюсе v .

7. Объединяем R^{t_0} и R^{t_1} графы, получаем граф $\mathbf{R}^0 = R^{t_0} \vee R^{t_1}$, представляющий своими путями от корня к 1-концевой вершине все тестовые наборы для неисправности $\sigma = 0$ на полюсе v .

8. Рассматриваем неисправность $\sigma = 1$ на полюсе v .

9. Строим ROBDD-графы $\underline{R}_f$ (меняя местами концевые вершины графа R_f), $R^{v'}$, $R^{\bar{v}'}$.

10. Получаем граф $R^{t_1} = R^{\bar{v}'} \underline{R}^{v'} \underline{R}_f$ (конъюнкции k из $K^{\bar{v}'}$ достраиваются до конъюнкций k^*), представляющий своими путями от корня к 1-концевой вершине все тестовые наборы, на которых исправная схема принимает значение 1, а неисправная – 0 в присутствии неисправности $\sigma = 1$ на полюсе v .

11. Меняем местами концевые вершины графа R^ζ . Получаем граф $\underline{R}^\zeta$. Выполняем п. 10, рассматривая вместо ДНФ $K^{v'}$, $K^{\bar{v}}$ ДНФ $\underline{K}^{v'}$, $\underline{K}^{\bar{v}}$. Поменяв местами концевые вершины графа $R^{\bar{v}'}$, получаем граф $\underline{R}^{\bar{v}'}$, а затем ROBDD $R^{t_0} = \underline{R}^{\bar{v}'} R^{v'} \underline{R}_f$, представляющий своими путями от корня к 1-концевой вершине все тестовые наборы, на которых исправная схема принимает значение 0, а неисправная – 1 в присутствии неисправности $\sigma = 1$ на полюсе v .

12. Объединяем графы R^{t_0} , R^{t_1} , получаем граф $\mathbf{R}^1 = R^{t_0} \vee R^{t_1}$, представляющий своими путями от корня к 1-концевой вершине все тестовые наборы для неисправности $\sigma = 1$ на полюсе v .

Рассмотрим пример. ДНФ $D(\zeta)$ представлена выражением $x_1 v \vee \bar{x}_1 \bar{v} \vee \bar{x}_4 v$.

Соответствующий ей граф (рис. 4) построен с использованием следующего порядка разложения по переменным: v, x_1, x_2, x_3, x_4 . ROBDD R_f (рис. 5) и все последующие графы строятся для того же порядка разложения по переменным:

$$D(f) = x_1 x_2 \vee x_3.$$

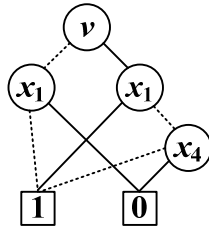


Рис. 4. ROBDD R^ζ для $D(\zeta)$

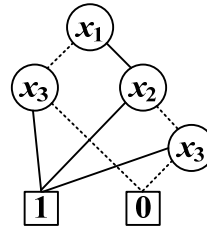


Рис. 5. ROBDD R_f для $D(f)$

Пусть $\sigma = 0$. Выделяем графы $R^{v'}$, $R^{\bar{v}'}$ из R^ζ . Граф $\underline{R}^{\bar{v}'}$ получается из $R^{v'}$ переименованием вершин. Граф $R^{t_1} = R^{v'} \underline{R}^{\bar{v}'} R_f$ представлен в виде ROBDD на рис. 6.

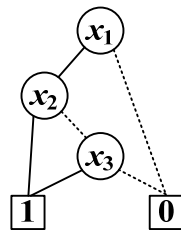


Рис. 6. ROBDD R^{t_1}

Меняем местами концевые вершины графа R^5 , получаем граф $\underline{R}^5$.

Граф $R^{t_0} = \underline{R}^{v'} R^{\bar{v}'} R_f$ представлен на рис. 7. ROBDD $\mathbf{R}^0$ представлен рис. 8.

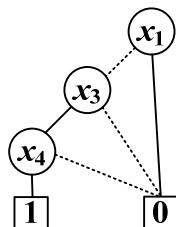


Рис. 7. ROBDD R^{t_0}

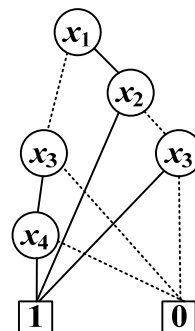


Рис. 8. ROBDD $\mathbf{R}^0$

Предложенный метод может быть распространен на многовыходные комбинационные схемы. Если рассматриваемый неисправный полюс соединен с несколькими выходами схемы, то для каждого из выходов строится свой граф $\mathbf{R}^0$ ($\mathbf{R}^1$), а затем находится ROBDD-граф, представляющий их объединение.

Построение множества всех тестовых наборов в схемах с памятью

Пусть комбинационная схема является комбинационной составляющей схемы с памятью (последовательностной схемы). Задание на синтез такой схемы, как правило, представляется системой частичных булевых функций. Каждая из функций φ задается множеством единичных и множеством нулевых наборов $M^1(\varphi)$, $M^0(\varphi)$. Эти наборы задают рабочую область функционирования последовательностной схемы. Поведение схемы вне рабочей области интереса не представляет. Поэтому множество тестовых наборов для заданной неисправности комбинационной составляющей последовательностной схемы следует ограничить рабочей областью функционирования схемы с памятью.

Зададим множества $M^1(\varphi)$, $M^0(\varphi)$ ROBDD-графами R_φ^1 , R_φ^0 соответственно. Тогда R^{t_1} , R^{t_0} представляются в виде $R^{t_1} = R_\varphi^1 R^{v'} \underline{R}^{\bar{v}'} R_f$, $R^{t_0} = R_\varphi^0 R^{v'} \underline{R}^{\bar{v}'} R_f$ для неисправности $\sigma = 0$. Аналогичным образом находятся множества тестовых наборов для неисправности $\sigma = 1$.

Заключение

Предложен алгоритм нахождения всех тестовых наборов для константной неисправности полюса логического элемента комбинационной схемы или комбинационного эквивалента последовательностной схемы. Алгоритм позволяет представлять множество всех тестовых наборов для неисправного полюса в виде ROBDD-графа и сводится к перемножению ROBDD-графов, соответствующих подсхемам заданной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матросова А.Ю. Метод обнаружения неисправности в синхронном устройстве // Автоматика и телемеханика. 1977. № 12. С. 129–137.
2. Matrosova A.Yu., Melnikov A.V., Mukhamedov R.V., Ostanin S.A., Singh V. Selection of the flip-flops for partial enhanced scan techniques // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2(19). С. 112–120.
3. Matrosova A.Yu., Ostanin S.A., Melnikov A.V., Singh V. Observability Calculation of State Variable Oriented to Robust PDFs and LOC or LOS Techniques // Proc. of IEEE East-West Design&Test Symposium (EWDTS 2012). Ukrain, 2012. P. 155–160.

4. Muroga S., Kambayashi Y., Lai H.C., Culliney J.N. The transduction method-design of logic networks based on permissible functions // IEEE Trans. on Computers. 1989. V. 38, No. 10. P. 1404–1424.
5. Yamashita S., Sawada H., Nagoya A. SPFD: A new method to express functional permissibilities // IEEE Trans. On CAD. 2000. V. 19, No. 8. P. 840–849.
6. Yamashita S., Yoshida H., Fujita M. Increasing yield using partially-programmable circuits // Proc. SASIMI. 2010. P. 237–242.

Матросова Анжела Юрьевна, д-р техн. наук, профессор. E-mail: mau11@yandex.ru

Останин Сергей Александрович, канд. техн. наук, доцент. E-mail: ostanin@mail.tsu.ru

Бухаров Александр Вениаминович. E-mail: darkhell1204@mail.ru

Кириенко Ирина Евгеньевна. E-mail: darkhell1204@mail.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 20 января 2014 г.

Matrosova Anzhela Y., Ostanin Sergei A., Bucharov Alexander V., Kirienko Irina E. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

Generating all test patterns for a given stuck-at fault of a logical circuit and its ROBDD implementation.

Keywords: stuck-at faults; test patterns; ROBDD.

Test generation for stuck-at faults at the gate poles of a combinational circuit is reduced to finding one test pattern for each stuck-at fault. This problem is intensively investigated in Russia and abroad. Some effective methods for its solving have been developed. If we would like to get a minimal test for such faults, we need to find all test patterns for each fault and then to cover all faults with minimal subset of these test patterns. Unfortunately, this approach is very time consuming. Moreover, the number of test patterns for one fault may be very large that is why in practice, a test engineer finds any test pattern for each fault and minimize the test length using obtained subset of test patterns.

The problem of finding all test patterns for the given fault is used in many applications. It is known that the subcircuit behavior (a frame of a given circuit C) may be described with a partially specified Boolean function. This fact is used for minimizing the overall circuit as a whole and except for changing subcircuits consisting of gates with the proper CLBs during design of partially-programmable circuits and can be used for minimizing programmable arrays? Partially specified functions of subcircuits may be represented by all test patterns for corresponding stuck-at faults of the circuit. Thus, it is very important to represent all test patterns in a compact way.

This paper is devoted to solving the problem of finding all test patterns for a given stuck-at fault and compact presentation of such test patterns. The method that has been suggested by our scientific group, for finding one (any) test pattern, is modified in this paper. The modification is based on the following. We consider a stuck-at pole as the input of a subcircuit which output coincides with the output of the given circuit C . For that subcircuit the ROBDD R^c is built and the first variable of the Shannon decomposition during the ROBDD construction is the variable corresponding to the stuck-at pole. The order of other variables may be arbitrary. From this ROBDD R^c we select ROBDDs $R^{v'}$, $R^{\bar{v}'}$ which roots are high and low nodes of the ROBDD R^c root. The subcircuit of C which output is the same stuck-at pole and inputs are inputs of the circuit C is represented as ROBDD R_f . The order of variables is the same for all constructed ROBDDs. The ROBDD representing all test patterns for the given stuck-at fault is derived by multiplying and summarizing some of above mentioned ROBDDs.

First, we briefly describe a method for finding one test pattern for a given stuck-at fault based on solving the proper Boolean equations and the representation of subcircuits as the SoPs (sum of products). Then a proposed algorithm for deriving all test patterns for a given stuck-at fault is described. The method can be extended to combinational equivalent of a sequential circuit. The example illustrating the algorithm is given.

REFERENCES

1. Matrosova A.Yu. A fault-detection method for a synchronous device. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1977, no. 12, pp.129-137. (In Russian).
2. Matrosova A.Yu., Melnikov A.V., Mukhamedov R.V., Ostanin S.A., Singh V. Selection of the flip-flops for partial enhanced scan techniques. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2012, no. 2(19), pp. 112-120. (In Russian).
3. Matrosova A.Yu., Ostanin S.A., Melnikov A.V., Singh V. Observability Calculation of State Variable Oriented to Robust PDFs and LOC or LOS Techniques. *Proc. of IEEE East-West Design&Test Symposium (EWDTS 2012)*. Ukrain, 2012, pp. 155-160.
4. Muroga S., Kambayashi Y., Lai H.C., Culliney J.N. The transduction method-design of logic networks based on permissible functions. *IEEE Trans. on Computers*, 1989. Vol. 38, no. 10, pp. 1404-1424. DOI: 10.1109/12.35836
5. Yamashita S., Sawada H., Nagoya A. SPFD: A new method to express functional permissibilities. *IEEE Trans. On CAD*, 2000. Vol. 19, No. 8. P. 840-849. DOI: 10.1109/43.856972
6. Yamashita S., Yoshida H., Fujita M. Increasing yield using partially-programmable circuits. *Proc. SASIMI*, 2010, pp. 237-242.

ХРОНИКИ

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

ПАМЯТИ АРКАДИЯ ДМИТРИЕВИЧА ЗАКРЕВСКОГО



25 февраля 2014 года на 86-м году жизни не стало Аркадия Дмитриевича Закревского, члена-корреспондента НАН Республики Беларусь, профессора, доктора технических наук, автора более 500 статей и 26 монографий. Он был ведущим специалистом в области компьютерных наук Советского Союза, создателем единственного в Советском Союзе языка программирования ЛЯПАС (Логический язык для представления алгоритмов синтеза дискретных устройств).

Научная карьера Аркадия Дмитриевича началась в Томске. В 1959–1971 гг. А.Д. Закревский – ассистент, старший научный сотрудник, заведующий лабораторией счетно-решающих устройств Сибирского физико-технического института им. акад. В.Д. Кузнецова, профессор, заведующий кафедрой математической логики и программирования Томского государственного университета. В 1971 г. он публикует широко известную в СССР фундаментальную монографию «Алгоритмы синтеза дискретных автоматов». Под его руководством создается первая в

СССР система автоматического синтеза дискретных автоматов, принятая комиссией по кибернетике при Президиуме АН СССР и используемая в 1970–1980-е гг. на многих предприятиях министерств электронной промышленности и радиоэлектроники.

В 1971 г. с группой сотрудников он переезжает в Минск и организует в Институте технической кибернетики АН БССР лабораторию Системного программирования и логического синтеза, впоследствии переименованную в лабораторию логического проектирования. В 1972 году избирается членом-корреспондентом АН БССР. А.Д. Закревский активно поддерживал международные научные контакты, входя в состав организационных и программных комитетов различных конференций, симпозиумов и семинаров, выступал с докладами. Сотрудничал с учеными России, Украины, Прибалтики, Польши, США, Германии, Португалии. За научно-организационную деятельность А.Д. Закревский награжден грамотами Верховного Совета БССР. Свою научную деятельность Аркадий Дмитриевич успешно сочетал с педагогической работой. Читал курсы лекций собственной разработки по математической логике, дискретной математике, теории вероятностей, теории автоматов, теории графов, теории булевых функций, программированию, методам логического проектирования и другим дисциплинам в ТГУ (г. Томск), БГУ и БГУИР (г. Минск). Им создана научная школа логического проектирования, более трех десятков его аспирантов стали кандидатами (восемь из них – докторами наук). Филиалы этой школы успешно функционируют в городах Томске и Севастополе. В институте технической кибернетики А.Д. Закревский работал до конца своей жизни.

Мне хочется поделиться своими воспоминаниями об Аркадии Дмитриевиче как о замечательном человеке, с которым посчастливилось встретиться в теперь уже очень далекие 60-е годы. Потом он стал для меня учителем, коллегой и старшим другом. Я была студенткой радиофизического факультета. Аркадий Дмитриевич нам не читал никаких курсов, но был хорошо известен студентам как один из лидеров тогда нового научного направления – кибернетики. На старших курсах я и некоторые мои сокурсники стали посещать его научный семинар. Первые впечатления от семинаров были ужасны – мы почти ничего не понимали. Аркадий Дмитриевич был всегда доброжелателен и старался ободрить. Постепенно мы становились членами этой научной группы: участвовали в коллективных лыжных походах, отмечали дни рождения. Я увидела в А.Д. Закревском не только требовательного научного руководителя, но и очень деликатного и скромного, несмотря на свои успехи и заслуги, человека.

Его отъезд в Минск был большой потерей для нашей научной группы. Надо сказать, что, переехав, Аркадий Дмитриевич продолжал быть в курсе дел своих учеников в Томске, оказывая им всяческую поддержку. В те времена были большие проблемы с устройством в гостиницу. В Минске этой проблемы не было – в распоряжении его учеников всегда был большой диван в рабочем кабинете его квартиры. Он и его жена Людмила даже обижались, если кто-то из учеников не останавливался у них. Приезжая в Минск, мы обсуждали с ним свои научные результаты, беседовали по вечерам на любые темы. Иногда собирались с остальными членами томской колонии, было весело и тепло всем вместе. Всегда, встречаясь с Аркадием Дмитриевичем в Минске или в других городах на конференциях чувствовали его искренний интерес и участие. Эти встречи оставались в памяти и обогащали: Аркадий Дмитриевич был много знающим не только в области своих научных интересов. Такие отношения с учениками (мы ведь очень разные, а он умел понять каждого) Аркадий Дмитриевич сохранил до конца жизни. Потом было меньше возможностей ездить в Минск, но появился Skype, и мы по-прежнему общались друг с другом.

Он был примером в своем служении науке. «Ни дня без строчки» – это его принцип. С утра он всегда работал в своем кабинете, и только командировки и особые обстоятельства могли помешать этой привычке. Даже в зрелые годы он оставался спортивным и физически выносливым человеком. Честность, порядочность и ответственность были во всем, что бы он ни делал.

Еще в Томске все знали, что быть аспирантом А.Д. Закревского – значит самому научиться плавать, когда тебя неожиданно бросают в воду. Только через много лет мы поняли, что он, предлагая исключительно самостоятельно решать поставленную им задачу, всегда знал, что ее решение существует.

Грустно сознавать, что его больше нет и никто тебе не скажет с юмором что-нибудь ободряющее или очень ненавязчиво покажет, что ты не права.

Матросова А.Ю., аспирантка А.Д. Закревского 1969–1972 гг.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БАБАНОВ Алексей Михайлович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии факультета информатики Томского государственного университета. E-mail: babanov2000@mail2000.ru

БУХАРОВ Александр Вениаминович – магистрант кафедры программирования Томского государственного университета. E-mail: darkhell1204@mail.ru

ГОРЦЕВ Александр Михайлович – профессор, доктор технических наук, декан факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: dekanat@fpmk.tsu.ru

ДЕМИН Виктор Андреевич – аспирант кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета (г. Новосибирск). E-mail: vicdemin@gmail.com

ЕВТУШЕНКО Нина Владимировна – профессор, доктор технических наук, заведующая кафедрой информационных технологий в исследовании дискретных структур радиофизического факультета Томского государственного университета. E-mail: ninayevtushenko@yahoo.com

ИВАНОВ Дмитрий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры мехатроники в автоматизированных производствах электротехнического факультета Самарского государственного университета путей сообщения (г. Самара). E-mail: dvi85@list.ru

КАВАЛЛИ Ана Роза – PhD, профессор, директор факультета вычислительных сетей Университета Телеком Южный Париж (г. Эври, Франция). E-mail: ana.cavalli@telecom-sudparis.eu

КАЛЯГИН Алексей Андреевич – аспирант факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: redall@inbox.ru

КИРИЕНКО Ирина Евгеньевна – магистрант кафедры программирования Томского государственного университета. E-mail: irina.kirienko@sibmail.com

КОНДРАТЬЕВА Ольга Викторовна – аспирантка радиофизического факультета Томского государственного университета и факультета вычислительных сетей Университета Телеком Южный Париж (г. Эври, Франция). E-mail: olga.kondratyeva@telecom-sudparis.eu

МАТРОСОВА Анжела Юрьевна – профессор, доктор технических наук, заведующая кафедрой программирования Томского государственного университета. E-mail: mau11@yandex.ru

НАЗАРОВ Анатолий Андреевич – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: anazarov@fpmk.tsu.ru

НЕЖЕЛЬСКАЯ Людмила Алексеевна – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры исследования операций факультета прикладной математики Томского государственного университета. E-mail: ludne@mail.ru

ОСИПОВА Марина Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и анализа ДВФУ, научный сотрудник лаборатории вероятностных методов и системного анализа Института прикладной математики ДВО РАН (г. Владивосток). E-mail: mao1975@list.ru

ОСТАНИН Сергей Александрович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры программирования Томского государственного университета. E-mail: ostanin@mail.tsu.ru

РЫЖИКОВ Юрий Иванович – заслуженный деятель науки РФ, профессор, доктор технических наук, профессор кафедры математического и программного обеспечения ЭВМ Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского (г. Санкт Петербург), ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН. E-mail: ryzhbox@yandex.ru

СПЕРАНСКИЙ Дмитрий Васильевич – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры Высшей и прикладной математики Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ) (г. Москва). E-mail: Speranskiy.dv@gmail.com

УЛАНОВ Александр Викторович – адъюнкт кафедры математического и программного обеспечения ЭВМ Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского (г. Санкт Петербург). E-mail: ulanov246@rambler.ru

ЦИЦИАШВИЛИ Гурам Шалвович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, управления и программного обеспечения ДВФУ, заведующий лаборатории вероятностных методов и системного анализа Института прикладной математики ДВО РАН (г. Владивосток). E-mail: guram@iam.dvo.ru

ЧИМИТОВА Екатерина Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики Новосибирского государственного технического университета (г. Новосибирск). E-mail: ekaterina.chimitova@gmail.com

ЩЕКОЛДИН Владислав Юрьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры теории рынка Новосибирского государственного технического университета (г. Новосибирск). E-mail: raix@mail.ru

ЯКОВЛЕВ Никита Иванович – студент факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. E-mail: yakovlev_steppy@mail.ru

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2014. № 2 (27)

Редактор Н.А. Афанасьева
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано к печати 17.06.2014 г. Формат 60x84¹/₈.

Гарнитура Times.

Печ. л. 11,7; усл. печ. л. 10,8.

Тираж 250 экз. Заказы № 417, 418.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Телефон 8+(382-2)–53-15-28