

УДК 1(091)

О. А. Доманов

СЕМАНТИКА КРИПКЕ ДЛЯ ОНТОЛОГИИ И ФЕНОМЕНОЛОГИИ БАДЬЮ

Представлены модели Крипке для первоначального и позднего подходов Бадью. Для позднего подхода (феноменология) построена модель, эквивалентная объекту теории объекта Бадью. Для первоначального подхода (онтология) построена модель, соответствующая субъективной процедуре, основанной на форсинге. Это позволило описать связь двух подходов. Показано, что в первоначальном подходе речь идёт о частном случае объекта позднего подхода.

Ключевые слова: онтология, Бадью, модели Крипке, семантика Крипке, теория множеств, теория объекта, форсинг.

В философии Алена Бадью можно выделить два подхода. Первый изложен в книге 1988 г. «Бытие и событие» [1]. Он основан на использовании метода форсинга Пола Козна [2] как инструмента описания субъективной процедуры истины. «Бытие и событие» посвящено онтологии. Второй подход мы находим в книге «Логика миров» 2006 г. [3]. Она посвящена феноменологии, понимаемой как теория явления, и объект в ней определяется как совокупность частично являющихся элементов. Теория допускает разнообразные интерпретации, примеры которых Бадью приводит в ходе изложения. Существует, однако, в определённом смысле, естественная интерпретация, позволяющая, в частности, установить связь теории объекта с первоначальным подходом Бадью, основанным на методе форсинга. Эту интерпретацию предоставляют модели Крипке, и настоящая статья посвящена их применению к теории объекта и онтологии Бадью. Мы увидим, что упомянутые модели могут служить для них семантикой. Эта семантика не единственна и не исчерпывает всех возможностей феноменологии Бадью, но во многих случаях, в частности в теории субъекта и субъективного тела, является, как минимум, одной из наиболее адекватных. Чтобы показать, в каком смысле модели Крипке предоставляют семантику для теории объекта Бадью, начнём с изложения последней, как она представлена в «Логиках миров».

Подход здесь существенным образом трансформируется по сравнению с «Бытием и событием». Если раньше речь шла об онтологии или учении о бытии как таковом, то теперь – о феноменологии или учении о бытии-здесь (*l'être-là*). Если раньше основным теоретическим аппаратом служила классическая теория множеств, то теперь – теория категорий и пучков. Преемственность, безусловно, сохраняется, однако она не всегда отчётливо видна. Одна из наших основных задач и состоит в том, чтобы проследить трансформацию подхода Бадью.

Важнейшей характеристикой феноменологии, в отличие от онтологии, является то, что объекты в ней могут иметь различные степени сходства и различия. Если в онтологии действует аксиома экстенциональности, и множества могут быть только равны или не равны друг другу, то в феноменологии имеются также промежуточные степени равенства, которые являются

элементами полной гейтинговой алгебры [3. Р. 178–180]. Последняя является множеством с определёнными на нём отношением частичного порядка $\leq$ и операциями вычисления супремума, инфимума, псевдодополнения и относительного псевдодополнения – $\vee$, $\wedge$, $\neg$ и $\Rightarrow$ (обозначения немного отличаются от принятых Бадью), а также минимумом и максимумом, которые я буду обозначать вслед за Бадью через μ и M (подробнее см., например, [4. С. 192]). Элементы данной алгебры измеряют то, насколько сходны множества в феноменологии – от максимального различия (μ) до максимального схождения (M). Бадью называет данную алгебру *трансценденталью* и обозначает как T . Нужно подчеркнуть, что трансценденталь характеризует мир в целом, т. е. является общей для всех его объектов, и, как мы увидим, служит алгеброй истинностных значений в нём. Каждый мир имеет свою систему сходств и различий, поэтому, вообще говоря, имеется много трансценденталей – своя для каждого мира [3. Р. 131]. Они, однако, не относятся, как в случае Канта, к некоторому общему центру; трансценденталь является свойством мира и не предполагает никакого субъекта [3. Р. 129–131]. Она описывает сущее-в-мире, т. е. то, как чистое сущее (понятие, относящееся к онтологии) является в мире, однако само это явление а-субъективно.

Перейдём к определениям. Пусть имеется мир с трансценденталью T и принадлежащее ему множество $\mathbb{A}$. Функция $\text{Id}(a,b)$, устанавливающая степень идентичности двух элементов $a, b \in \mathbb{A}$ и принимающая значения в трансцендентали, называется *функцией явления*, если подчиняется следующим аксиомам [3. Р. 258]:

$$\text{Ax.Id.1: } \text{Id}(x,y) = \text{Id}(y,x) \quad (1)$$

$$\text{Ax.Id.2: } \text{Id}(x,y) \wedge \text{Id}(y,z) \leq \text{Id}(x,z). \quad (2)$$

Функция явления описывает то, каким образом элементы $\mathbb{A}$ – и, следовательно, само $\mathbb{A}$ – являются в мире. Как мы видим, явление относительно, и являются не сами множества, а их сходства с другими множествами.

Величину $\text{Ex} = \text{Id}(x,x)$ Бадью называет *степенью существования* элемента x . Она, как мы видим, производна от функции схождения.

Феноменальной компонентой $\mathbb{A}$ (*composante phénoménale*) называется функция $\pi: \mathbb{A} \rightarrow T$, сопоставляющая каждому элементу $\mathbb{A}$ степень из трансцендентали T . Бадью интерпретирует её как нечёткое подмножество, для которого $\pi(x)$ обозначает степень принадлежности элемента x компоненте (т. е. подмножеству) π [3. Р. 261]. Элемент может принадлежать компоненте в разной степени от минимальной до максимальной. *Атомной компонентой*, или *атомом*, называется компонента с одним элементом в том смысле, что в

ней может существовать только один максимально принадлежащий ей элемент [3. Р. 262]. Формально это означает, что атом $\alpha(x)$ подчиняется следующим двум аксиомам [3. Р. 262–263] (впрочем, первая из них верна для всякой феноменальной компоненты):

$$Ax.\alpha 1: \quad \alpha(x) \wedge Id(x,y) \leq \alpha(y) \quad (3)$$

$$Ax.\alpha 2: \quad \alpha(x) \wedge \alpha(y) \leq Id(x,y). \quad (4)$$

Несложно показать, что для всякого элемента a функция $a(x) = Id(a,x)$ является атомом. Обратное, вообще говоря, неверно, поэтому мы можем определить *реальный атом* как такую функцию $\alpha(x)$, для которой существует единственный $a \in A$, такой, что для всякого $x \in A$ имеет место равенство $\alpha(x) = a(x) = Id(a,x)$. Другими словами, этой функции соответствует единственный элемент множества A , такой, что соответствующий ему атом $Id(a,x)$ совпадает с ней.

Понятие реального атома позволяет сформулировать *постулат материализма*, на который опирается определение объекта. Он звучит следующим образом: *всякий атом реален*. Другими словами, какую бы функцию, удовлетворяющую аксиомам атома, мы ни взяли, ей всегда соответствует «реальный» элемент множества A . Интуитивно: всякая «атомообразная» функция соответствует реальному атому. Постулат материализма упрощает построение Бадью. В частности, он позволяет определять некоторые понятия только для атомов, а не для компонент вообще. Однако его необходимость проблематична. Действительно, этот постулат эквивалентен условию полноты для так называемых Ω -множеств. При этом можно показать [например, 4. С. 404], что всякое Ω -множество в определённом смысле изоморфно некоторому полному Ω -множеству, что позволяет, в частности, всегда предполагать полноту, которую Бадью устанавливает в качестве постулата. В связи с этим возникает вопрос, не является ли постулат материализма излишним в теории Бадью, а также как можно интерпретировать упомянутый изоморфизм. Он, однако, выходит за рамки настоящей статьи.

При условии выполнения постулата материализма мы можем, наконец, сформулировать определение объекта. *Объектом* называется пара (A, Id) при условии, что всякий атом, который можно построить в A , является реальным [3. Р. 265].

Такова формальная теория. Она может иметь самые разнообразные интерпретации, и Бадью в «Логиках миров» предлагает множество примеров объектов. Одной из простейших трансценденталей может служить множество из двух элементов μ и M , так что степени сходства и различия принимают лишь два значения. Это трансценденталь онтологии, которая, в этом смысле, оказывается частным случаем феноменологии. Другим простым примером

трансцендентали являются подмножества некоторого множества экспертов, упорядоченные по включению. Минимальной степенью такой трансцендентали будет пустое множество экспертов (например, дающих некоторую оценку сходства), а максимальной – множество всех экспертов. Однако существует в определённом смысле выделенная семантика для теории объекта Бадью. Она полезна для интерпретации не только этой теории, но и его раннего подхода, основанного на методе форсинга Коэна. Эту семантику предоставляют модели Крипке.

Вообще говоря, подход Бадью шире, чем интерпретация Крипке, и эта семантика не является единственно возможной для его формальных построений. Однако она поможет нам понять некоторые детали и послужит удобным иллюстративным примером. Модель была построена Крипке для модальных логик и затем применена к интерпретации интуиционистской логики (исторически, эта была первая теория моделей для неклассических логик). Нам интересно именно последнее, так как логика как субъекта, так и объекта Бадью является интуиционистской. Основной работой для последующего изложения будет служить статья Крипке 1965 г. [5], которой я буду в основном следовать, хотя и формулировать модель в виде, позволяющем установить соответствие с онтологией и феноменологией. В этой статье Крипке строит модель для гейтинговой формализации интуиционистской логики, и это позволит нам сделать вывод о фактической логике подхода Бадью.

Крипке начинает с того, что задаёт множество «миров» $\mathbb{W}$, связанных друг с другом отношением «достижимости» (accessibility): одни миры «достижимы» или «доступны» из других. Это отношение 1) рефлексивно, т.е. каждый мир доступен из себя, 2) транзитивно, т.е. если мир w доступен из v , а v – из u , то мир w также доступен из u , и 3) антисимметрично, т.е. если w доступен из u и u доступен из w , то w и u совпадают. Отношение с такими свойствами определяет частичный порядок, и множество миров оказывается частично упорядоченным множеством. Упорядоченную пару $\langle \mathbb{W}, \leq \rangle$ из множества и частичного порядка на нём Крипке называет *шкалой* (frame), а множество $\mathbb{W}$ обычно называется множеством возможных миров. Крипке интерпретирует элементы $\mathbb{W}$ как уровни знания или доказательные ситуации (evidential situations), а отношение достижимости описывает рост знания, появление новых доказательств или свидетельств. В интуиционистской математике этому соответствует процесс построения или открытия новых доказательств.

Пусть теперь мы имеем язык первого порядка, для простоты с одним предикатом $R(x, y)$ и одной функцией $f(x)$. Модель Крипке состоит из шкалы $\langle \mathbb{W}, \leq \rangle$ и множества классических моделей, приписанных каждому возможному миру. Тогда для каждого уровня $w \in \mathbb{W}$ мы имеем обычную модель $M_w = (A_w, R, f)$, где A_w – множество, R – отношение, f – функция. Определим на моделях отношение достижимости, сопоставив каждому отображе-

нию $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$, где $\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$, отображение $A_{\mathcal{W}\mathcal{U}}: A_{\mathcal{W}} \rightarrow A_{\mathcal{U}}$ так, чтобы для любых $\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$:

1. $A_{\mathcal{W}} \subseteq A_{\mathcal{U}}$;
2. если в мире $\mathcal{W}$ $R(x, y)$, то в мире $\mathcal{U}$ $R(A_{\mathcal{W}\mathcal{U}}(x), A_{\mathcal{W}\mathcal{U}}(y))$;
3. если в мире $\mathcal{W}$ $R(x) = y$, то в мире $\mathcal{U}$ $f(A_{\mathcal{W}\mathcal{U}}(x)) = A_{\mathcal{W}\mathcal{U}}(y)$; (5)

Эти условия показывают, что при $\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$ модель $M_{\mathcal{U}}$ является расширением модели $M_{\mathcal{W}}$.

Для того, чтобы построить модель Крипке, нам нужно также определить истинность высказываний в каждом из миров. Сделаем это двумя способами. В первом определим отношение на множестве миров и формул, которое будет указывать нам, какие формулы в каких мирах истинны. Формально, определим $\Vdash$ – отношение вынуждения или форсинга, такое, что $\mathcal{W} \Vdash \varphi$ означает «формула φ истинна в мире $\mathcal{W}$ » или «мир $\mathcal{W}$ вынуждает формулу φ ». При этом истинность не совпадает с ложностью, а лишь указывает на неопределённость значения истинности, на отсутствие доказательства. Зададим отношение вынуждения сначала на атомных формулах, а затем расширим его на сложные формулы по следующим правилам:

1. $\mathcal{W} \Vdash R(x, y)$ тогда и только тогда, когда $R(x, y)$ истинно в модели $M_{\mathcal{W}}$;
2. $\mathcal{W} \Vdash \varphi \wedge \psi$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{W} \Vdash \varphi$ и $\mathcal{W} \Vdash \psi$;
3. $\mathcal{W} \Vdash \varphi \vee \psi$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{W} \Vdash \varphi$ или $\mathcal{W} \Vdash \psi$;
4. $\mathcal{W} \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ тогда и только тогда, когда для любого $\mathcal{U}$, такого, что $\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$, либо неверно, что $\mathcal{W} \Vdash \varphi$, либо $\mathcal{W} \Vdash \psi$;
5. $\mathcal{W} \Vdash \neg \varphi$ тогда и только тогда, когда для любого $\mathcal{U}$, такого, что $\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$, неверно, что $\mathcal{W} \Vdash \varphi$.

Мы видим, что истинность импликации и отрицания зависит от истинности формул в будущих мирах. Можно показать, что такое определение сохраняет истинность формул при движении «вверх» по дереву миров, если она сохраняется для атомных формул.

Только что описанный способ построения модели (используемый самим Крипке) удобен для установления связи с понятием форсинга у Коэна, и мы воспользуемся им ниже для интерпретации раннего подхода Бадью. Для теории объекта же более удобен другой, эквивалентный ему способ. Определим *наследственное множество* или *конус* следующим образом: множество $A \subseteq \mathcal{W}$ является наследственным в $\mathcal{W}$ (конусом), если из $\mathcal{W} \in A$ и $\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$ следует, что $\mathcal{U} \in A$. Другими словами, наследственное множество замкнуто при движении «вверх», вместе с каждым $\mathcal{W}$ оно содержит все миры, б'ольшие $\mathcal{W}$. Назовём множество наследственных подмножеств $\mathcal{W}^+$. Вместо того, чтобы задавать отношение $\Vdash$, мы можем определить оценку как функцию, сопоставляющую каждой формуле множество миров, в которых она истинна.

В качестве последних мы будем брать конусы или наследственные множества из W^+ . Свойство наследственности соответствует тому, что формула, приняв истинностное значение, не меняет его при движении «вверх» по порядку достижимости. В интуиционистской математике истинность формулы (теоремы) устанавливается конструированием её доказательства, поэтому истинность формулы, вообще говоря, зависит от времени – пока доказательство не построено, она не истинна и не ложна, её истинность не определена. Наследственность отражает тот простой факт, что доказательство формулы, будучи получено в какой-то момент времени, остаётся в силе во все последующие моменты во всех достижимых из этого момента мирах – доказательства не забываются (сами же доказательства возникают в том или ином мире в большой мере случайно, это результат творческого процесса, изобретения).

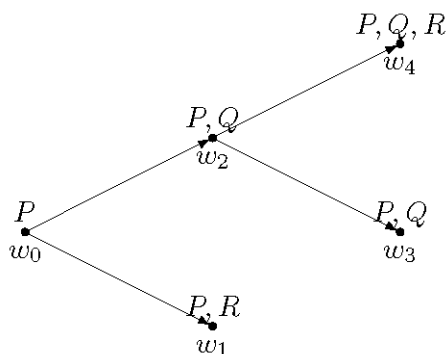


Рис. 1. Дерево миров Крипке

Рассмотрим пример самого Крипке (рис. 1). Пусть мы имеем частично упорядоченное множество миров $\{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$ и множество атомарных формул $\{P, Q, R\}$, истинность которых установлена в каких-то из этих миров. На рисунке миры изображены в виде графа и над каждой точкой перечислены формулы, истинные в этой точке. Таким образом, $V(P) = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $V(Q) = \{w_2, w_3, w_4\}$ и $V(R) = \{w_1, w_4\}$.

Продолжим построение модели. Как и раньше, сначала зададим оценку на атомарных формулах: для каждого x, y мы имеем множество миров $V(R(x, y))$, в которых установлена истинность $R(x, y)$. Как и раньше, если некоторый мир не принадлежит $V(R(x, y))$, то в этом мире формула не ложна, а не имеет определённой истинности. Нам осталось определить истинность сложных формул. Обозначим через $M(\varphi)$ множество уровней знания (миров), на которых истинна формула φ (т. е. таких, что $M_w \models \varphi$). Определим его рекурсивно:

$$1. M(R(x, y)) = V(R(x, y))$$

$$2. M(\varphi \wedge \psi) = M(\varphi) \cap M(\psi),$$

$$3. M(\varphi \vee \psi) = M(\varphi) \cup M(\psi),$$

$$4. M(\neg \varphi) = \{w: \forall u[\text{если } w \leq u, \text{ то } u \notin M(\varphi)]\},$$

$$5. M(\varphi \rightarrow \psi) = \{w: \forall u[\text{если } w \leq u, \text{ то либо } u \notin M(\varphi), \text{ либо } u \in M(\psi)]\}$$

$$6. M(\exists t\varphi(t)) = \bigcup_{t \in A_{qr}} M(\varphi(t)),$$

$$7. M(\forall t\varphi(t)) = \bigcap_{t \in A_{qr}} M(\varphi(t)).$$

Первая строчка этих соотношений есть просто определение функции $\mathcal{V}$. Следующие два условия очевидны: формула $\varphi \wedge \psi$ истинна на пересечении множеств миров, в которых истинны φ и ψ по отдельности, а формула $\varphi \vee \psi$ – на их объединении. Четвёртое условие означает, что отрицание формулы φ истинно в тех мирах, из которых не достигим ни один мир, в котором было бы истинно φ . Другими словами, формула ложна в некоторый момент времени, если она не будет доказана ни в один из последующих моментов (достижимых из данного мира). Такое определение отрицания характерно для интуиционизма. Например, на рис. 1 миры $\mathcal{W}_2$ и $\mathcal{W}_3$ отличаются, хотя множество истинных формул в них совпадает. Отличие состоит в том, что в первом из них формула R ещё может стать истинной, тогда как во втором – нет (это означает, что мы имеем достаточно информации, чтобы это утверждать). Согласно интуиционистскому определению ложности это означает, что в $\mathcal{W}_3$ формула R ложна, тогда как в $\mathcal{W}_2$ – не имеет значения истинности. Следующее условие определяет логическую операцию импликации: формула $\varphi \rightarrow \psi$ истинна в тех мирах, в которых для всякого достижимого из него мира истинность φ всегда сопровождается истинностью ψ (а также в мирах, в которых φ ложна). Два последних соотношения определяют истинность формул с кванторами. Их полезно сравнить со следующими формулами:

$$\begin{aligned} \exists t\varphi(t) &= \varphi(t_1) \vee \varphi(t_2) \vee \dots \\ \forall t\varphi(t) &= \varphi(t_1) \wedge \varphi(t_2) \wedge \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Можно показать [4. С. 203], что наследственные множества составляют алгебру Гейтинга, в которой упорядочение совпадает с включением, операции $\wedge$ и $\vee$ задаются обычным пересечением и объединением множеств, а псевдодополнение и относительное псевдодополнение задаются правыми частями условий 4 и 5, т. е.

$$\neg S = \{p \mid q \notin S \text{ для всех } q, \text{ таких, что } p \leq q\} \quad (7)$$

$$S \Rightarrow T = \{p \mid \text{для всех } q, \text{ таких, что } p \leq q, \text{ истинно } q \in S \Rightarrow q \in T\}. \quad (8)$$

Поэтому последние два условия можно переписать следующим образом:

$$4. M(\neg\varphi) = \neg M(\varphi),$$

$$5. M(\varphi \Rightarrow \psi) = (M(\varphi) \Rightarrow M(\psi)),$$

где слева стоят логические операции, а справа – операции на алгебре Гейтинга. Заметим также, что истинность дополнения и псевдодополнения определяются истинностью не только в текущем мире, но и в последующих.

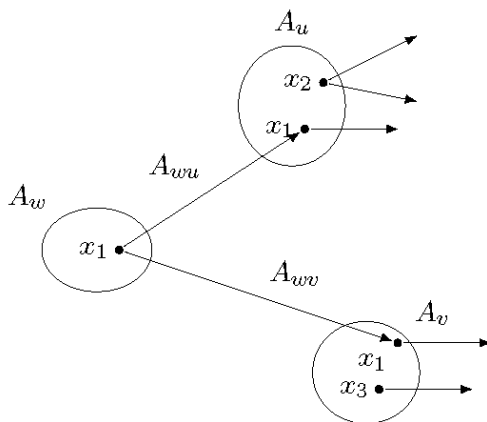


Рис. 2. Элементы в модели Крипке

В результате, для каждой формулы φ мы определим предикат $M(\varphi)$, равный множеству миров, в которых она истинна. Мы видим, что $M(\varphi)$ выполняет роль истинностного значения. Это позволяет надеяться, что её можно сопоставить с трансценденталью Бадью. Действительно, пусть атомарными будут формулы вида $x = y$ и $x \in y$. Тогда модель Крипке даёт для них истинностную оценку, и мы могли бы считать первую из них эквивалентной функции явления теории объекта Бадью. Трудность, однако, состоит в том, что она окажется определена не на всех элементах объекта. Тем не менее существует процедура, позволяющая расширить область её определения до необходимых пределов. За недостатком места (процедура требует обращения к гейтингозначным моделям и Λ -множествам; см., например, [6. Р. 20 sqq.], а также [4. С. 272]) я не буду её приводить и ограничусь лишь результатом: возможно определить оценку формулы равенства в модели Крипке, удовлетворяющую условиям на функцию Id . При этом сами элементы в модели Крипке можно рассматривать как имена множеств, которые в различных мирах получают различные интерпретации, так что, например, в одних мирах два из них могут быть равны, а в других – нет. Можно также рассматривать их как множества, меняющиеся при переходе от одного мира к другому. Отображение $A_{w\sqcup}$ связывает элементы разных миров, и мы можем рассматривать цепочки связанных таким образом элементов как элементы объекта Бадью. Они играют роль имён изменяющихся множеств. Частичная принадлежность

интерпретируется здесь как принадлежность, выполненная в некоторой части возможных миров. Частичное существование соответствует существованию в части возможных миров. В результате, мы получаем модель, состоящую из частично упорядоченных возможных миров с переходами между ними, соответствующими темпоральному «развитию» мира, появлению новых элементов и установлению истинности новых формул.

Таким образом, модель Крипке предоставляет семантику, позволяющую интерпретировать теорию объекта Бадью. Однако она также позволяет интерпретировать онтологию Бадью, а это означает, что в первоначальном подходе Бадью мы имеем дело с частным случаем объекта поздней теории. Для того, чтобы это продемонстрировать, построим модель Крипке для «Бытия и события».

Вспомним определения. Бадью вводит частично упорядоченное множество условий, которое я буду обозначать через P . Каждое условие $\pi \in P$ соответствует анкете, т. е. последовательности утверждений о наличии положительной или отрицательной связи элементов модели (ситуации) с именем события [1. Р. 541]. Таким образом, условие можно рассматривать как пару $\{\pi^+, \pi^-\}$ множеств элементов, связанных с именем события положительно или отрицательно. На этих условиях определён порядок: $\pi_1 \leq \pi_2$ означает, что $\pi_1^+ \subseteq \pi_2^+$ и $\pi_1^- \supseteq \pi_2^-$. Формально, условия подчиняются следующим аксиомам [1. Р. 540]:

1. $\emptyset \in P$,
2. Транзитивность: из $\pi_1 \leq \pi_2$ и $\pi_2 \leq \pi_3$ следует $\pi_1 \leq \pi_3$,
3. Для любого π_1 существуют π_2, π_3 , такие, что $\pi_1 \leq \pi_2$, $\pi_1 \leq \pi_3$, и не существует π_4 , такого, что $\pi_4 \leq \pi_2$, $\pi_4 \leq \pi_3$.

Заметим, что последнее условие означает, что в P нет максимального элемента. Кроме того, подразумевается рефлексивность – для всех π имеет место $\pi \leq \pi$ – хотя Бадью специально о ней не упоминает.

В дальнейшем мы увидим, что речь у Бадью идёт о расширении некоторой исходной модели, в результате которого в ней появляются новые, нужные нам, структуры. В частности, можно рассматривать условия как последовательное построение функции – назовём её $e(x)$ – отображающей элемент в 1 или 0 , в зависимости от того, положительно или отрицательно он связан с именем события. Область определения функции e бесконечна, а условия являются её конечными аппроксимациями, определёнными на подмножестве $\pi^+ \cup \pi^-$. Поэтому при построении модели Крипке мы сопоставим каждому миру такую аппроксимацию. Другими словами, будем считать, что в мире w_π (соответствующем аппроксимации π) задана частичная функция $f(x)$, равная 1 , если $x \in \pi^+$, 0 , если $x \in \pi^-$, и не определённая для остальных x .

Движение по дереву миров модели соответствует последовательному определению этой функции (зависящей от маршрута в дереве; пройдя различными маршрутами, мы получим в результате различные функции). Каждому миру $\mathcal{W}_\pi$ мы теперь должны сопоставить множество A_π . Бадью, в соответствии с методом форсинга, определяет имена вида $\text{имя} = \{(\mu_\pi, \pi) \mid \pi \in P\}$, выстраиваемые рекурсивно, начиная с пустого множества. Другими словами, имена являются множествами пар вида $\mu_\alpha = \{(\mu_\beta, \pi) \mid \pi \text{ — условие и } \beta < \alpha\}$, где α и β – ординалы. Имена будут обозначать множества, которые в разных мирах будут различными. Будем писать $\mathfrak{A}$ для имени множества $\mathfrak{X}$ (опуская указание на мир там, где это не приводит к недоразумениям). Имена кодируют информацию о принадлежности множеств в различных мирах: будем считать, что в мире $\mathcal{W}_\pi$ множеству $\mathfrak{X}$ принадлежат такие $\mathfrak{Y}$, для которых пары $(\mathfrak{Y}, \pi)$ принадлежит $\mathfrak{A}$ для условия π и меньших его. Таким образом, если эта принадлежность выполняется для некоторого мира, то она выполняется и для последующих миров, что соответствует требованиям модели Крипке.

Бадью начинает с модели M (счётной и транзитивной) и затем рассматривает её расширения, являющиеся результатом субъективной процедуры. В терминах модели Крипке построение расширенной модели соответствует прохождению по некоторому пути дерева миров, т. е. выбору определённого подмножества миров или, что эквивалентно, условий. Множества, обозначаемые именами в расширенной модели, определяются этим выбором. Говоря точнее, Бадью выбирает некоторое подмножество условий G и определяет интерпретации имён следующим образом [1. Р. 416]: $R_G(\mu) = \{R_G(\mu_1) \mid (\mu_1, \pi) \in \mu, \pi \in G\}$. Как и имена, их интерпретации выстраиваются рекурсивно. В наших обозначениях это можно переписать как $\mathfrak{x} = \{\mathfrak{y} \mid (\mathfrak{y}, \pi) \in \mathfrak{A} \ \& \ \pi \in G\}$. Расширенная модель $M[G]$ есть совокупность множеств $R_G(\mu)$, и, выбирая подходящее G , можно получить модель с нужными свойствами, что и достигается с помощью метода форсинга. Множество G называется генерическим и удовлетворяет следующим требованиям [1. Р. 401–403].

если $\pi_1 \in G$ и $\pi_2 \leq \pi_1$, то $\pi_2 \in G$ (9)

для любых $\pi_1, \pi_2 \in G$ существует $\pi_3 \in G$, такое, что $\pi_1 \leq \pi_3$ и $\pi_2 \leq \pi_3$. (10)

Первое условие означает, что вместе с некоторым миром генерическое множество содержит все предшествующие ему миры. В частности, это означает, что всякое генерическое множество содержит $\emptyset$. Второе условие означает, что объединение любых двух условий из G также принадлежит G . Это задаёт определённую направленность генерического множества: все входя-

щие в него условия – т. е. пары $\{\pi^+, \pi^-\}$ – согласованы в том смысле, что могут быть расширены до одной и той же пары, задающей, собственно, выстраиваемую функцию $e(x)$. Математически, эти условия определяют идеал на частично упорядоченном множестве P .

Кроме этого, G удовлетворяет собственно условию генеричности. Чтобы его сформулировать, Бадью вводит понятие доминанты (domination). *Доминантой* называется подмножество условий, такое, что всякое условие либо ему принадлежит, либо меньше как минимум одного из его элементов. Другими словами, если $\pi_1 \notin D$, то $\exists \pi_2 (\pi_2 \in D \ \& \ \pi_1 \leq \pi_2)$. Такие множества называются плотными, хотя Бадью этого термина не использует. Условие генеричности звучит теперь так: G должно содержать как минимум по одному элементу из каждой доминанты D , т. е. $\forall D [D \cap G \neq \emptyset]$. Что это означает для условий, как они определены Бадью? Рассмотрим множество условий, таких, что $\pi^+ \cup \pi^-$ содержит некоторую фиксированную точку x : $D = \{\pi | x \in \pi^+ \cup \pi^-\}$. Любое условие вне его (т. е. не содержащее x) может быть расширено так, что захватит точку x и таким образом совпадёт с каким-то элементом D . Таким образом, D является доминантой или плотным множеством. Условие генеричности означает тогда, что для всякой точки x гарантируется, что генерическое множество содержит хотя бы одно условие, содержащее его. Это означает, что функция $e(x)$ будет определена на всех элементах модели. Таким образом, условие генеричности – это условие полноты, гарантирующее определённую в расширенной модели множеств элементов, положительно и отрицательно связанных с событием.

Рассмотрим несколько примеров.

Пусть задано имя $\hat{e} = \{(\ast, \pi) | x \in \pi^+\}$. Оно соответствует некоторому множеству e . Выберем некоторое $\pi \in G$ и затем для него $x \in \pi^+$. Для такого x пара $\{\ast, \pi\}$ принадлежит $\hat{e}$, а так как при этом π принадлежит G , то это означает, что $x \in e$. Таким образом, если в некотором мире, принадлежащем G , элемент x принадлежит π^+ , то он принадлежит и e . Иначе говоря, e представляет собой множество, аппроксимациями которого являются различные π^+ (само оно, конечно, зависит от выбранного G). Аналогично, $\{(\ast, \pi) | x \in \pi^-\}$ представляет собой имя множества, аппроксимациями которого являются π^- . Это совпадает с нашим пониманием условий как аппроксимаций функции $e(x)$.

Рассмотрим ещё один пример. Поскольку π принадлежат множествам $A_{\ast, \pi}$, то они также имеют имена, а именно $\ast$. Рассмотрим имя $\hat{G} = \{(\ast, \pi) | \pi \in P\}$. Его

интерпретацией, как можно видеть, является множество $\bar{G}$. Действительно, его элементами будут множества, интерпретирующие имена $\bar{t}$ для π , принадлежащих $\bar{G}$, т. е. сами такие $\pi : \bar{G} = \{\pi | \pi \in \bar{G}\}$. В соответствии с нашим построением модели Крипке в мире $\mathbb{W}_\pi$ интерпретацией имени $\bar{t}$ будет множество условий из $\bar{G}$, меньших π , т. е. $\{\pi_1 | \pi_1 \leq \pi \ \& \ \pi_1 \in \bar{G}\}$. Таким образом, множество $\bar{G}$ набирается последовательно, и переход к миру $\mathbb{W}_\pi$ соответствует получению знания о принадлежности ему условия π . Мы имеем, таким образом, семантику Крипке для субъективной процедуры из «Бытия и события». Эта процедура начинается с исходной модели, которая постепенно расширяется при движении по мирам множества $\mathbb{P}$. Поскольку пустое множество всегда принадлежит $\bar{G}$, то имена $\bar{x} = \{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle | y \in \bar{x} \text{ в исходной модели} \}$ обозначают множества, присутствующие в исходном мире $\pi = \bar{\emptyset}$ и во всех последующих мирах. Аппроксимации таких множеств совпадают во всех мирах и равны самим $\bar{x}$. Каждый последующий мир соответствует дополнительному знанию о составе $\bar{G}$ и, следовательно, о строении множеств, в определении которых оно участвует. По мере движения по дереву миров расширяется информация о принадлежности тех или иных множеств друг другу, но в каждом из миров эта информация остаётся частичной. Лишь после завершения (бесконечной) субъективной процедуры информация становится полной, и, в частности, истинностные значения всех формул оказываются определёнными. При этом генерическое множество является множеством возможных путей, ведущих к определённой расширенной модели $M[\bar{G}]$, а субъективную процедуру можно понимать как движение по этим путям. Вывод субъекта Бадью об истинности формулы φ на основании истинности утверждения $\pi \in \bar{G}$ соответствует «пребыванию» субъекта в мире $\mathbb{W}_\pi$, в котором формула φ истинна.

В результате мы получили модель Крипке для первоначального подхода Бадью. Переходя теперь к наследственным множествам, как описано выше, мы получим её интерпретацию в терминах объекта. Таким образом, в «Бытии и событии» мы имеем дело с частным случаем объекта поздней теории Бадью, а модели Крипке могут служить инструментом, позволяющим описывать эволюцию его подхода.

Литература

1. Badiou A. L'être et l'événement. P.: Seuil, 1988.
2. Козн П. Теория множеств и континуум-гипотеза / пер. с англ. А.С. Есенина-Вольпина. М.: Мир, 1969.
3. Badiou A. Logiques des mondes: L'être et l'événement, 2. P.: Seuil, 2006.
4. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики / под ред. Д.А. Бочвара; пер. с англ. В.Н. Гришина, В.В. Шокурова. М.: Мир, 1983. 488 с.

5. Kripke S. *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I // Formal Systems and Recursive Functions* (Eighth Logic Colloquium, Oxford, July 1963) / ed. by J.N. Crossley, M. A.E. Dummett. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1965. P. 92–130.

6. Bell J.L. *Set Theory: Boolean-Valued Models and Independence Proofs*. 3rd ed. Clarendon Press, 2005. 216 p. (Oxford Logic Guides; 47).

Domanov Oleg A. Institute for Philosophy and Law (Novosibirsk, Russian Federation).

KRIPKE MODELS FOR BADIOU'S ONTOLOGY AND PHENOMENOLOGY

Keywords: ontology, Badiou, Kripke models, Kripke semantics, set theory, theory of object, forcing

In Badiou's philosophy two approaches can be recognized. The first and initial one is an ontology based on the set theory and Cohen's forcing method. It is presented in “Being and event”. The second and late one is phenomenology or the theory of object, to which Badiou's second major book “Logics of worlds” is devoted. Both approaches admit various interpretations but perhaps one of the most natural of them is that suggested by Kripke models. The latter not only provide us with a proper semantics for Badiou's theory of object but also is instrumental in tracing a connection between his two approaches. The article deals with building Kripke models for early and late Badiou's philosophy, for his ontology and phenomenology. It first demonstrates two ways of constructing Kripke models. The first way follows Kripke's own presentation and happens to be useful in building a model for the initial Badiou's approach since it is based on the procedure of forcing. Thus Badiou's subjective procedure from “Being and event” can be depicted as a movement along the tree of possible worlds in a Kripke model directed to a final world determined by the generic set, this set itself being a collection of possible paths leading to this world. Moreover, subjective judgment (based on forcing) corresponds to subject's positioning in a particular world with particular formulas satisfied. The second way to construct Kripke models makes use of Goldblatt's reformulation of them in terms of hereditary sets and Heyting algebras. As demonstrated, this makes possible providing a semantics for Badiou's theory of object. Since these two formulations of Kripke models are equivalent, a ties between two Badiou's approaches thus established. In particular the subjective procedure from the early “Being and Event” can be considered as a special case of object from Badiou's late phenomenology. In addition, this allows us to demonstrate that the logic of both Badiou's approaches is intuitionistic. The article also considers few instructive examples.

References

1. Badiou A. *L'être et l'événement*. Paris: Seuil, 1988.
2. Cohen P. *Teoriya mnozhestv i kontinuum-gipoteza* [The Set Theory and the Continuum Hypothesis]. Translated from English by A.S. Esenina-Vol'pina. Moscow: Mir Publ., 1969. 347 p.
3. Badiou A. *Logiques des mondes: L'être et l'événement*, 2. Paris: Seuil, 2006.
4. Goldblatt R. *Toposy. Kategornyy analiz logiki* [Toposes. Categorical analysis of logic]. Translated from English by V.N. Grishina, V.V. Shokurova. Moscow: Mir Publ., 1983. 488 p.
5. Kripke S. *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I*. In: Crossley J.N., Dummett M.A.E. *Formal Systems and Recursive Functions*. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1965, pp. 92–130.
6. Bell J.L. *Set Theory: Boolean-Valued Models and Independence Proofs*. Clarendon Press, 2005. 216 p.