УДК 519.7

О СУЩЕСТВОВАНИИ КОНЕЧНЫХ НИЖНИХ ОКРЕСТНОСТЕЙ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н. Г. Парватов

Основным объектом рассмотрения в докладе является *пространство* — множество с замыканием. Пространства комбинаторных объектов (графов, функций, разбиений и др.) возникают естественным образом в различных разделах дискретной математики (таких, как теория графов, математическая логика и др.), но рассматриваемые вопросы наиболее важные приложения имеют для пространств дискретных функций с замыканием относительно суперпозиции. Одной из задач, возникающих при изучении таких пространств, является *задача о полноте*, требующая описания всех порождающих множеств пространства (или некоторого его подпространства). Обобщением этой задачи является *задача о выразимости* в пространстве некоторого его подмножества X, требующая описания всех подмножеств пространства, замыкания которых включают подмножество X. Естественным средством решения этой задачи является *нижняя окрестность подмножества* X — так называется всякая такая система $\mathcal{S}$ замкнутых подмножеств рассматриваемого пространства, что замыкание любого подмножества Y включает X, если и только если Y не содержится целиком ни в одном классе из системы $\mathcal{S}$. В приложениях для нижней окрестности желательна конечность, а для её классов — существование эффективных описаний. Довольно легко понять, что подмножество, обладающее конечной нижней окрестностью, конечно порождено. В связи с этим имеет смысл задача, состоящая в поиске условий, при которых заданное или произвольное конечно порождённое подмножество пространства обладает конечной нижней окрестностью. Эта задача, в более слабой форме поставленная в [1], является основной в данном докладе. Необходимым условием существования конечной нижней окрестности подмножества является его *компактность*, а необходимым условием существования в пространстве конечных нижних окрестностей для всех конечно порождаемых подмножеств является *финитарность* пространства (состоящая в возможности так ввести алгебраические операции в пространство, чтобы его замкнутыми подмножествами оказались в точности все возможные подалгебры полученной алгебры). В свете сказанного представляют интерес условия, при которых компактное подмножество пространства (в частности, произвольное конечно порождаемое подмножество финитарного пространства) имеет конечную нижнюю окрестность. Некоторые такие конструктивные и легко проверяемые в приложениях условия (обобщающие теорему А. В. Кузнецова о полноте из [2] и теорему С. В. Яблонского из [3]) рассматриваются в докладе. Изучаются также условия, при которых замкнутые подмножества предупорядоченного пространства, в частности принадлежащие нижним окрестностям, допускают эффективное описание посредством конечных запрещающих множеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузнецов А. В.* Структуры с замыканием и критерии функциональной полноты // Успехи матем. наук. 1961. Т. XVI. № 2 (98). С. 201–202.
2. *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института им. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.
3. *Яблонский С. В.* О строении верхней окрестности для предикатно-описуемых классов в P_k // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 2. С. 304–307.