

Секция 5

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ИНФОРМАТИКИ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ

УДК 519.682

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ КОНТЕКСТНО-
СВОБОДНЫХ ЯЗЫКОВ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ГРЕЙБАХ

О. И. Егорушкин, К. В. Сафонов

Словарем языка является конечное множество $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ слов языка, называемое терминальным множеством, а $Z = \{z_1, \dots, z_m\}$ — множество вспомогательных символов z_j , необходимых для задания грамматических правил, называемое нетерминальным множеством; $W^* = (X \cup Z)^*$ — соответствующая свободная полугруппа относительно операции конкатенации.

Кс-грамматике соответствует система полиномиальных уравнений

$$z_j = p_j(x, z), z = 1, \dots, m, \quad (1)$$

называемая системой уравнений Хомского — Шютценберже, а кс-языком называется первая компонента z_1 ее решения $(z_1(x), \dots, z_m(x))$, получаемого методом последовательных приближений. В результате итераций компоненты z_j выражаются формальными степенными рядами.

В настоящей работе предлагается изучать вместо системы уравнений Хомского — Шютценберже эквивалентную ей систему в нормальной форме Грейбах, в которой все многочлены имеют вторую степень по переменной z ; переход к нормальной форме Грейбах всегда возможен за счет увеличения, быть может, числа переменных. Для уравнений второй степени аналитические методы исследования представляются более перспективными: их эффективность в большей мере зависит от степени уравнений, чем от числа переменных.

Более точно, нормальная форма Грейбах системы (1) подразумевает, что все входящие в нее многочлены имеют вид $p_j(x, z) = f_j(z) + g_j(x, z) + h_j(x)$, где $f_j(z)$ — квадратичная форма от переменных $z_1, \dots, z_m$, многочлен $g_j(x, z)$ линеен по $z_1, \dots, z_m$, а многочлен $h_j(x)$ от них не зависит. А значит, можно считать, что система (1) имеет вид

$$z_j = f_j(z) + g_j(x, z) + h_j(x), j = 1, \dots, m. \quad (1^*)$$

Поставим в соответствие формальному степенному ряду (многочлену) ряд (многочлен) с комплексными переменными, задав отображение терминальных x_i и нетерминальных z_i символов из множества $X \cup Z$ в множество комплексных переменных. Получаем фиксированный гомоморфизм, который ставит в соответствие формальному ряду его коммутативный образ (2) — сходящийся в окрестности нуля степенной ряд от комплексных переменных

$$ci(r) = \sum_k a_k z^k, \quad (2)$$

где

$$a_k z^k = a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},$$

$$a_k = \sum_{\#x_1(w_i)=k_1, \dots, \#x_n(w_i)=k_n} < r, w_i >,$$

символ $\#c(d)$ означает число вхождений символа c в моном d .

Рассмотрим коммутативный образ кс-языка z_1

$$ci(z_1) = a_k x^k = a_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad (3)$$

который является алгебраической функцией, а также коммутативный образ

$$ci(L) = \sum_{k_0 \geq 0, k \geq 0} L_{k_0, k} x_0^{k_0} x^k \quad (4)$$

некоторого линейного языка над терминальными символами $x_0, x_1, \dots, x_n$, который является рациональной функцией.

Будем называть ряд (3) *диагональю* ряда (4), если при всех $k_1, \dots, k_n$ выполнено условие

$$a_{k_1, \dots, k_n} = L_{k_1, k_1, k_2, \dots, k_n}.$$

Теорема 1. Если однородные многочлены второй степени $f_2(z), \dots, f_n(z)$, входящие в систему (1^*) , не зависят от переменной z_1 и система уравнений

$$f_j(z) = 0, j = 2, \dots, n,$$

имеет единственный нуль $z = 0$, то коммутативный образ кс-языка, порожденного системой (1^*) , является диагональю некоторого линейного языка.

Порождающая кс-язык система уравнений (1^*) в нормальной форме Грейбах позволяет установить, является данный формальный степенной ряд контекстно-свободным языком или нет. Сгруппируем коммутативный образ формального языка в ряд по однородным многочленам

$$ci(z_1) = \sum_j (a)_j(x), \quad (5)$$

где $(a)_j(x)$ — однородный многочлен степени j . Достаточно установить, что ряд (5) удовлетворяет уравнению степени 2, поскольку такую степень имеет система (1^*) . Возводя ряд (5) в квадрат, получим ряд $(ci(z_1))^2 = \sum_j (a)_j^2(x)$. Тот факт, что оба ряда, будучи умноженными на многочлены, дают в сумме тождественный нуль, означает, что достаточно длинные отрезки этих рядов линейно зависимы.

Теорема 2. Для того чтобы ряд по однородным многочленам (5) удовлетворял полиномиальному уравнению степени 2, необходимо и достаточно, чтобы при всех $j \geq j_0, l \geq l_0$ выполнялось равенство

$$\begin{vmatrix} (a)_j(x) & \dots & (a)_{j+l}(x) & (a)_j^2(x) & \dots & (a)_{j+l}^2(x) \\ (a)_{j+1}(x) & \dots & (a)_{j+l+1}(x) & (a)_{j+1}^2(x) & \dots & (a)_{j+l+1}^2(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a)_{j+q}(x) & \dots & (a)_{j+l+q}(x) & (a)_{j+q}^2(x) & \dots & (a)_{j+l+q}^2(x) \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где $q = 2l + 1$.