

- 3) при $m > 0$, $n = 0$ звезда $Z_{m,n}$ имеет минимальные реберные 1-расширения вида $ZK_{m-1,n,2}$;
- 4) при $m = 0$, $n > 0$ звезда $Z_{m,n}$ имеет минимальные реберные 1-расширения вида $ZK_{m,n-1,2}$;
- 5) при $m = 2$, $n = 1$ звезда $Z_{2,1}$ имеет еще одно минимальное реберное 1-расширение — турнир, получающийся из циклической тройки добавлением одной вершины и дуг от нее во все остальные вершины;
- 6) при $m = 2$, $n = 1$ звезда $Z_{2,1}$ имеет еще одно минимальное реберное 1-расширение — турнир, получающийся из циклической тройки добавлением одной вершины и дуг в нее из всех остальных вершин.

Для общего случая результат формулируется следующим образом.

Теорема 2. Относительно минимальных реберных k -расширений направленных звезд $Z_{m,n}$ при $k > 1$ справедливо следующее:

- 1) при $m = n = k$ звезда $Z_{m,n}$ имеет минимальным реберным k -расширением любой регулярный $(2k + 1)$ -вершинный турнир и только их;
- 2) при $m = n + 1 = k$ звезда $Z_{m+1,m}$ имеет минимальным реберным k -расширением любой $(2k + 2)$ -вершинный турнир, который получается из регулярного $(2k + 1)$ -вершинного турнира добавлением дополнительной вершины-источника;
- 3) при $m + 1 = n = k$ звезда $Z_{m,m+1}$ имеет минимальным реберным k -расширением любой $(2k + 2)$ -вершинный турнир, который получается из регулярного $(2k + 1)$ -вершинного турнира добавлением дополнительной вершины-стока;
- 4) кроме случая $m = n = k$ звезда $Z_{m,n}$ при $k \leq m + n$ имеет минимальным реберным k -расширением графы вида $ZK_{m_1,n_1,k+1}$, где

$$\begin{aligned} m_1 + n_1 &= m + n - k; \\ \max\{0, m - k\} &\leq m_1 \leq m; \\ \max\{0, n - k\} &\leq n_1 \leq n. \end{aligned}$$

При $k > m + n$ звезда $Z_{m,n}$ не имеет минимальных реберных k -расширений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
2. Абросимов М. Б. О вычислительной сложности расширений графов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2009. № 1. С. 94–95.
3. Абросимов М. Б. Минимальные расширения неориентированных звезд // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: СГУ, 2006. Вып 7. С. 3–5.
4. Абросимов М. Б. Минимальные расширения направленных звезд // Проблемы теоретической кибернетики: тез. докл. XV Междунар. конф. (Казань, 2–7 июня 2008 г.). Казань: Отечество. 2008. С. 2.

УДК 519.17

О МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ 1-РАСШИРЕНИЯХ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

М. Б. Абросимов, Д. Д. Комаров

Дерево называется *сверхстройным*, если все его вершины, кроме корня и листьев, имеют степень 2. Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей

$P_{l_1}, \dots, P_{l_k}$ с общей концевой вершиной. Для однозначного задания сверхстройного дерева достаточно указать длины этих цепей: $(l_1 - 1, \dots, l_k - 1)$.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k -расширением* (k — натуральное) n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- 1) G^* является вершинным k -расширением G , то есть граф G вкладывается в каждый подграф графа G^* , получающийся удалением любых его k вершин;
- 2) G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Понятие минимального k -расширения введено на основе понятия оптимальной k -отказоустойчивой реализации, которое предложено Хейзом в работе [1], где описана модель для исследования отказоустойчивости, основанная на графах.

Вектор степеней сверхстройного дерева имеет вид $(k, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$, причем количество листьев, то есть вершин степени 1, в точности равно k . Кратко вектор степеней сверхстройного дерева может быть записан в виде $(k, 2^m, 1^k)$. Среди сверхстройных деревьев есть представители других хорошо известных семейств графов.

Если $k = 1$ или $k = 2$, то сверхстройное дерево является цепью P_n . Единственное минимальное вершинное 1-расширение цепи P_n есть цикл C_{n+1} (см. [1]). Далее исключим цепи из рассмотрения и будем говорить о сверхстройных деревьях, у которых $k > 2$.

Если $m = 0$, то сверхстройное дерево является звездой $K_{1,k}$. Минимальное вершинное 1-расширение звезды $K_{1,k}$ единственно с точностью до изоморфизма и получается добавлением вершины и соединением ее со всеми вершинами звезды.

Пусть граф G^* суть минимальное вершинное 1-расширение некоторого сверхстройного дерева T . Очевидно, что G^* не может содержать вершин степени меньше двух. В самом деле, если бы некоторая вершина имела степень 1, то удаление смежной с ней вершины привело бы к графу с изолированной вершиной. В такой граф дерево T вкладываться не может. Граф G^* должен иметь, по крайней мере, две вершины степени не ниже k , причем если эти вершины имеют в точности степень k , то они не могут быть смежны. Если бы такая вершина была одна, то ее удаление из графа G^* привело бы к графу, в который дерево T вкладываться не может. Аналогично, если вершин степени k две и они смежны. Таким образом, граф G^* отличается от дерева T не менее чем на k дополнительных ребер. Эту оценку уточняет следующая

Теорема 1. Число дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения любого сверхстройного дерева не меньше $k + 1$.

На основании проведенного вычислительного эксперимента были проанализированы все сверхстройные деревья с количеством вершин до 10 общим числом 67. Большинство из них имеют минимальные вершинные 1-расширения с числом дополнительных ребер $k + 1$. Только у 9 из них минимальные вершинные 1-расширения имеют $k + 2$ дополнительных ребра и у одного дерева — $k + 3$ (это дерево имеет вид $(3, 3, 3)$).

Легко заметить, что если минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева имеет $k + 1$ дополнительных ребер, то его вектор степеней может иметь вид $((k + 1)^2, 2^{m+k})$, $(k + 1, k, 3, 2^{m+k-1})$ или $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$. В работе [2] удалось полностью описать минимальные вершинные 1-расширения сверхстройных деревьев, которые имеют вектор степеней первого вида.

Теорема 2. Пусть сверхстройное дерево является объединением $k > 2$ цепей длины $l_1, \dots, l_k$, где хотя бы одна цепь имеет длину больше единицы. Минимальное вершинное 1-расширение этого дерева будет отличаться на $k + 1$ дополнительных ребер

и иметь вектор степеней $((k+1)^2, 2^{m+k})$ тогда и только тогда, когда

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} (l_i > 1 \Rightarrow \forall j \in \{2, \dots, l_i\} \exists p (1 \leq p \leq k \ \& \ (l_p = j - 1 \vee l_p = l_i - j))) .$$

Минимальное вершинное 1-расширение из теоремы 2 строится следующим образом: к дереву T добавляется вершина, соединяется ребрами со всеми листьями и с корневой вершиной.

Среди 67 сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 и имеющих минимально возможное число дополнительных ребер $k+1$ только 3 не подпадают под теорему 2. В частности, все сверхстройные деревья с числом вершин до 7 имеют минимальное вершинное 1-расширение вида, указанного в теореме 2. Самые малые по числу вершин сверхстройные деревья, которые имеют минимальные вершинные 1-расширения, отличные от вида из теоремы 2, — это 8-вершинные сверхстройные деревья $(1, 1, 5)$ и $(2, 2, 3)$. Всего 13 сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 не подпадают под действие теоремы 2.

Удалось описать одно семейство сверхстройных деревьев, у которых есть минимальное вершинное 1-расширение вида $(k+1, k, 3, 2^{m+k-1})$.

Теорема 3. Пусть сверхстройное дерево T является объединением k ($k > 2$) цепей с длинами не более 2, среди которых есть хотя бы одна цепь длины 1 и хотя бы одна цепь длины 2. Тогда граф G^* , полученный из дерева T добавлением вершины и соединением ее со всеми листьями и любой вершиной степени 2, является минимальным вершинным 1-расширением дерева T .

Непосредственной проверкой можно убедиться, что графы из теоремы 3 подпадают под действие теоремы 2 и, таким образом, имеют по крайней мере два минимальных вершинных 1-расширения. Оказывается, что имеет место более сильное утверждение.

Теорема 4. Пусть сверхстройное дерево T является объединением k ($k > 3$) цепей с длинами не более 2, среди которых есть хотя бы одна цепь длины 1 и хотя бы одна цепь длины 2. Тогда дерево T имеет в точности два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения, которые строятся по схемам из теорем 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
2. Абросимов М. Б. Минимальные вершинные расширения графов // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Томск, 2000. С. 59–64.

УДК 681.3.012+681.3-192

ПРИМЕНЕНИЕ НЕНАДЁЖНЫХ ТЕСТОВ ДЛЯ САМОДИАГНОСТИКИ МОДУЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ КРАТНЫХ ОТКАЗАХ

Димитриев Ю. К., Задорожный А. Ф.

Исследуется возможность децентрализованной диагностики модульных вычислительных систем в условиях кратных отказов. Модули с точки зрения диагностики являются неделимыми единицами системы. Их функциональные характеристики позволяют им в одиночку осуществить полную проверку других (соседних) модулей и