

В формуле (3) можно варьировать параметр n и выбирать такой, при котором значение $M_0(n)$ наименьшее. Этот подход оправдал себя, во многих случаях выдавая в эксперименте более точные результаты по сравнению с формулами (1), (2).

Величина M_1 в формулах (1) – (3) находится по одному из блоков разбиения, причем с вероятностью p_0 — по первому блоку и с вероятностью p_1 — по второму. Вычисляется M_1 аналогично M_0 — разбиением соответствующего блока на два подмножества, и так до тех пор, пока не получатся одноэлементные блоки, трудоёмкость перебора элементов в которых равна 1.

Описанные действия предлагается повторить многократно и в качестве результата взять среднее арифметическое полученных оценок. Практические исследования показывают, что погрешность метода составляет до 17%.

УДК 519.178

МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ПРОБЛЕМАМИ ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ И ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

Р. Т. Файзуллин

В работе предложена конструкция, сводящая задачи ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ и ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ к проблеме поиска глобального экстремума для двух семейств функционалов специального вида, и предложены оригинальные алгоритмы минимизации.

Пронумеруем вершины графа простыми числами, образующими сверхвозрастающую последовательность $R = (r_1, r_2, \dots)$, где $r_1 = 3$ и $r_{p+1} = 2r_p + s_p$, $p = 1, 2, \dots$. Пусть Υ_i — множество вершин графа, соседних с вершиной номер i , где i — одно из чисел r_p .

В этом случае верна теорема 1.

Теорема 1. Если в графе существуют s гамильтоновых циклов с номерами вершин в них $t_1^r, \dots, t_n^r$, $1 \leq r \leq s$, то тогда для любого $m \geq 2$ верно следующее.

1. Глобальный минимум функционалов

$$S_m(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \prod_{l, p \in \Upsilon_i} ((i + l + p - x_{j-1} - x_j - x_{j+1})^2 + \\ + (mi + l + p - x_{j-1} - mx_j - x_{j+1})^2); \\ D_m(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \prod_{l, p \in \Upsilon_i} ((i/lp - x_j/x_{j-1}x_{j+1})^2 + (i^m/lp - x_j^m/x_{j+1}x_{j-1})^2),$$

равный нулю, достигается тогда и только тогда, когда граф гамильтонов.

2. Глобальный минимум достигается только на тех векторах, компоненты которых, рассматриваемые как натуральные числа, являются номерами какого-либо гамильтонова цикла в порядке его прохождения: $x_1 = t_1^r, \dots, x_n = t_n^r$.

Предложен итерационный алгоритм нахождения стационарных точек функционалов S_m с использованием метода последовательных приближений с инерцией и проведены численные эксперименты на кластере Омского государственного технического университета, показавшие перспективность данного подхода в наиболее интересном случае, когда s мало.

Показано, что выбор в качестве R слабо возрастающих последовательностей (например, возрастающих по логарифмическому закону) и одновременная минимизация нескольких функционалов, с усреднением приближений, позволяет эффективно решать задачу для графов с числом вершин в несколько десятков.

Аналогичная теорема верна и для задачи ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ.

Теорема 2. Пусть заданы два графа G_1 и G_2 . В графе G_1 вершины пронумерованы с помощью сверхвозрастающей последовательности R , в графе G_2 каждой вершине j приписан неизвестный вес x_j .

Тогда если существует вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$, на котором достигается глобальный минимум (равный нулю) функционала

$$I_m(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n ((i / \prod_{p \in \Upsilon_i} p - x_j / \prod_{s \in \Upsilon_j} x_s)^2 + (i^m / \prod_{p \in \Upsilon_i} p - x_j^m / \prod_{s \in \Upsilon_j} x_s)^2),$$

то графы изоморфны и компоненты вектора x задают изоморфизм $\varphi : i \rightarrow j$ согласно соответствию $i = x_j$.

Заметим, что результат тривиальным образом распространяется на случай задачи ИЗОМОРФИЗМ ПОДГРАФОВ.