

Секция 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 511

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ D -ПРОБЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ
И D -ВЕЙЕРШТРАССОВЫХ ТОЧЕК

Е. С. Алексеенко

Множество вейерштрассовых точек является важным инвариантом алгебраической кривой, который можно использовать для изучения автоморфизмов. Исследуя вейерштрассовы точки, можно, например, показать, что группа автоморфизмов кривой конечна. Рассмотрим функциональные поля кривых; будем использовать определения и обозначения из [1, 2].

Будем полагать, что F/k — алгебраическое функциональное поле степени трансцендентности один над полем констант k . Предполагаем, что F/k имеет сепарирующий элемент и род g поля F/k инвариантен относительно расширения поля констант. Считаем также известными процедуры вычисления точек, дивизоров и пространств, ассоциированных с дивизором D (пространства Римана — Роха): $\mathcal{L}(D) = \{a \in F^\times : (a) + D \geq 0\} \cup \{0\}$.

Определение 1. Пусть D — дивизор, P — точка степени один поля F/k . Целое число $\mu \geq 1$ называется D -пробельным числом точки P , если $\mathcal{L}(D + (\mu - 1)P) = \mathcal{L}(D + \mu P)$.

Теорема 1. Все точки степени один поля F/k , быть может кроме конечного их числа, имеют одинаковые $\text{con}_{F/k/F}(D)$ -пробельные числа.

Определение 2. D -пробельные числа поля F/k определены почти для всех точек по предыдущей теореме. Точка степени один поля F/k называется D -вейерштрассовой точкой, если ее D -пробельные числа отличны от D -пробельных чисел поля F/k .

Теорема 2. Существует, по крайней мере, одна вейерштрассова точка поля $F\bar{k}/\bar{k}$ для $g \geq 2$, где $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k .

Пусть L — линейная система поля F/k . Отметим, что L можно рассматривать как множество эффективных дивизоров $\{(a) + E : a \in V - \{0\}\}$ для дивизора E и некоторого k -линейного пространства $\mathcal{L}(E)$. Полной линейной системой является линейная система, определенная с помощью E и $\mathcal{L}(E)$. Отметим также, что для любого дивизора $E \in L$ полная линейная система определена с помощью E и k -линейного пространства V , порожденного $\{a \in F^\times : (a) = D - E, D \in L\}$. Таким образом, можно рассматривать L как класс эквивалентности пары (E, V) , где $(E, V) \approx (E - (a), aV)$. Следует также отметить, что $\deg(L) = \deg(E)$, $\dim(L) = \dim(V)$. Будем полагать, что $L(\mu P) = \{D \in L : v_P(D) \geq \mu\}$ для целого $\mu \geq 0$.

Определение 3. Пусть L — полная линейная система и P — точка степени один. Целое число $\mu \geq 0$ называется порядком (вронскианом) L в точке P , если $L(\mu P) \neq L((\mu + 1)P)$.

Теорема 3. Пусть L — полная линейная система, определенная с помощью $W - D$. Тогда μ является D -пробельным числом тогда и только тогда, когда $\mu - 1$ — порядок L в точке P .

В соответствии с теоремой 3, для того, чтобы вычислить пробельные числа и вейерштрассовы точки, достаточно исследовать порядки L в различных точках.

Теорема 4. Каждый порядок μ линейной системы L в точке P удовлетворяет условию $0 \leq \mu \leq \deg(L)$. Существует $\dim(L)$ порядков L в точке P .

Определение 4. Пусть L — полная линейная система, определенная с помощью E и V . Пусть $v_1, \dots, v_n$ — базис V , x — сепарирующий элемент F/k и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — порядки L . Дивизор $R(L) = (\det(D_x^{(\varepsilon_i)}(v_j))_{i,j}) + \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\right)(dx) + nE$ называется дивизором ветвления в L .

Опишем алгоритм вычисления вейерштрассовых точек алгебраического функционального поля, ассоциированного с алгебраической кривой, произвольной характеристики.

Алгоритм 1

Вход: Функциональное поле F/k , сепарирующий элемент x , дивизор D .

Выход: D -пробельные числа и D -пробельные вейерштрассовы точки.

Шаг 1. Вычисляем канонический дивизор $W := (dx)$.

Шаг 2. Если $\dim(W - D) = 0$, то дивизор ветвления полной линейной системы, определенной с помощью $W - D$, является нулевым и не существует D -пробельных чисел и D -пробельных вейерштрассовых точек. Алгоритм завершен.

Шаг 3. Вычисляем базис $v_1, \dots, v_n$ в $\mathcal{L}(W - D)$.

Шаг 4. Полагаем $\varepsilon_1 := 0$; $M := (v_1, \dots, v_n)$; $i := 1$; $\varepsilon := 0$; $G := \emptyset$.

Шаг 5. $i := i + 1$. Если $i > n$, то переходим к шагу 8.

Шаг 6. $\varepsilon := \varepsilon + 1$. Если $\begin{pmatrix} \varepsilon \\ g \end{pmatrix} \neq 0$ в k для некоторого $g \in G$, то $G := G \cup \{\varepsilon\}$ и повторяем шаг 6.

Шаг 7. Обозначим $\dot{M} \in F^{i \times n}$ — матрица, полученная добавлением $D_x^{(\varepsilon)}(v_1), \dots, D_x^{(\varepsilon)}(v_n)$ к M . Если $\text{rank } \dot{M} > \text{rank } M$, то $M := \dot{M}$; $\varepsilon_i := \varepsilon$ и переходим к шагу 5. Иначе $G := G \cup \{\varepsilon\}$ и переходим к шагу 6.

Шаг 8. Вычисляем дивизор ветвления $R := (\det(M)) + \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\right)(dx) + n(W - D)$ полной системы, определенной с помощью $W - D$.

Шаг 9. Возвращаем $\varepsilon_1 + 1, \dots, \varepsilon_n + 1$ и точки степени один, лежащие в носителе R .

Пример 1. Рассмотрим функциональное поле F/k , определенное уравнением $y^7 + y = x^4$ над полем $\mathbb{F}_{49}$. Род поля $g = 9$, число точек степени один $N = 176$. Используя алгоритм, получаем, что 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 15 — пробельные числа поля F/k . Все 176 точек степени один являются вейерштрассовыми точками. Существуют 8 вейерштрассовых точек веса 9 с пробельными числами 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17 и 168 вейерштрассовых точек веса 5 с пробельными числами 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 17. Дивизор ветвления имеет степень 912. Все вычисления были проведены в системе компьютерной алгебры MAGMA.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuribayashi A. and Komiya K. On Weierstrass Points of non-hyperelliptic compact Riemann surfaces of genus three // Hiroshima Math J. 1977. No. 7. P. 743–768.
2. Stichtenoth H. Algebraic Function Fields and Codes. Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verlag, 1993.

УДК 519.174

КОДИРОВАНИЕ КОНЕЧНОЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКИ
В КЛАССЕ ОТОБРАЖЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ИСКАЖЕНИЯ¹

А. А. Евдокимов

Пусть ε и δ — натуральные числа из области определения метрик ρ_G и ρ_H , заданных на множествах вершин $V(G)$ и $V(H)$ графов G и H , а $S_k(v)$ — шар с центром в точке $v \in V(G)$ и радиусом k . Скажем, что отображение $f : G \rightarrow H$, действующее из $V(G)$ в $V(H)$, обладает свойством $\langle \varepsilon, \delta \rangle$ -ограниченного искажения, если

$$f(S_\delta(v)) \subseteq (S_\varepsilon(f(v)))$$

для любой вершины $v \in V(G)$.

Скажем, что отображение $f : G \rightarrow H$ сохраняет $\langle \varepsilon, \delta \rangle$ -отделимость, если

$$\text{Im } f \cap S_\varepsilon(f(v)) \subseteq f(S_\delta(v)).$$

Вложение $f : G \rightarrow H$ графа G в H называем $\langle \varepsilon, \delta \rangle$ -вложением, если f обладает свойством $\langle \varepsilon, \delta \rangle$ -ограниченного искажения и сохраняет $\langle \varepsilon, \delta \rangle$ -отделимость.

В отличие от аналогичных определений в [1–3], здесь выбраны $\langle \varepsilon, \delta \rangle$ -язык и окрестности (шары), чтобы подчеркнуть общность с определениями классической математики. При «малых» значениях параметров $\langle \varepsilon, \delta \rangle$ -вложение означает, что оно связные части не разрывает, а «далёкие» не становятся «близкими». Первое является дискретным аналогом непрерывного отображения, а вместе со вторым свойством — аналогом гомеоморфного вложения.

Пусть $N_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ и $N_m^2 = N_m \times N_m$ — двумерная целочисленная решетка размера $m \times m$ с расстоянием

$$\rho_{N^2}(u, v) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

между ее вершинами (узлами решетки) $u = (x_1, y_1)$ и $v = (x_2, y_2)$.

В [3] описана конструкция $\langle 3, 2 \rangle$ -вложения целочисленной решетки N_{14}^2 (плоского решётчатого табло) в булев гиперкуб I^{10} и показано, что наибольший размер решетки N_m^2 для любого $\langle 3, 2 \rangle$ -вложения $f : N_m^2 \rightarrow I^{10}$ равен 14×14 ; $\langle 3, 2 \rangle$ -вложение сохраняет все расстояния, не превосходящие 3, а вершины, находящиеся на расстоянии больше 1, не могут оказаться на расстоянии 0 или 1. Таким образом, изометричное 3×3 окно в классе обратимых кодирований двоичными словами длины 10 возможно для квадратного табло из 196 ячеек размера 1×1 .

Теорема 1. Существует и эффективно строится конструкция $\langle 4, 3 \rangle$ -вложения $f : N_m^2 \rightarrow I^n$ целочисленной решётки размера $m \times m$ в булев куб I^n , избыточность

¹Работа поддержана проектами РФФИ № 09-01-00070 и 11-01-00997 и программой фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН.