

УДК 519.17

О МИНИМАЛЬНЫХ РЕБЕРНЫХ 1-РАСШИРЕНИЯХ ДВУХ СЕМЕЙСТВ ДЕРЕВЬЕВ

М. Б. Абросимов, Д. Д. Комаров

Ациклический связный граф называется *деревом*. Дерево называется *сверхстройным*, если все его вершины, кроме корня и листьев, имеют степень 2. Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей $P_{l_1}, \dots, P_{l_k}$ с общей концевой вершиной. Для однозначного задания сверхстройного дерева достаточно указать длины этих цепей: $(l_1 - 1, \dots, l_k - 1)$.

Задача описания минимальных реберных k -расширений для произвольного графа является вычислительно сложной [1], однако среди деревьев есть представители некоторых хорошо известных семейств графов, для которых известны аналитические решения. Например, *цепь* P_n является частным случаем дерева.

Теорема 1 [2]. Единственное минимальное реберное 1-расширение цепи P_n есть цикл C_n .

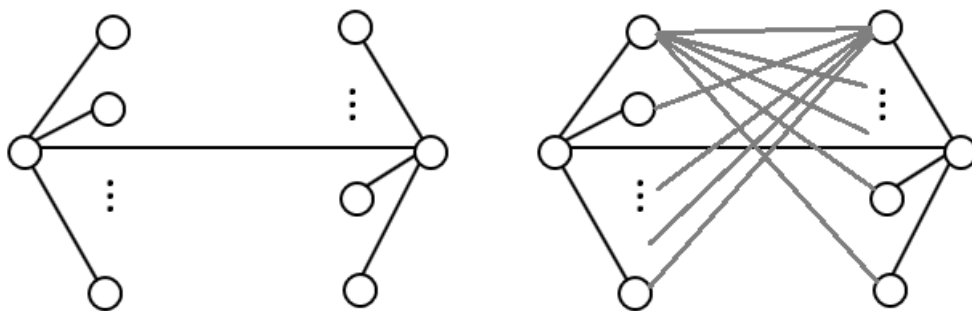
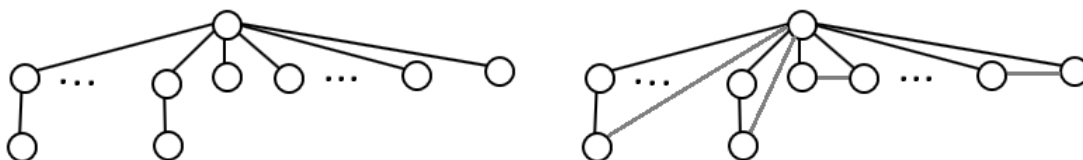
Звезда является частным случаем сверхстройного дерева (звезда — сверхстройное дерево, в котором нет вершин степени 2).

Теорема 2 [3]. Минимальное реберное 1-расширение звезды $K_{1,k}$ единственно с точностью до изоморфизма и получается соединением двух листьев звезды со всеми остальными листьями звезды и между собой.

Помимо этих двух результатов, на основе проведенного вычислительного эксперимента, результаты которого были частично описаны в [4], удалось выделить два семейства деревьев, для которых также возможно аналитически построить минимальные реберные 1-расширения. В работе [5] рассматривались деревья, которые представляют собой одинаковые звезды с соединенными центрами. Удалось получить новый результат для деревьев подобного вида.

Теорема 3. Пусть граф $G = (V, \alpha)$ состоит из двух звезд с соединенными центрами (рис. 1). Построим граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ из G по следующей схеме: выберем две произвольные вершины степени 1, расстояние между которыми равно 3; каждую из выбранных вершин соединим со всеми вершинами степени 1, расстояние до которых от неё равно 3. Полученный граф G^* является минимальным реберным 1-расширением графа G .

Теорема 4. Пусть граф $G = (V, \alpha)$ — сверхстройное дерево, являющееся объединением k цепей длины 2 и $n > 1$ цепей длины 1 (рис. 2). Построим граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ из G по следующей схеме: соединим с корнем все листья, расстояние от которых до корня равно 2; если n четное, то соединим попарно между собой все листья, расстояние от которых до корня равно 1; если n нечетное, то соединим один из листьев, расстояние от которого до корня равно 1, с двумя такими же листьями, а остальные листья, расстояние от которых до корня равно 1, кроме трёх уже задействованных, соединим попарно между собой. Полученный граф G^* является минимальным реберным 1-расширением графа G .

Рис. 1. Дерево G и его минимальное реберное 1-расширениеРис. 2. Сверхстройное дерево G и его минимальное реберное 1-расширение

ЛИТЕРАТУРА

1. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
2. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
3. Абросимов М. Б. Минимальные расширения неориентированных звезд // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 2006. Вып 7. С. 3–5.
4. Абросимов М. Б., Комаров Д. Д. Минимальные реберные расширения сверхстройных деревьев с малым числом вершин // Саратов: Саратов. гос. ун-т, 2010. 27 с. Деп. в ВИНТИ 18.10.2010 № 589–В2010.
5. Кабанов М. А. Об отказоустойчивых реализациях графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов, 1997. Вып.1. С.50–58.

УДК 519.17

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ РАСШИРЕНИЙ ОРГРАФОВ

М. Б. Абросимов, О. В. Моденова

Симметризацией орграфа $\vec{G} = (V, \alpha)$ называется неограф $G = (V, (\alpha \cup \alpha^{-1}) \setminus \Delta)$, то есть симметризация орграфа получается заменой дуг ребрами и удалением петель.

В работе [1] удалось найти некоторые связи точных вершинных k -расширений орграфов с точными вершинными k -расширениями неографов. Приведем некоторые из полученных результатов.