

УДК 512.5

ОБ АТТРАКТОРАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЦИКЛАМИ

А. В. Власова

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ) , где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta : S \rightarrow S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*.

Каждой конечной динамической системе сопоставляется *карта* — ориентированный граф с множеством вершин S и дугами, проведенными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Этот граф является функциональным, т. е. из каждой вершины выходит точно одна дуга. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*.

Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры называются предельными циклами или *аттракторами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров состояний системы без проведения динамики, таких, как индекс (расстояние до аттрактора того бассейна, которому принадлежит состояние), период (длина соответствующего аттрактора), ветвление (количество непосредственных предшественников) [1] и др. Программа [2] позволяет исследовать некоторые из эволюционных параметров определенных систем. Одной из нерешенных в общем случае задач является вопрос о том, принадлежит ли данное состояние аттрактору, что обозначено, например, в [3, 4].

В данной работе представлены критерий принадлежности состояния аттракторам и описание формирования аттракторов динамических систем двоичных векторов, порожденных такими графами, как циклы.

Пусть имеется n -звенный цикл c . Выберем в нём какую-либо вершину в качестве начальной и обозначим её c_0 , тогда цикл можно записать как $c = c_0 c_1 \dots c_{n-1} c_n$, где $c_n = c_0$. Придадим каждому ребру цикла произвольную ориентацию. Дуги, имеющие направление по часовой стрелке, пометим символом 1, а дуги с противоположной ориентацией — символом 0.

Таким образом, каждой ориентации цикла сопоставляется n -мерный двоичный вектор. С другой стороны, каждый такой вектор однозначно определяет некоторую ориентацию цикла, так что между множеством C^n , $n > 2$, всевозможных ориентаций n -звенного цикла и множеством B^n всех двоичных векторов размерности n устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Динамическая система (C^n, θ) вводится следующим образом: если дан некоторый граф c из C^n , то его динамическим образом $\theta(c)$ является граф, получаемый из c одновременным превращением всех стоков в источники (SER-динамика бесконтурных графов [3]).

Исходная динамическая система (C^n, θ) оказывается изоморфной динамической системе (B^n, θ) , которая вводится следующим образом: пусть состоянием динамической системы (B^n, θ) в данный момент времени является вектор $v \in B^n$, тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии $\theta(v)$, описываемом следующими правилами: 1) если первой компонентой в v является 0 и последней компонентой является 1, то первой компонентой в $\theta(v)$ будет 1, а последней компонентой — 0; 2) если в составе v имеются диграммы 10, то в $\theta(v)$ каждая из них заменяется на 01; 3) других отличий

между v и $\theta(v)$ нет. Вышеперечисленные правила применяются одновременно. Будем полагать по определению, что контуры представляют собой аттракторы единичной размерности. На рис. 1 показана карта динамической системы (B^6, θ) .

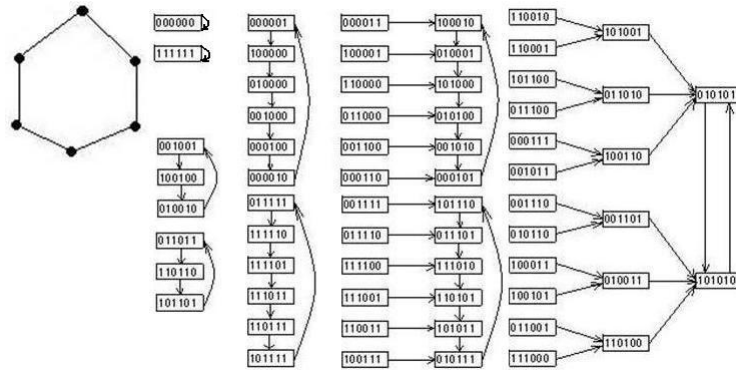


Рис. 1. Карта динамической системы (B^6, θ)

Через $p_c(v)$ обозначим *циклическую плотность вектора* v , т.е. количество пар совпадающих соседних компонент в нем с учётом циклического сдвига. Например, $p_c(111111) = 6$, $p_c(101010) = 0$, $p_c(111011) = 4$, $p_c(\theta(111011)) = p_c(110111) = 4$. Очевидно, что для состояния v системы (B^n, θ) выполняется условие $0 \leq p_c(v) \leq n$. *Циклический блок* — это максимальное по включению множество подряд стоящих нулей (0-блок) или единиц (1-блок) в количестве ≥ 2 с учетом циклического сдвига. При работе с динамической системой, ассоциированной с циклом, будем под понятием *блок* подразумевать понятие *циклический блок*. *Длина блока* — число нулей (единиц) в блоке, уменьшенное на 1. Обозначим через p_c^0, p_c^1 суммы длин с учетом циклического сдвига рассматриваемых 0-блоков и 1-блоков соответственно.

Теорема 1 (критерий принадлежности состояния аттрактору). Вектор динамической системы (B^n, θ) тогда и только тогда принадлежит аттрактору, когда у него $p_c^0 = 0$ или $p_c^1 = 0$. При этом периоды равны делителям числа n , и если $p_c^0 = 0$, то аттрактор представляет собой цикл, в котором следующее состояние получается из предыдущего циклическим сдвигом влево на одну компоненту, а при $p_c^1 = 0$ — вправо.

Подробное изложение представленных результатов можно найти в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Власова А. В. Ветвления в конечной динамической системе (B^n, θ) // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета: Материалы итог. студ. науч. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 57–58.
2. Власова А. В. Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство РОСПАТЕНТа № 2009614409, зарегистрировано 20 августа 2009.
3. Barbosa V. C. An atlas of edge-reversal dynamics. London: Chapman&Hall/CRC, 2001. 372 p.
4. Colon-Reyes O., Laubenbacher R., and Pareigis B. Boolean monomial dynamical systems // Ann. Combinat. 2004. V. 8. P. 425–439.
5. Власова А. В. Аттракторы динамических систем, ассоциированных с циклами // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2. С. 90–95.