$1+n+n^2+\dots+n^{L-1} = \frac{n^L - 1}{n - 1}$. Тогда мощность множества $Z(G_L)$ всех подграф-затравок из траектории графа G_L также равна $\frac{n^L - 1}{n - 1}$.

Число точек сочленения графа $H = (W, Q)$ обозначим через $m(H)$.

Теорема 1. Для всякого предфрактального графа G_L , порожденного затравкой $H = (W, Q)$, справедливы верхняя и нижняя оценки числа точек сочленения $m(H)n^{L-1} \leq m(G_L) \leq m(H)n^{L-1} + \frac{n^L - n}{n - 1}$, если смежность старых ребер одного ранга не нарушается.

Число мостов графа $H = (W, Q)$ обозначим через $k(H)$.

Теорема 2. Для всякого предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного затравкой $H = (W, Q)$, справедливы верхняя и нижняя оценки числа мостов:

$$k(H) \leq k(G_L) \leq k(H) \frac{n^L - n}{n - 1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочкаров А. М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз: РАН САО, 1998.
2. Кочкаров А. А., Кочкаров Р. А. Параллельный алгоритм поиска кратчайшего пути на предфрактальном графе // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44. № 6. С. 1157–1162.

УДК 519.17: 681.3

КОМПАКТНЫЕ ГРАФЫ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ИХ СИНТЕЗА

В. А. Мелентьев

Проблема анализа и синтеза структур вычислительных систем (ВС) традиционно решается методами теории графов. При этом между множествами модулей ВС и вершин V графа $G(V, E)$ и между множествами линий связи и ребер E графа устанавливаются биективные соответствия; задержки при этом оцениваются метрическими характеристиками соответствующих графов — их диаметром d или радиусом. В рамках решения проблемы синтеза структур ВС рассматривается синтез s -регулярного графа порядка $n = |V|$ с минимально возможным при значениях n и s диаметром d . Такие графы далее называем $n(s)$ -компактными.

Решение задачи основано на предложенном в [1] описании графа проекциями. Проекция $P(v_j)$ графа $G(V, E)$ является многоуровневой конструкцией, на нулевом уровне которой расположена ракурсная вершина v_j из V . Порожденное ею подмножество вершин первого уровня V_{1j} содержит все вершины ее окружения $\mathcal{N}(v_j)$, а i -й уровень ($i \geq 1$) представляет собой совокупность подмножеств вершин, каждое из которых порождено вершиной $(i-1)$ -го уровня и является окружением этой вершины без вершин, предшествующих ей в проекции. Вершине v_{ij} k -уровневой проекции $P_k(v_0)$ соответствует упорядоченное множество вершин $W(v_{ij}) = (v_0, v_{10}, \dots, v_{ij})$, представляющее собой простую цепь из ракурсной вершины v_0 нулевого уровня этой проекции в вершину v_{ij} i -го уровня ($i \leq k$); длина этой цепи $L(v_0, v_{ij}) = i$. В общем случае некоторые вершины проекции $P_k(v_0)$ могут быть m_{ij} -кратными ($1 \leq m_{ij}$). Значение кратности m_{ij} соответствует числу простых цепей из ракурсной вершины v_0 в вершину v_{ij} . Номер i уровня

в проекции $P(v_0)$ определяет удаленность вершин этого уровня от ракурсной вершины v_0 , а уровень k , впервые доопределяющий множество вершин всех нижерасположенных уровней проекции графа $G(V, E)$ до V , соответствует эксцентриситету $e(v_0)$ ракурсной вершины v_0 в проекции $P(v_0)$ и вершинной полноте этой проекции. При $k = e(v_0)$ проекция $P_k(v_0)$ графа $G(V, E)$ становится вершинно-полной, и каждая вершина графа $G(V, E)$ хотя бы однажды появляется на уровне $i \leq e(v_0)$ проекции $P_k(v_0)$. Если при этом $e(u) = e = \text{const}$ для всех $u \in V$, то диаметр d графа G равен значению e (напомним, что $d(G) = \max_{u \in V} e(u)$), и число уровней в каждой вершинно-полной проекции графа также будет равным этому значению и диаметру графа. Таким образом, задача построения $n(s)$ -компактного графа порядка n и степени s трансформируется в задачу построения такой системы проекций графа, в которой каждая проекция является вершинно-полной, а число уровней — минимально достаточным для размещения всех n вершин.

Нетрудно увидеть, что максимально возможное число вершин n_{i+1} , которое способен вместить $(i + 1)$ -й уровень проекции s -регулярного графа, определяется рекурсивно: $n_{i+1} = n_i(s - 1)$, причем первые два члена этой последовательности — $n_0 = 1$ и $n_1 = s$. Тогда максимально возможное для k -уровневой проекции $P_k(v_0)$ число вершин с единичной кратностью составит $N_k(s) = 1 + s \sum_{i=1}^k (s - 1)^{i-1}$. Этот предел является верхним для порядка s -регулярного графа при заданном числе k уровней в его проекциях; ограничение снизу определяется $(k - 1)$ -м уровнем: $N_{k-1}(s) < n$. Справедливо и обратное: минимальное число уровней в проекции графа определяется, исходя из значений порядка графа и его степени. Таким образом, для $n(s)$ -компактного графа его диаметр d (равный эксцентриситету любой ракурсной вершины) находится из неравенства

$$1 + s \sum_{i=1}^{d-1} (s - 1)^{i-1} < n \leq 1 + s \sum_{i=1}^d (s - 1)^{i-1}.$$

Приведём модифицированный в сравнении с [2] детерминированный алгоритм синтеза компактных графов.

1. Из условия компактности и заданных значений порядка и степени/диаметра получим значение диаметра/степени графа.

2. Введем разметку вершин графа, произвольно выберем ракурсную вершину $v_0 \in V$ и построим для нее базовую d -уровневую проекцию $P'_d(v_0)$ остовного подграфа искомого $n(s)$ -компактного графа $G(V, E)$. Размещение n вершин на d уровнях этой проекции может быть произвольным, но таким, что $\bigcup_{i=0}^d V_i = V$, или $\sum_{i=0}^d |V_i| = |V|$.

Вершины V_1 1-го уровня проекции $P'_d(v_0)$ составляют окружение $\mathcal{N}(v_0)$ ракурсной вершины v_0 , $|V_1| = s$; на последующих $2 < i \leq d$ уровнях $|V_{i+1}| \leq |V_i| \cdot (s - 1)$.

3. Окружения $\mathcal{N}'(v_j)$ вершин из базовой проекции $P'_d(v_0)$ сведем в список $\mathcal{N}'(G) = (\mathcal{N}'(v_j) : v_j \in V)$. Вершины $v_j \in V$, окружения которых пока не определены полностью, включим в множество $V' = \{v_j \in V : |\mathcal{N}'(v_j)| < s\}$. Окружения $\mathcal{N}'(v_j)$ этих вершин v_j дополним потенциальными подмножествами $\mathcal{N}_p(v_j)_x = V' \setminus W(v_0, v_j)$, нижний индекс x при которых равен числу недостающих в этом окружении вершин ($x = s - |\mathcal{N}'(v_j)|$): $\mathcal{N}(v_j) = \mathcal{N}'(v_j) \cup \mathcal{N}_p(v_j)_x$. Здесь $W(v_0, v_j)$ — множество всех предшественниц вершины v_j в проекции $P'_d(v_0)$, составляющих простую цепь из v_0 в v_j . При необходимости обусловим синтез $n(s)$ -компактного графа его обхватом g . В этом случае потенциальные подмножества вершин $\mathcal{N}_p(v_i)$, входящие в состав $\mathcal{N}(v_i)$, долж-

ны быть скорректированы: $\mathcal{N}_p(v_i) := \mathcal{N}_p(v_i) \setminus \{v_j \in \mathcal{N}_p(v_i) : i, j \in \{1, \dots, d\}, i + j < g\}$. Здесь индексы при вершинах $v_i, v_j \in V$ соответствуют номерам уровней проекции $P_d(v_0)$, на которых эти вершины располагаются.

4. Исходя из списка $\mathcal{N}(G)$ и заданного обхвата, поочередно выстраиваем остальные проекции $P_d(v_j)$, $v_j \in V$, уточняя при этом потенциальные подмножества $\mathcal{N}_p(v_j)$ и внося изменения в список $\mathcal{N}'(G)$ графа и в выстроенные ранее проекции.

5. Задача синтеза графа решена, когда список $\mathcal{N}'(G)$ определен полностью, т. е. для всех $v_j \in V$ имеет место $|\mathcal{N}(v_j)| = s$, $\mathcal{N}_p(v_j) = \emptyset$. Если это условие не выполнено, то в одном из потенциальных окружений следует выбрать вершину и перейти к п. 4. При этом мощность некоторых потенциальных подмножеств в списке $\mathcal{N}'(G)$ вершин может стать меньше их индекса, т. е. $|\mathcal{N}_p(v_j)_x| < x$. Тогда следует вернуться к предшествующей подстановке с запретом таковой и выбрать альтернативный в данном потенциальном подмножестве вариант.

В работе приведены примеры 13(4)-компактных графов с обхватами $g = 3$ и $g = 4$, а также 16(3)- и 16(5)-компактных графов с обхватами $g = 5$ и $g = 4$ соответственно, сгенерированных в соответствии с описанным выше алгоритмом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелентьев В. А. Формальные основы скобочных образов в теории графов // Труды Второй Междунар. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» РАСО'2004. М.: Ин-т проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова, 2004. С. 694–706.
2. Мелентьев В. А. Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата // Прикладная дискретная математика. 2010. № 2(8). С. 74–86.

УДК 519.17

ОГРАНИЧЕНИЯ НА ОБХВАТЫ В КОМПАКТНЫХ ГРАФАХ

В. А. Мелентьев

Условие компактности [1] регулярного графа коррелирует его порядок n со степенью s и минимально возможным диаметром d :

$$1 + s \sum_{i=1}^{d-1} (s-1)^{i-1} < n \leq 1 + s \sum_{i=1}^d (s-1)^{i-1}.$$

Заметим, что область определения порядка компактных графов с заданными значениями степени и диаметра является в данном выражении максимальной и предполагает наличие в них всего спектра k циклов от $k = 3$ до максимально возможного значения $k = 2d + 1$, при этом значения обхвата g , равные длине минимального цикла в графе, определены соответствующей областью $3 < g \leq 2d + 1$.

Перепишем (для случая $s > 2$) условие в виде

$$\frac{s(s-1)^{d-1} - 2}{s-2} < n \leq \frac{s(s-1)^d - 2}{s-2}.$$

Пусть регулярный граф $G(V, E)$ порядка n и степени s $n(s)$ -компактен: его диаметр $d > 1$ и значения n и s соответствуют данному выше условию компактности (случай с $d = 1$ для s -регулярного графа соответствует полному графу, обхват которого $g(G) = 3$). Кратность вершин в рассматриваемых проекциях простых графов проявляется только на уровнях выше первого — в противном случае это были бы мультиграфы,