

ны быть скорректированы: $\mathcal{N}_p(v_i) := \mathcal{N}_p(v_i) \setminus \{v_j \in \mathcal{N}_p(v_i) : i, j \in \{1, \dots, d\}, i + j < g\}$. Здесь индексы при вершинах $v_i, v_j \in V$ соответствуют номерам уровней проекции $P'_d(v_0)$, на которых эти вершины располагаются.

4. Исходя из списка $\mathcal{N}(G)$ и заданного обхвата, поочередно выстраиваем остальные проекции $P_d(v_j)$, $v_j \in V$, уточняя при этом потенциальные подмножества $\mathcal{N}_p(v_j)$ и внося изменения в список $\mathcal{N}'(G)$ графа и в выстроенные ранее проекции.

5. Задача синтеза графа решена, когда список $\mathcal{N}'(G)$ определен полностью, т. е. для всех $v_j \in V$ имеет место $|\mathcal{N}(v_j)| = s$, $\mathcal{N}_p(v_j) = \emptyset$. Если это условие не выполнено, то в одном из потенциальных окружений следует выбрать вершину и перейти к п. 4. При этом мощность некоторых потенциальных подмножеств в списке $\mathcal{N}'(G)$ вершин может стать меньше их индекса, т. е. $|\mathcal{N}_p(v_j)_x| < x$. Тогда следует вернуться к предшествующей подстановке с запретом таковой и выбрать альтернативный в данном потенциальном подмножестве вариант.

В работе приведены примеры 13(4)-компактных графов с обхватами $g = 3$ и $g = 4$, а также 16(3)- и 16(5)-компактных графов с обхватами $g = 5$ и $g = 4$ соответственно, сгенерированных в соответствии с описанным выше алгоритмом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелентьев В. А. Формальные основы скобочных образов в теории графов // Труды Второй Междунар. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» РАСО'2004. М.: Ин-т проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова, 2004. С. 694–706.
2. Мелентьев В. А. Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата // Прикладная дискретная математика. 2010. № 2(8). С. 74–86.

УДК 519.17

ОГРАНИЧЕНИЯ НА ОБХВАТЫ В КОМПАКТНЫХ ГРАФАХ

В. А. Мелентьев

Условие компактности [1] регулярного графа коррелирует его порядок n со степенью s и минимально возможным диаметром d :

$$1 + s \sum_{i=1}^{d-1} (s-1)^{i-1} < n \leq 1 + s \sum_{i=1}^d (s-1)^{i-1}.$$

Заметим, что область определения порядка компактных графов с заданными значениями степени и диаметра является в данном выражении максимальной и предполагает наличие в них всего спектра k циклов от $k = 3$ до максимально возможного значения $k = 2d + 1$, при этом значения обхвата g , равные длине минимального цикла в графе, определены соответствующей областью $3 < g \leq 2d + 1$.

Перепишем (для случая $s > 2$) условие в виде

$$\frac{s(s-1)^{d-1} - 2}{s-2} < n \leq \frac{s(s-1)^d - 2}{s-2}.$$

Пусть регулярный граф $G(V, E)$ порядка n и степени s $n(s)$ -компактен: его диаметр $d > 1$ и значения n и s соответствуют данному выше условию компактности (случай с $d = 1$ для s -регулярного графа соответствует полному графу, обхват которого $g(G) = 3$). Кратность вершин в рассматриваемых проекциях простых графов проявляется только на уровнях выше первого — в противном случае это были бы мультиграфы,

находящиеся вне нашего рассмотрения. Основанная на проективном описании возможность синтеза регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата впервые представлена в [2]. Там же показано, что наличие в проекции графа одной или нескольких кратных вершин означает наличие в графе цикла длины k , равной сумме номеров уровней, на которых расположены эта или эти вершины; например, если вершина $u \in V$ входит в состав проекции дважды, т. е. ее кратность m_u равна 2, и входит она в состав подмножества вершин одного уровня или двух подмножеств разных уровней $u \in V_i, u \in V_j$ проекции, то этой проекцией определен цикл длины $k = i + j, i, j \in (1, 2, \dots, d)$.

Отметим, что случай $n = N_d(s) = (s(s-1)^d - 2) / (s-2)$ соответствует $n(s)$ -компактному графу с максимально возможным обхватом $g(G) = 2d + 1$ (если такой граф существует) и отсутствию в любой из его проекций вплоть до d -уровня кратных вершин. Кратными в проекции $P_d(v)$ называем перечисленные в ней повторяющиеся вершины. Попытка синтезировать граф с меньшим, чем $2d + 1$, обхватом приведет к появлению кратных вершин на уровнях $i < d$, по крайней мере, в тех его проекциях, ракурсные вершины которых входят в циклы соответствующей длины. При этом d -уровневые проекции с кратными вершинами теряют вершинную полноту, что увеличивает эксцентриситеты этих ракурсных вершин, а следовательно, и диаметр графа, т. е. граф теряет свойство компактности. Таким образом, $n(s)$ -компактных графов с $n = N_d(s)$ и обхватом $g(G) < 2d + 1$ не существует, иначе говоря, при генерации $n(s)$ -компактного графа с $n = N_d(s)$ все k -циклы длины $k < 2d + 1$ должны быть запрещены, т. е. из всех потенциальных подмножеств [2] вершин любого i -го ($i \leq d$) уровня каждой d -уровневой проекции синтезируемого графа должны быть изъяты вершины, уже вошедшие в состав j -х уровней, $j \leq i$.

Приведенное выше условие компактности графов является обобщенным и допускает наличие в них k -циклов любой длины, $3 \leq k \leq 2d + 1$. В [1, 2] показаны возможности генерации лимитируемых обхватом $n(s)$ -компактных графов. В данной работе получены аналитические условия существования таких графов.

Рассмотрим, каким образом изменятся граничные значения числа вершин $n(s)$ -компактного графа при наличии в нем хотя бы одного 3-цикла, что соответствует графу с обхватом $g = 3$. Наличие всего одного 3-цикла в регулярном графе вызовет неизбежное появление на втором уровне каждой из трёх его проекций, ракурсные вершины которых образуют этот 3-цикл, двух вершин, кратных двум вершинам первого уровня. Таким образом, максимально возможное число некрatных вершин второго уровня уменьшается на две; каждая кратная вершина i -го уровня ($1 < i \leq d$) вызывает масштабируемое множителем $s - 1$ уменьшение числа некрatных вершин на $(i + 1)$ -м уровне. Доказано, что порожденные кратными вершинами вершины также являются кратными. В соответствии с этим число $m_d(3)$ кратных вершин на всех d уровнях компактного графа, обусловленное наличием в нем всего одного 3-цикла, составит

$$m_d(3) = 2 + 2(s-1) + \dots + 2(s-1)^{d-1} = 2 \sum_{i=1}^{d-1} (s-1)^{i-1} = \frac{2((s-1)^{d-1} - 1)}{s-2}.$$

Тогда для того, чтобы граф порядка n оставался компактным, несмотря на наличие в нем одного 3-цикла, должно быть выполнено условие $n + m_d(3) \leq N_d(s)$, т. е. $n \leq N_d(s) - m_d(3)$, или

$$\frac{s(s-1)^{d-1} - 2}{s-2} < n \leq (s-1)^{d-1}(s+1).$$

Если же

$$(s-1)^{d-1}(s+1) < n \leq \frac{s(s-1)^d - 2}{s-2},$$

то граф теряет свойство компактности при наличии в нем хотя бы одного треугольного цикла. Иными словами, при генерации $n(s)$ -компактного графа, удовлетворяющего приведенному выше условию, из всех потенциальных подмножеств вершин второго уровня любой из проекций графа необходимо исключить все вершины первого уровня этой проекции.

Получены аналогичные формулы для любых k -циклов, $3 < k \leq 2d - 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелентьев В. А. Компактные структуры вычислительных систем и их синтез // Управление большими системами. 2011. № 32. С. 241–261.
2. Мелентьев В. А. Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата // Прикладная дискретная математика. 2010. № 2(8). С. 74–86.

УДК 519

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК ЭКСПОНЕНТОВ ПРИМИТИВНЫХ ГРАФОВ

В. М. Фомичев

Матрицу $A = (a_{i,j})$ порядка $n > 1$ над полем действительных чисел называют *неотрицательной* (*положительной*) и пишут $A \geq 0$ ($A > 0$), если $a_{i,j} \geq 0$ ($a_{i,j} > 0$) для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Неотрицательную матрицу A называют *примитивной*, если $A^t > 0$ при некотором натуральном t , а наименьшее натуральное γ , при котором $A^\gamma > 0$, называют *экспонентом*, или *показателем примитивности матрицы* A , и обозначают $\exp A$.

В ряде задач, в том числе криптографических, требуется определить экспоненты различных матриц. Для решения таких задач на языке теории графов часто используется эпиморфизм φ мультипликативного моноида неотрицательных матриц порядка n на моноид n -вершинных орграфов, где умножение орграфов определено как умножение бинарных отношений [1, с. 212]. При эпиморфизме φ матрице A соответствует оргграф Γ с множеством вершин $\{1, \dots, n\}$ и с множеством дуг U , где $(i, j) \in U$, если и только если $a_{i,j} > 0$, при этом матрица смежности вершин графа Γ называется *носителем матрицы* A . Очевидно, $\varphi(M) = \Gamma$. Для ограничения эпиморфизма φ на подмоноид симметрических матриц (для них $a_{i,j} = a_{j,i}$ при всех допустимых i, j) областью значений является подмоноид n -вершинных графов. Для эпиморфизма φ выполнено условие: $A > 0$, если и только если оргграф $\Gamma = \varphi(A)$ полный. Отсюда неотрицательная матрица A и оргграф $\Gamma = \varphi(A)$ одновременно примитивны или не примитивны, в случае примитивности экспоненты их равны. Далее используем преимущественно аппарат теории графов. Неориентированные графы будем называть просто графами.

Необходимым условием примитивности орграфа является его сильная связность. Критерий примитивности орграфа [2, с. 226]: если $C_1, \dots, C_k$ суть все простые контуры орграфа Γ длин соответственно $l_1, \dots, l_k$, то оргграф Γ примитивный, если и только если $\text{НОД}(l_1, \dots, l_k) = 1$. Отсюда $\exp \Gamma = \exp \Gamma'$, если примитивные оргграфы (графы) Γ и Γ' изоморфны.

Достижимая абсолютная оценка экспонента любого примитивного n -вершинного орграфа Γ получена Виландтом [3]: $\exp \Gamma \leq n^2 - 2n + 2$, где $n > 1$. Эта оценка для n -