

Если же

$$(s-1)^{d-1}(s+1) < n \leq \frac{s(s-1)^d - 2}{s-2},$$

то граф теряет свойство компактности при наличии в нем хотя бы одного треугольного цикла. Иными словами, при генерации $n(s)$ -компактного графа, удовлетворяющего приведенному выше условию, из всех потенциальных подмножеств вершин второго уровня любой из проекций графа необходимо исключить все вершины первого уровня этой проекции.

Получены аналогичные формулы для любых k -циклов, $3 < k \leq 2d - 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелентьев В. А. Компактные структуры вычислительных систем и их синтез // Управление большими системами. 2011. № 32. С. 241–261.
2. Мелентьев В. А. Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата // Прикладная дискретная математика. 2010. № 2(8). С. 74–86.

УДК 519

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК ЭКСПОНЕНТОВ ПРИМИТИВНЫХ ГРАФОВ

В. М. Фомичев

Матрицу $A = (a_{i,j})$ порядка $n > 1$ над полем действительных чисел называют *неотрицательной* (*положительной*) и пишут $A \geq 0$ ($A > 0$), если $a_{i,j} \geq 0$ ($a_{i,j} > 0$) для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Неотрицательную матрицу A называют *примитивной*, если $A^t > 0$ при некотором натуральном t , а наименьшее натуральное γ , при котором $A^\gamma > 0$, называют *экспонентом*, или *показателем примитивности матрицы* A , и обозначают $\exp A$.

В ряде задач, в том числе криптографических, требуется определить экспоненты различных матриц. Для решения таких задач на языке теории графов часто используется эпиморфизм φ мультипликативного моноида неотрицательных матриц порядка n на моноид n -вершинных орграфов, где умножение орграфов определено как умножение бинарных отношений [1, с. 212]. При эпиморфизме φ матрице A соответствует оргграф Γ с множеством вершин $\{1, \dots, n\}$ и с множеством дуг U , где $(i, j) \in U$, если и только если $a_{i,j} > 0$, при этом матрица смежности вершин графа Γ называется *носителем матрицы* A . Очевидно, $\varphi(M) = \Gamma$. Для ограничения эпиморфизма φ на подмоноид симметрических матриц (для них $a_{i,j} = a_{j,i}$ при всех допустимых i, j) областью значений является подмоноид n -вершинных графов. Для эпиморфизма φ выполнено условие: $A > 0$, если и только если оргграф $\Gamma = \varphi(A)$ полный. Отсюда неотрицательная матрица A и оргграф $\Gamma = \varphi(A)$ одновременно примитивны или не примитивны, в случае примитивности экспоненты их равны. Далее используем преимущественно аппарат теории графов. Неориентированные графы будем называть просто графами.

Необходимым условием примитивности орграфа является его сильная связность. Критерий примитивности орграфа [2, с. 226]: если $C_1, \dots, C_k$ суть все простые контуры орграфа Γ длин соответственно $l_1, \dots, l_k$, то оргграф Γ примитивный, если и только если $\text{НОД}(l_1, \dots, l_k) = 1$. Отсюда $\exp \Gamma = \exp \Gamma'$, если примитивные оргграфы (графы) Γ и Γ' изоморфны.

Достижимая абсолютная оценка экспонента любого примитивного n -вершинного орграфа Γ получена Виландтом [3]: $\exp \Gamma \leq n^2 - 2n + 2$, где $n > 1$. Эта оценка для n -

вершинного примитивного орграфа Γ допускает уточнение [2, с. 227] с использованием длины l кратчайшего простого контура в Γ : $\exp \Gamma \leq (n - 2)l + n$. В частности, если орграф Γ имеет петлю, то он примитивен и $\exp \Gamma \leq 2n - 2$.

Необходимым условием примитивности графа является его связность. Любое ребро графа есть цикл длины 2, тогда примитивность связного графа равносильна наличию в нем простого цикла нечетной длины. Отсюда по теореме Кенига о двудольных графах связный граф примитивен, если и только если он не является двудольным. Известна [2, с. 409] достижимая абсолютная оценка экспонентов примитивных n -вершинных графов: $\exp \Gamma \leq 2n - 2$.

Далее через C обозначим контур в орграфе и через C^* — мультимножество вершин контура C , в случае простого контура — множество вершин. Множество W путей из i в j (при $i = j$ контуров), где $i, j \in \{1, \dots, n\}$, назовем (t, l) -множеством путей, t, l — натуральные, если в W имеется l путей (контуров), длины которых равны $t, t + 1, \dots, t + l - 1$.

Для уточнения оценки экспонента примитивного n -вершинного орграфа Γ использованы следующие свойства ($n > 1$):

- 1) Γ примитивен, если содержит два простых контура со взаимно простыми длинами, в частности контур простой длины p и контур длины, не кратной p ;
- 2) если в Γ (связном графе Γ') имеются пути из i в j длины $l > 0$ для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$, то Γ (граф Γ') примитивен и $\exp \Gamma \leq l$;
- 3) если для некоторых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ в Γ (в графе Γ') нет путей из i в j длины τ , то $\exp \Gamma > \tau$;
- 4) пусть в Γ имеется контур C длины l и (t, l) -множество путей из i в j , проходящих через вершину контура C , тогда в Γ имеются пути из i в j длины τ при любом $\tau \geq t$, где $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть в орграфе Γ имеются простые контуры C и C' длины соответственно l и λ , где $1 < \lambda < l \leq n$.

Теорема 1. Пусть $(l, \lambda) = 1$, $n > 2$, тогда:

- 1) если $C^* \cap C'^* = \emptyset$, то $\exp \Gamma \leq l\lambda - 2l - 3\lambda + 3n$;
- 2) если $C^* \cap C'^* = H$, где $|H| = h > 0$, то $\exp \Gamma \leq l\lambda - l - 3\lambda + h + 2n$.

Следствие 1. Для любого примитивного n -вершинного орграфа Γ при $n > 2$ верно:

- 1) если циклы C и C' не имеют общих вершин, то

$$\exp \Gamma \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \leq n^2/4 + n/2 + 1/4;$$

- 2) если циклы C и C' имеют h общих вершин, где $1 \leq h \leq \lambda$, то

$$\exp \Gamma \leq \left\lfloor \frac{n+h+2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n+h+2}{2} \right\rceil - 2h - n \leq n^2 - 2n + 2.$$

При $n > 2$ n -вершинным графом Виландта назовем орграф, состоящий из гамильтонова контура C , к которому добавлена дуга (i, j) , где расстояние на контуре от i до j равно 2, $i \in \{1, \dots, n\}$. Множество n -вершинных графов Виландта обозначим $\Gamma_W(n)$.

Теорема 2. Множество $\Gamma_W(n)$ состоит из $n!$ изоморфных графов; абсолютная оценка Виландта достигается на графах Виландта, и только на них. Для остальных примитивных орграфов Γ верна оценка, достижимая при $l = n$, $\lambda = n - 2$, где $n > 3$ и нечетное: $\exp \Gamma \leq n^2 - 3n + 4$.

Замечание 1. Имеются натуральные числа, меньшие $n^2 - 2n + 2$, не являющиеся значениями экспонента какого-либо n -вершинного орграфа. Эти числа образуют «лакуны» (пропуски в натуральном ряду). Так, первыми были обнаружены (авторами A. L. Dulmage, N. S. Mendelsohn) «лакуны» вида $[n^2 - 3n + 5, (n - 1)^2]$ и $[n^2 - 4n + 7, n^2 - 3n + 2]$. В дальнейшем эти результаты были обобщены.

В неориентированном графе Γ' обозначим через $\text{len}[i, j]$ длину кратчайшего пути из i в j и через $e(C)$ — эксцентриситет цикла C , т. е. $e(C) = \max_{i \notin C} \{\min_{j \in C} \text{len}[i, j]\}$.

Теорема 3.

а) Пусть $n > 1$, l — длина длиннейшего простого цикла C нечетной длины в примитивном n -вершинном графе Γ' , $1 \leq l \leq n$, тогда

$$\exp \Gamma' \leq 2e(C) + l - 1 \leq 2n - l - 1.$$

б) Если простые циклы нечетных длин покрывают множество $\{1, \dots, n\}$, то $\exp \Gamma' \leq n - 1$.

Обозначим через $\Gamma_P(n)$ множество примитивных n -вершинных графов, состоящих из гамильтонова пути и петли, инцидентной одной из концевых вершин.

Теорема 4. При любом $n > 1$ множество $\Gamma_P(n)$ состоит из $n!$ изоморфных графов; абсолютная оценка экспонента $2n - 2$ достигается на графах из $\Gamma_P(n)$, и только на них.

Подробное изложение представленных результатов можно найти в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Теория решёток. М.: Наука, 1984.
2. Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Комбинаторика неотрицательных матриц. М.: ТВП, 2000.
3. Wielandt H. Unzerlegbare nicht negative Matrizen // Math. Zeitschr. 1950. N. 52. S. 642–648.
4. Фомичёв В. М. Оценки экспонентов примитивных графов // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2. С. 101–112.