Секция 4

# ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.17

## ОБ ОДНОМ КОНТРПРИМЕРЕ ДЛЯ МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ 1-РАСШИРЕНИЙ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

М. Б. Абросимов, Д. Д. Комаров

Связный граф без циклов называется *деревом*. Дерево называется *сверхстройным* (*звездообразным*), если в точности одна его вершина имеет степень больше 2. Эту вершину будем называть *корнем* сверхстройного дерева. Вектор степеней сверхстройного дерева может быть записан в виде $(k, 2^m, 1^k)$.

Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение $k$ цепей с общей концевой вершиной. При этом дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке невозрастания: $(m_1, \ldots, m_k)$, где $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_k$. Очевидно, что такое кодирование сверхстройных деревьев при $k > 2$ является взаимно однозначным.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным 1-расширением* $n$-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф $G^*$ является вершинным 1-расширением графа $G$, то есть граф $G$ вкладывается в каждый подграф графа $G^*$, получающийся удалением любой его вершины;
2) граф $G^*$ содержит $n + 1$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + 1$;
3) $\alpha^*$ имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

В работе [1] доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть $T$ — сверхстройное дерево вида $(m_1, \ldots, m_k)$ и $k > 2$. Дерево $T$ тогда и только тогда имеет минимальное вершинное 1-расширение с $k + 1$ дополнительным ребром и вектором степеней $((k + 1)^2, 2^{m+k})$, когда выполняется условие

$$(\forall i = 1, \ldots, k : m_i > 1)\ (\forall j = 2, \ldots, m_i)\ (\exists\, 1 \leqslant l \leqslant k)\ (m_l = j - 1 \vee m_l = m_i - j).$$

Схема построения минимального вершинного 1-расширения сверхстройного дерева по теореме 1 состоит в добавлении одной вершины, соединением её со всеми листьями и корнем. В работе [2] высказано более сильное утверждение по сравнению с теоремой 1. Прежде чем его сформулировать, дадим одно определение. Вершина $v_{ij}$ сверхстройного дерева $T$ называется *сложной*, если среди длин цепей дерева $T$ нет цепи длины $j - 1$ или $m_i - j$. В теореме 1 рассматриваются сверхстройные деревья без сложных вершин. Например, сверхстройное дерево (5, 1, 1) имеет одну сложную вершину.

**Утверждение 1** [2]. Минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева с $k$ цепями и $p$ сложными вершинами содержит в точности $k+p+1$ дополнительных ребер.

При $p = 0$ приведенное утверждение совпадает с теоремой 1. Однако при $p > 0$ схема доказательства в работе [2] исследует вариацию вершинного 1-расширения с вектором степеней $((k + 1)^2, 2^{m+k})$ из теоремы 1. Пусть $v_{ij}$ — сложная вершина, тогда предлагается добавить ребро из вершины старшей степени в вершину $v_{i(j-1)}$. Далее авторы статьи утверждают, что построенный граф является минимальным вершинным 1-расширением заданного сверхстройного дерева. Однако в общем случае построенный граф является вершинным 1-расширением, но не обязательно минимальным.

Из 67 сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 есть деревья, которые не попадают под действие теоремы 1, но имеют $k+1$ дополнительное ребро [3]. Оказывается, что все они являются контрпримерами к утверждению 1.

Сверхстройное дерево (5, 1, 1) имеет одну сложную вершину, но имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ с четырьмя дополнительными рёбрами.

Сверхстройное дерево (3, 2, 2) также имеет одну сложную вершину, но имеет два минимальных вершинных 1-расширения вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ и одно вида $((k+1), k, 3, 2^{m+k-1})$ с четырьмя дополнительными рёбрами.

Наконец, сверхстройное дерево (4, 3, 2) имеет одну сложную вершину, но имеет 4 минимальных вершинных 1-расширения вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ с четырьмя дополнительными рёбрами.

Ещё один интересный пример представляет собой сверхстройное дерево (5, 2, 2). Можно заметить, что оно имеет две сложные вершины, но его 37 минимальных вершинных 1-расширений имеют 5, а не 6 дополнительных ребер. Аналогичная ситуация с деревьями (6, 1, 1) и (3, 3, 2), у которых также по две сложные вершины, но минимальные вершинные 1-расширения имеют 5 дополнительных рёбер.

Самое большое отклонение среди всех сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 наблюдается на сверхстройном дереве (7, 1, 1). Непосредственной проверкой можно убедиться, что оно имеет три сложные вершины, но его 8 минимальных вершинных 1-расширений имеют 5, а не 7 дополнительных рёбер. Можно предположить, что на сверхстройных деревьях вида $(t, 1, 1)$ (количество сложных вершин в таких деревьях составляет $t-3$ при $t>3$) при увеличении $t$ отклонение будет возрастать.

Каждый из этих контрпримеров показывает ошибочность утверждения 1 в общем случае.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения графов // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Томск, 2000. С. 59–64.
2. *Harary F and Khurum M.* One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. 1995. V. 56. P. 135–143.
3. *Абросимов М. Б., Комаров Д. Д.* Минимальные вершинные расширения сверхстройных деревьев с малым числом вершин / Саратов, СГУ, 2010. 38 с. Деп. в ВИНИТИ 18.10.2010, № 590-В2010.


УДК 519.17

# О КОЛИЧЕСТВЕ МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ И РЁБЕРНЫХ 1-РАСШИРЕНИЙ ЦИКЛОВ С ЧИСЛОМ ВЕРШИН ДО 17

М. Б. Абросимов, Н. А. Кузнецов

Дж. П. Хейз в работе [1], а затем вместе с Ф. Харари в работах [2, 3] предложил графовую модель для исследования отказоустойчивости дискретных систем. Особое внимание было уделено системам, представимым циклами. В работах [1 – 3] предложены