лагается добавить ребро из вершины старшей степени в вершину $v_{i(j-1)}$. Далее авторы статьи утверждают, что построенный граф является минимальным вершинным 1-расширением заданного сверхстройного дерева. Однако в общем случае построенный граф является вершинным 1-расширением, но не обязательно минимальным.

Из 67 сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 есть деревья, которые не попадают под действие теоремы 1, но имеют $k+1$ дополнительное ребро [3]. Оказывается, что все они являются контрпримерами к утверждению 1.

Сверхстройное дерево (5, 1, 1) имеет одну сложную вершину, но имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ с четырьмя дополнительными рёбрами.

Сверхстройное дерево (3, 2, 2) также имеет одну сложную вершину, но имеет два минимальных вершинных 1-расширения вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ и одно вида $((k+1), k, 3, 2^{m+k-1})$ с четырьмя дополнительными рёбрами.

Наконец, сверхстройное дерево (4, 3, 2) имеет одну сложную вершину, но имеет 4 минимальных вершинных 1-расширения вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ с четырьмя дополнительными рёбрами.

Ещё один интересный пример представляет собой сверхстройное дерево (5, 2, 2). Можно заметить, что оно имеет две сложные вершины, но его 37 минимальных вершинных 1-расширений имеют 5, а не 6 дополнительных ребер. Аналогичная ситуация с деревьями (6, 1, 1) и (3, 3, 2), у которых также по две сложные вершины, но минимальные вершинные 1-расширения имеют 5 дополнительных рёбер.

Самое большое отклонение среди всех сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 наблюдается на сверхстройном дереве (7, 1, 1). Непосредственной проверкой можно убедиться, что оно имеет три сложные вершины, но его 8 минимальных вершинных 1-расширений имеют 5, а не 7 дополнительных рёбер. Можно предположить, что на сверхстройных деревьях вида $(t, 1, 1)$ (количество сложных вершин в таких деревьях составляет $t-3$ при $t>3$) при увеличении t отклонение будет возрастать.

Каждый из этих контрпримеров показывает ошибочность утверждения 1 в общем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения графов // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Томск, 2000. С. 59–64.
2. *Harary F and Khurum M.* One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. 1995. V. 56. P. 135–143.
3. *Абросимов М. Б., Комаров Д. Д.* Минимальные вершинные расширения сверхстройных деревьев с малым числом вершин / Саратов, СГУ, 2010. 38 с. Деп. в ВИНИТИ 18.10.2010, № 590-B2010.

УДК 519.17

О КОЛИЧЕСТВЕ МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ И РЁБЕРНЫХ 1-РАСШИРЕНИЙ ЦИКЛОВ С ЧИСЛОМ ВЕРШИН ДО 17

М. Б. Абросимов, Н. А. Кузнецов

Дж. П. Хейз в работе [1], а затем вместе с Ф. Харари в работах [2, 3] предложил графовую модель для исследования отказоустойчивости дискретных систем. Особое внимание было уделено системам, представимым циклами. В работах [1–3] предложены схемы построения одной оптимальной отказоустойчивой реализации (минимального расширения) цикла; другие схемы предложены в [4–7].

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* (k натуральное) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением G, то есть граф G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;
2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным рёберным k-расширением* (k натуральное) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является рёберным k-расширением G, то есть граф G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k рёбер;
2) граф G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Если говорить о минимальных вершинных и рёберных k-расширениях циклов, то можно встретить эквивалентные определения.

Граф называется *k-вершинно-гамильтоновым*, если после удаления любых его k вершин и инцидентных им рёбер получившийся граф является гамильтоновым. Граф называется *k-рёберно-гамильтоновым*, если после удаления любых k рёбер получившийся граф является гамильтоновым. Вершинно-(рёберно-)k-гамильтонов граф называется *оптимальным*, если он имеет минимально возможное число рёбер среди всех вершинно-(рёберно-)k-гамильтоновых графов с тем же числом вершин.

Известно, что задачи проверки вершинных (рёберных) k-расширений произвольных графов, так же как и задачи проверки k-вершинно-(рёберно-)гамильтоновых графов являются NP-полными [8]. Интерес представляет количество неизоморфных расширений для различных графов. В 2000 г. проведён вычислительный эксперимент [6 – 9], в рамках которого удалось построить все минимальные вершинные и рёберные 1-расширения циклов с числом вершин до 13. В рамках представляемой работы проведён новый вычислительный эксперимент с использованием распределённых вычислений. Удалось построить все минимальные вершинные и рёберные 1-расширения циклов с числом вершин до 17. Основные результаты представлены в таблице.

Минимальные вершинные (МВ-1Р)
и рёберные (МР-1Р) 1-расширения циклов

Число вершин	Число МВ-1Р	Число МР-1Р
3	1	1
4	1	1
5	1	1
6	2	2
7	2	2
8	10	4
9	7	13
10	63	13
11	27	87
12	602	53
13	158	885
14	7203	320
15	1396	10933
16	104212	2641
17	16069	160145

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
2. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
3. *Harary F. and Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.
4. *Mukhopadhyaya K. and Sinha B. P.* Hamiltonian graphs with minimum number of edges for fault-tolerant topologies // Inform. Process. Lett. 1992. V. 44. P. 95–99.
5. *Hsu L. H. and Lin C. K.* Graph Theory and Interconnection Networks. CRC Press, 2009.
6. *Абросимов М. Б.* О неизоморфных оптимальных 1-отказоустойчивых реализациях некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. Саратов: СГУ, 2000. Вып. 3. С. 3–10.
7. *Абросимов М. Б.* О неизоморфных минимальных реберных 1-расширениях графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. Саратов: СГУ, 2004. Вып. 6. С. 3–9.
8. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
9. *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения циклов с числом вершин не более одиннадцати / Саратов: СГУ, 2001. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 14.08.2001, № 1869-В2001.

УДК 519.17

ОБ ОРГРАФАХ, ИМЕЮЩИХ МИНИМАЛЬНЫЕ ВЕРШИННЫЕ 1-РАСШИРЕНИЯ С МАЛЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДУГ

М. Б. Абросимов, О. В. Моденова

Понятие минимального вершинного k-расширения введено на основе понятия оптимальной k-отказоустойчивой реализации, которое предложено Дж. П. Хейзом [1]. В работе [2] исследована задача описания неориентированных графов с заданным числом дополнительных рёбер минимальных вершинных 1-расширений. В данной работе рассматривается аналогичная задача для орграфов без петель. В [3] приводится лемма, устанавливающая связь между минимальными вершинными k-расширениями неориентированного графа и его ориентации.

Лемма 1 [3]. Пусть G^* есть минимальное вершинное k-расширение орграфа G. Тогда симметризация G^* является вершинным k-расширением симметризации G.

Следствие 1. Число дополнительных дуг минимального вершинного k-расширения орграфа G не менее числа дополнительных рёбер минимального вершинного k-расширения симметризации орграфа G.

В работе [2] получены следующие результаты (теоремы 1–3).

Теорема 1. Графы со степенным множеством $\{1, 0\}$, и только они, имеют минимальные вершинные 1-расширения с одним дополнительным ребром; для каждого графа со степенным множеством $\{1, 0\}$ такое расширение единственно с точностью до изоморфизма.

С учётом следствия 1 получаем, что только ориентации графов из теоремы 1 могут иметь минимальные вершинные 1-расширения с одной дополнительной дугой.